



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ДОНГУ»

АКТУАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

МАТЕРИАЛЫ

**VIII Всероссийской с международным участием научной конференции,
посвященной 60-летию создания Донецкого научного центра,
Донецкого государственного университета и научной школы академика
Александра Сергеевича Космодамианского**



Донецк
ДонГУ
2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НОМЦ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ДОНГУ»

АКТУАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

МАТЕРИАЛЫ

VIII Всероссийской с международным участием научной
конференции, посвященной 60-летию создания Донецкого научного
центра, Донецкого государственного университета и научной школы
академика Александра Сергеевича Космодамианского
(Донецк–Севастополь, 18–21 сентября 2025 г.)

Донецк
ДонГУ
2025

УДК 539.3+624.074(063)

ББК В251я431

А43

Редакционная коллегия:

И.А. Моисеенко (*гл. ред.*), Р.Н. Нескородев (*зам. гл. ред.*),
Е.С. Глушанков, Н.Ю. Мельничук, В.И. Сторожев, М.А. Толстых

Рецензенты:

А.С. Гольцев, Б.И. Коносевиц

Рекомендовано к изданию Учёным советом ДонГУ

(протокол № 10 от 03.09.2025 г.)

- А43 **Актуальные математические проблемы механики деформируемого твердого тела** : Материалы VIII Всероссийской с международным участием научной конференции, посвященной 60-летию создания Донецкого научного центра, Донецкого государственного университета и научной школы академика Александра Сергеевича Космодамианского (Донецк–Севастополь, 18–21 сентября 2025 г.). – Донецк: ДонГУ, 2025. – 141 с. – URL: <http://repo.donnu.ru:8080/jspui/handle/123456789/5126> – [Электронный ресурс].

ISBN 978-5-00262-014-2

Сборник содержит материалы докладов, представленных на VIII Всероссийской с международным участием научной конференции «Актуальные математические проблемы механики деформируемого твердого тела», посвященной 60-летию создания Донецкого научного центра, Донецкого государственного университета и научной школы академика Александра Сергеевича Космодамианского. Основная тематика докладов связана с различными аспектами компьютерно-математического моделирования в механике деформируемого твердого тела. Представленные исследования посвящены разработке и применению методов анализа моделей деформирования материалов и элементов конструкций, а также разрабатываемых горных массивов (методов потенциалов обобщенных комплексных переменных, асимптотических методов, метода конечных элементов, методов решения обратных и некорректных задач), рассматриваются вопросы совершенствования вычислительных технологий, применяемых для решения исследуемых задач. Представлены методы решения задач об идентификации параметров материалов со сложными физико-механическими свойствами (анизотропия, неоднородность, вязкоупругость, функциональная градиентность, пористость, пьезо- и электромагнитоупругие эффекты), а также новые результаты в исследованиях концентрации напряжений около отверстий и трещин, в контактных задачах, задачах теории плит, пластин и оболочек в статической и динамической постановках, задачах теории распространения упругих волн. Изложены результаты исследований усталостной прочности, ползучести и длительной прочности материалов, учета влияния микроструктуры. Рассмотрены вопросы интеграции фундаментальных исследований с прикладными задачами машиностроения, авиастроения и горного дела.

УДК 539.3+624.074(063)

ББК В251я431

ISBN 978-5-00262-014-2

© Коллектив авторов, 2025

© Донецкий государственный университет, 2025

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Сопредседатели программного комитета

Беспалова Светлана Владимировна, д-р физ.-мат. наук, проф., ректор ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», руководитель регионального научно-образовательного математического центра «Азово-Черноморский математический центр», г. Донецк;

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой теории упругости ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону;

Георгиевский Дмитрий Владимирович, чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой теории упругости, директор Научно-исследовательского института механики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва;

Калоеров Стефан Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк.

Члены программного комитета

Бауэр Светлана Михайловна, д-р физ.-мат. наук, проф., и.о. зав. кафедрой теоретической и прикладной механики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург;

Вовк Леонид Петрович, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой «Математическое моделирование» Автомобильно-дорожного института ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», г. Горловка;

Глухов Александр Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., заместитель директора по научной работе ФГБНУ «Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела», г. Донецк;

Глушков Евгений Викторович, д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», г. Краснодар;

Гольцев Аркадий Сергеевич, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой прикладной механики и компьютерных технологий ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк;

Завойчинская Элеонора Борисовна, д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры теории упругости ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва;

Коссович Леонид Юрьевич, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математической теории упругости и биомеханики ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского», г. Саратов;

Наседкин Андрей Викторович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математического моделирования ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону;

Соловьев Аркадий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, доц., профессор кафедры математики и физики ГБОУВО РК «Крымский инженерно-педагогический университет им. Февзи Якубова», г. Симферополь;

Сторожев Валерий Иванович, д-р техн. наук, проф., главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк;

Чехов Валерий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры прикладной математики ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского», г. Симферополь.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Моисеенко И.А. – председатель

Нескородев Р.Н. – заместитель председателя

Глушанков Е.С. – ученый секретарь

Толстых М.А. – технический секретарь

Авдюшина Е.В.

Глухов А.А.

Дзундза А.И.

Ерашова Н.Е.

Ермаков О.Э.

Мельничук Н.Ю.

Мироненко А.Б.

Мирончук А.И.

Пачева М.Н.

Полянский М.А.

Сошина Е.И.

СОДЕРЖАНИЕ

Научная школа академика А.С. Космодамианского: очерк об истории и деятельности, задачи нового периода работы	8
<i>Авдюшина Е.В.</i> Исследование зоны прилегания вокруг горизонтальной горной выработки криволинейного поперечного сечения с разрезами	14
<i>Айзикович С.М., Панфилов И.А., Лапина П.А.</i> Контактная задача для полупространства с учетом нелинейности его упругих свойств	17
<i>Андреанов И.К.</i> Уравнение совместности деформаций генки в задаче о нагружении несжимаемой толстостенной сферической оболочки внешним давлением	18
<i>Бауэр С.М., Дорофеев Н.П., Нестерчук Г.А., Смирнов А.Л.</i> Колебания балок, сопряженных под углом	20
<i>Бобылев А.А.</i> Коллективное индентирование упругой полуплоскости системой жестких штампов	23
<i>Бондаренко Н.С.</i> Исследование мембранных усилий в ортотропной пластине при локальных силовых воздействиях, распределённых по площади круга, на базе обобщённой теории в варианте $\{1, 0\}$ -аппроксимации	24
<i>Быкова М.И., Шашкин А.И., Шашкина С.А.</i> Численное решение задач статического деформирования плоских упругих тел с учётом микроструктуры материала	27
<i>Бычков А.А.</i> Исследование распределения компонент сплава SiGe в полупроводниковой пленке	30
<i>Ватульян А.О.</i> Некоторые способы решения коэффициентных обратных задач для неоднородных структур	34
<i>Ватульян А.О., Дударев В.В., Нестеров С.А.</i> Об обратной коэффициентной задаче для функционально-градиентных пористоупругих тел	36
<i>Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О.</i> О прикладной модели растяжения пористоупругого прямоугольника	39
<i>Ватульян А.О., Шагин В.М.</i> Применение неклассических граничных интегральных уравнений 1-го рода и нейронных сетей для решения двумерных задач	42
<i>Ваулин В.И., Александрова А.А., Альдебенев В.В., Ваулин С.В.</i> Использование математического аппарата в реализации подготовки инженера и проектной деятельности	45
<i>Водолагин А.Л., Гуцин А.Ю.</i> Выбор размера сектора при расчетах на прочность дисков авиационных двигателей	49

<i>Германов Л.Н.</i> Автоматизированный испытательный стенд НЭСТ с имитацией СОТР КА	52
<i>Глухов А.А., Номбре С.Б., Сторожев В.И., Фоменко М.В.</i> Локализованные и интерфейсные сдвиговые волны в свободных и контактирующих анизотропных функционально-градиентных полупространствах с приповерхностной неоднородностью	55
<i>Глухов А.А., Пачева М.Н., Карасев Д.С., Сторожев С.В.</i> Дисперсионные соотношения для обобщенных волн Гуляева-Блюстейна в пьезоактивном анизотропном полупространстве с многофакторной приповерхностной неоднородностью	59
<i>Глушанков Е.С.</i> О влиянии дефектов типа трещин на термонапряженное состояние пластинок из пьезоматериалов	63
<i>Глущенко А.В., Пачева М.Н., Сторожев В.И., Фоменко М.В.</i> Окружные изгибные волны в помещенных в поперечное магнитное поле проводящих кольцевых пластинах	66
<i>Гольцев А.С.</i> Компьютерная модель сосредоточенного воздействия продольной силы в изотропных сферических оболочках	69
<i>Гольцева Ю.А., Моисеенко И.А.</i> Локальный нагрев ортотропных пластин по отрезку прямой линии	72
<i>Дзундза А.И., Моисеенко И.А.</i> Базисные решения в задаче о распространении осесимметричных нормальных волн в протяженных изотропных радиально неоднородных цилиндрах кольцевого сечения	76
<i>Завойчинская Э.Б., Лавриков Г.Е.</i> Математическое моделирование масштабно-структурного разрушения при одноосном нагружении титановых сплавов во всем диапазоне асимметрии цикла	80
<i>Калоеров С.А., Гапотченко Я.И.</i> Антиплоская деформация тела с цилиндрическими полостями и плоскими трещинами	84
<i>Калоеров С.А., Ермаков О.Э.</i> Изгиб кусочно-однородной пьезоплиты с упругими включениями	87
<i>Калоеров С.А., Полянский М.А.</i> Действие сосредоточенных сил в электромагнитовязкоупругой пластинке с отверстиями и трещинами	90
<i>Калоеров С.А., Сероштанов А.В.</i> Решение задачи об изгибе тонкой многосвязной пьезополосы с отверстиями, трещинами и выемами	93
<i>Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.</i> Основные положения асимптотической теории нестационарных процессов в тонких упругих оболочках вращения	95

<i>Малютина Т.П., Павлыш В.Н., Полянский Д.Д., Сторожев С.В.</i>	
Учет параметрической неопределенности в модели термоупругого деформирования слоя со свободным теплообменом на границах при индукционном нагреве	99
<i>Мироненко А.Б., Сошина Е.И.</i> Кручение анизотропного цилиндра с отверстиями, трещинами и выемами	103
<i>Мирончук А.И.</i> Исследование вязкоупругого состояния тонких плит с криволинейными отверстиями	106
<i>Назаров В.В.</i> Сравнение эквивалентных напряжений без разделения на тип плоского напряженного состояния	109
<i>Назаров В.В.</i> Определение порога ползучести и предела кратковременной прочности по экспериментальным данным	112
<i>Нескородев Р.Н.</i> Учет влияния вязкоупругих параметров при изучении напряженного состояния анизотропного массива с горизонтальной выработкой	115
<i>Номбре С.Б., Пачева М.Н., Сторожев С.В., Чан Ба Ле Хоанг</i> Учет параметрической неопределенности в модели изгиба балки при неравномерном нагреве и нейтронном облучении	118
<i>Титова Е.Б., Чекмарев Д.Т.</i> О групповых свойствах и спектрах сеточных операторов схем МКЭ решения задач теории упругости	122
<i>Чекмарев Д.Т., Трофимов В.В.</i> О моментном конечном элементе решения плоской задачи теории упругости	125
<i>Чернышов А.Д., Горяйнов В.В.</i> Моделирование деформирования термоупругой прямоугольной пластины с помощью быстрых разложений	129
<i>Чехов В.В.</i> Моделирование нелинейных эффектов при статическом нагружении с использованием формализма гибридного автомата	133
<i>Юров В.О.</i> Коэффициентная обратная задача на основе прикладной модели изгиба прямоугольника	136
<i>Явруян О.В.</i> Об особенностях решения оптимизационных задач для простейших элементов конструкции	137

НАУЧНАЯ ШКОЛА АКАДЕМИКА А.С. КОСМОДАМИАНСКОГО: ОЧЕРК ОБ ИСТОРИИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ЗАДАЧИ НОВОГО ПЕРИОДА РАБОТЫ



Проведение VIII Всероссийской (с международным участием) научной конференции «Актуальные математические проблемы механики деформируемого твердого тела» возобновляет традицию организации таких конференций, открытую еще в 1983 году, прервавшуюся на более чем двенадцатилетний период, и приурочено к тесно взаимосвязанным знаковым датам в истории науки Донецкого региона, да и отечественной науки в целом – 60-летию создания Донецкого научного центра, Донецкого государственного университета и научной школы академика Алек-

сандра Сергеевича Космодамианского в области проблем механики деформируемого твердого тела.

Донецкий научный центр (ДНЦ) Академии наук Украинской Советской Социалистической Республики (АН УССР) был основан в 1965 году по инициативе партийного руководства Донбасса и президента Академии наук УССР, академика Бориса Евгеньевича Патона с целью интенсификации развития и координации деятельности сети научно-исследовательских организаций и высших учебных заведений Донецкого региона (Донецкой и Луганской областей), как одного из наиболее высокоразвитых перспективных промышленных регионов Советского Союза. Ведущими заданиями ДНЦ являлось решение научных проблем, имевших первостепенное значение для социально-экономического и культурного развития региона, более полного и эффективного использования его индустриального, интеллектуального и кадрового потенциала.

При организации ДНЦ для работы и руководства исследованиями в действовавших и вновь создаваемых научных и образовательных организациях были приглашены известные ученые из многих научных центров Советского Союза – Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Саратова, Томска, Тюмени, ряда городов УССР. Среди этой плеяды ученых-подвижников был и доктор технических наук, профессор Александр Сер-

геевич Космодамианский, жизнь и деятельность которого стали яркой страницей в истории отечественной науки, истории Донецкого академического научного центра и Донецкого государственного университета.

А.С. Космодамианский родился 24 марта 1923 года в селе Ревны Брянской области в семье священнослужителя. В 1941 году он поступил на первый курс механико-математического факультета Воронежского государственного университета, однако учебу прервала война, и он добровольцем ушел на фронт. Все годы Великой Отечественной войны был на передовой, его мужество и героизм были отмечены орденом Славы III степени, двумя медалями «За отвагу», многими другими боевыми наградами. После войны, которая для А.С. Космодамианского завершилась со штурмом Кенигсберга, он вернулся к учебе. В 1949 году окончил Саратовский государственный университет и с этого времени целиком посвятил себя служению науке и преподавательской деятельности. В 1952 г. под руководством профессора С.Г. Лехницкого он защищает кандидатскую, в 1963 г. – докторскую диссертацию. В эти годы Александр Сергеевич вел научную и преподавательскую работу в Ростовском и Саратовском университетах. Совместная творческая работа и дружба связывали его со многими видными учеными современности – будущими академиками И.И. Воровичем и Н.Н. Моисеевым, профессорами Е.Ф. Бурмистровым, С.Г. Лехницким, Л.А. Толоконниковым, С.В. Фальковичем, В.И. Юдовичем. В 1965 г. профессор А.С. Космодамианский избирается членом-корреспондентом Академии наук СССР и переезжает в наш город для работы во вновь созданном Донецком научном центре и новом классическом Донецком государственном университете. Здесь талант А.С. Космодамианского, как ученого, педагога и организатора науки, проявился особенно ярко. С его приездом в Институте прикладной математики и механики АН УССР под его руководством был создан отдел математических проблем упругости и пластичности, а в Донецком государственном университете – кафедра теории упругости и вычислительной математики, которую он возглавлял более сорока лет. С 1965 г. А.С. Космодамианский был первым в истории Донецкого государственного университета проректором по научной работе, руководил этим участком работы в течение одиннадцати лет, и за это время молодой университет вошел в число ведущих вузов Советского Союза по показателям научной работы.

Неоспоримой заслугой Александра Сергеевича Космодамианского перед отечественной наукой является создание получившей широкое признание Донецкой школы в области математических методов механики деформируемого твердого тела, исследовательская деятельность которой была ориентирована на ряд новых актуальных научных направлений

в механике сплошных сред.

Первые научные результаты А.С. Космодамианского относились к проблемам изгиба цилиндрически анизотропных круговых арок с одной плоскостью упругой симметрии, проблемам исследования в трехмерной постановке деформирования прямолинейно-анизотропных балок под действием нагрузок, распределенных вдоль ее длины по полиномиальному закону. Была дана оценка применения принципа Сен-Венана в случае сред с высокой степенью механической анизотропии. В пятидесятых годах прошлого столетия на базе оригинального развития концепции применения теории функции комплексных переменных А.С. Космодамианский создал ряд чрезвычайно эффективных методов исследования плоского напряженно-деформированного состояния многосвязных анизотропных и изотропных тел, а также изгиба тонких многосвязных плит. На основе разработанного им универсального метода суперпозиции разложений комплексных потенциалов в локальных координатных системах, связанных с неоднородностями в виде полостей, отверстий, включений, в сочетании с использованием приемов конформного отображения криволинейных контуров на окружность, им и учеными его научной школы были решены и детально исследованы многочисленные задачи научного и прикладного характера о деформировании содержащих отверстия, включения и вырезы деталей строительных конструкций и машин, горных массивов с туннельными сооружениями и выработками; было дано обоснование, обобщение и распространение этого метода на двумерные и пространственные проблемы деформирования многосвязных тел с нелинейными, вязко-упругими, упруго-пластическими свойствами, на проблемы термоупругого, электроупругого и магнитоупругого деформирования сред указанного геометрического строения. Разработаны эффективные модификации метода последовательных приближений для анализа задач механики сплошных сред в многосвязных областях, что позволило свести решение многих сложных граничных задач к последовательности упрощенных краевых задач для канонических односвязных областей. Были выполнены обширные исследования и получены не имеющие аналогов научные результаты в области анализа статических и динамических пространственных задач теории толстых многосвязных анизотропных плит на базе численно-аналитического метода однородных решений. Разработаны методы исследования задач дифракции упругих волн в многосвязных анизотропных телах с цилиндрическими полостями и отверстиями, базирующиеся на новом предложенном аппарате неклассических специальных функций обобщенных комплексных переменных. Совокупность исследований, проведенных А.С. Космодамианским и его учениками в области проблем двумерного напряженно-

деформированного состояния многосвязных сред, определила с начала семидесятых годов минувшего столетия признанное лидерство отечественной научной школы в разработке численно-аналитических методов расчета концентрации механических напряжений в телах с отверстиями, полостями, включениями.

В рамках деятельности научной школы на кафедре теории упругости и вычислительной математики ДонГУ были открыты аспирантура и докторантура, а с 1990 года функционировал специализированный совет ВАК СССР по защитах кандидатских диссертаций. Как уже отмечено выше, с 1983 года одной из традиций научной школы А.С. Космодамианского стало проведение на базе Донецкого государственного университета серии Международных научных конференций «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела», получивших известность и признание в среде ученых-механиков.

Годы становления и активной работы научной школы А.С. Космодамианского явились периодом самого тесного творческого взаимодействия с целым рядом научных школ отечественных механиков, с возглавлявшими их выдающимися учеными. Теснейшие творческие связи поддерживались с исследовательскими коллективами Ростовского и Саратовского государственных университетов, Ленинградского и Тульского политехнических институтов. Целый ряд специалистов кафедры теории упругости и вычислительной математики Донецкого государственного университета проходили плодотворную научную стажировку в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова под руководством известнейших ученых-механиков А.А. Илюшина, В.С. Ленского, Ю.Н. Работнова, Х.А. Рахматуллина.

Самому Александру Сергеевичу принадлежат более 400 научных публикаций, среди которых 20 монографий и учебных пособий. Под его руководством были подготовлены и защищены 6 докторских и 54 кандидатские диссертации. Научная и преподавательская деятельность Александра Сергеевича отмечены целым рядом высоких наград. Среди них – академическая премия им. А.Н. Динника, присвоенное в 2001 г. почетное звание Заслуженного профессора Донецкого национального университета. В 1990 году Александр Сергеевич был избран действительным членом академии наук Украины. В 1989 году за монографию «Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред» отмечен серебряной медалью ВДНХ СССР.

После ухода Александра Сергеевича Космодамианского из жизни в июне 2005 года, в течение последующих двадцати лет созданный им научный коллектив, несмотря на все сложности этого периода, предпринял все возможное для сохранения и дальнейшего развития научной школы,

обеспечения высокого уровня проводимых исследований, расширения и актуализации их тематики. Исследования последнего десятилетия были поддержаны конкурсами фундаментальных научных работ Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики, а с апреля 2023 – конкурсным научным проектом, выполняемым по государственному заказу Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Неоценимая поддержка во многих вопросах сохранения и создания условий для дальнейшего развития исследовательского потенциала ученых-механиков ДонГУ в эти годы была оказана коллегами Южного Федерального университета и Донского государственного технического университета, Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Воронежского государственного университета, Воронежского государственного технического университета, и, в первую очередь, – учеными кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Ованесовича Ватульяна.

Сегодня ведущими направлениями исследований ученых Донецкой научной школы в области механики деформируемого твердого тела являются проблемы исследования моделей термоупругого, электроупругого, магнитоупругого, термоэлектромагнитоупругого деформирования многосвязных анизотропных пластин с отверстиями, выемками и трещинами, учета вязкоупругих свойств анизотропных материалов в этих моделях; проблемы исследования моделей упругого состояния и ползучести анизотропных пород разрабатываемых горных массивов с системами туннельных полостей-выработок; проблемы волновой механики анизотропных функционально-градиентных упругих и электроупругих тел, и создаваемых с применением аддитивных технологий элементов конструкций с многофакторной физико-механической неоднородностью; проблемы исследования свойств упругих волноводов с усложненной геометрией и физико-механическими свойствами; вопросы исследования моделей гидроакустического экранирования с применением анизотропных функционально-градиентных материалов; проблемы исследования эффектов параметрической неопределенности в моделях деформирования материалов и конструкций с применением методов теории нечетких множеств, и ряд других направлений.

В перечисленных исследовательских направлениях учеными научной школы академика А.С. Космодамианского получен ряд приоритетных новых научных результатов признанного уровня. За последние два года на кафедре теории упругости и вычислительной математики Донецкого государственного университета защищены одна докторская и две канди-

датских диссертации. В рамках деятельности научной школы академика Александра Сергеевича Космодамианского продолжается издание научного журнала «Журнал теоретической и прикладной механики», включенного в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ с категорией К2; открыт созданный на базе Донецкого государственного университета совет по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, на соискание ученой степени кандидата наук по специальности 1.1.8 Механика деформируемого твердого тела.

Ученые-механики Донецкого государственного университета, выражают надежду, что возобновление практики проведения Международных научных конференций «Актуальные математические проблемы механики деформируемого твердого тела» станет еще одним важным импульсом в расширении научных контактов со специалистами широкого круга научных школ России, будет способствовать возрождению и дальнейшему наращиванию исследовательского потенциала научной школы академика Александра Сергеевича Космодамианского.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗОНЫ ПРИЛЕГАНИЯ ВОКРУГ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С РАЗРЕЗАМИ

Авдюшина Е.В., канд. физ.-мат. наук, доц.
Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ
elena.v.a.2023@mail.ru

Введение. В горнодобывающей промышленности при разработке месторождений на значительных глубинах широко применяются долговременные горизонтальные подземные выработки сводчатого сечения. При этом возникает необходимость оценки концентрации напряжений и определения зон выпучивания горных пород, что требует решения задач теории упругости. Также представляет интерес изучение влияния выработки на зону прилегания, что особенно важно при большой густоте разработки. Наиболее достоверные результаты по концентрации напряжений в таких задачах дает использование для их решения комплексных потенциалов. Здесь с их использованием приводится решение задачи для горной выработки произвольного сечения с разгрузочными щелями.

Постановка и метод решения задачи. Если массив пород находится под действием горного давления, то напряженное его состояние вдали от дневной поверхности можно представить усилиями [1]

$$\sigma_x^\infty = -\lambda\gamma H, \quad \sigma_y^\infty = -\gamma H, \quad \tau_{xy}^\infty = 0, \quad (1)$$

где $\gamma = \rho g$ – средний удельный вес горной породы; ρ – ее плотность; g – ускорение свободного падения; H – глубина проведения выработки; λ – коэффициент бокового распора. Тогда определение напряженного состояния такого массива можно сводить к нахождению из соответствующих граничных условий функций $\Phi'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$, где μ_k – корни известного характеристического уравнения, для случая произвольной многосвязной области, ограниченной произвольными эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и полуосями a_l, b_l , задаваемыми уравнениями

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

где $x_l = a_l \cos \theta$, $y_l = b_l \sin \theta$; θ – параметр параметрического задания эллипса в локальной системе координат; x_{0l}, y_{0l} – координаты центра эллипса L_l в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и Ox_l , отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

Для многосвязной области комплексные потенциалы имеют вид [2]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \zeta_{kl}^{-n}, \quad (3)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из условий (1); ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} , соответствующих L_l , при указанных аффинных преобразованиях

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (4)$$

в которых

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2, \\ m_{kl} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2R_{kl}; \end{aligned} \quad (5)$$

Граничным условия на контурах отверстий будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов, выбирая на каждом из контуров L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($m = \overline{1, M_p}$). В результате получим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений, после решения которой методом сингулярных разложений комплексные потенциалы (3) будем известны и можно определять основные и нормальные напряжения.

Поле напряжений в зоне прилегания выработки целесообразно определять через упругий потенциал

$$V = \frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^2 + a_{12} \sigma_x \sigma_y + a_{16} \sigma_x \tau_{xy} + \frac{1}{2} a_{22} \sigma_y^2 + a_{26} \sigma_y \tau_{xy} + \frac{1}{2} a_{66} \tau_{xy}^2. \quad (6)$$

Описание результатов численных исследований.

Для различных горных пород были проведены исследования изменения упругого потенциала V . В качестве размеров сторон и крышки свода был взят общепринятый в горном деле вариант, когда длины боковых сторон L_1 и L_3 равны $2r$ (полуоси $a_1 = a_3 = r$), длина основания выработки L_2 равна $5r$ (полуось $a_2 = 2,5r$),

высота крышки L_4 равна $2r$ (полуоси $a_4 = 2,5r$, $b_4 = 2r$), где r – масштабная единица длины. Представленные на рис. 1 границу криволинейного отверстия можно представлять совокупностью 4 частей – внешними

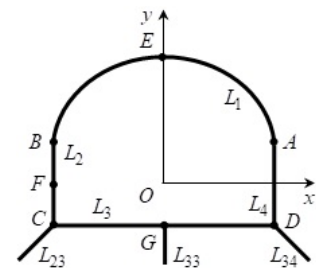


Рис. 1

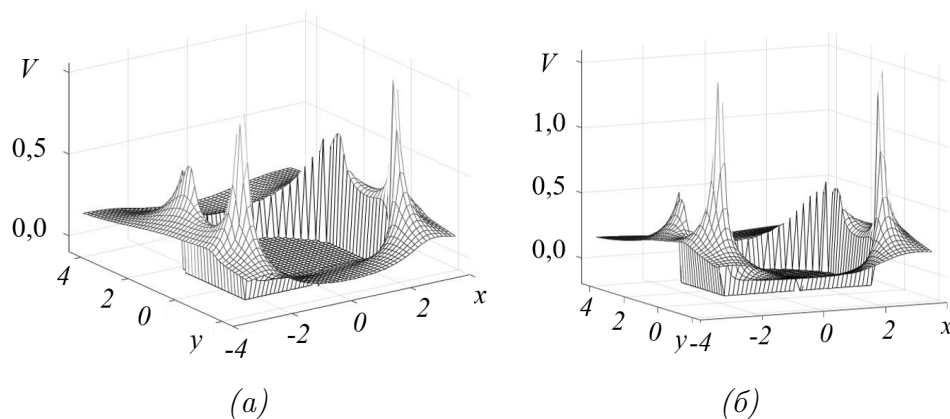


Рис. 2

берегами трещин L_1 , L_2 , L_3 и внешней половиной контура эллипса L_4 , разгрузочные щели – эллиптическими отверстиями, когда одна из осей принимает близкие к нулю значения.

На рис. 2а и 2б представлены поверхности уровня для упругого потенциала в случае сводчатого отверстия в массиве из трансверсально-изотропного алевролита (М1) и изотропного гранита (М2) соответственно [1]. Из проведенных исследований и рис. 2 следует, что значения упругого потенциала V около поверхности выработки вблизи угловых точек C и D в 2 раза уменьшается при проведении разгрузочных щелей. Также значения V больше для изотропного материала. Исследованием установлено, что влияние выработки распространяется на расстояние в 1,5 раза больше размеров выработки, при этом размер зоны влияния выработки меньше в верхней части, соответствующей крышке свода.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

1. Управление напряженным состоянием породного массива и устойчивостью горных выработок / В.А. Полухин, С.А. Калоеров, Ю.Б. Грядущий, Е.С. Горянская. – Донецк: Юго-Восток, 2002. – 304 с.
2. Калоеров С.А. Исследование напряженного состояния горного массива с горизонтальной выработкой криволинейного сечения и разгрузочными щелями обобщенным методом наименьших квадратов / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2024. – № 1 (86). – С. 61–72. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-1-61-72.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ ЕГО УПРУГИХ СВОЙСТВ

Айзикович С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.,

Панфилов И.А., канд. физ.-мат. наук, доц.,

Лопина П.А., канд. физ.-мат. наук

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, РФ

saizikovich@gmail.com, mechanic_rgu@mail.ru, polina_azarova86@mail.ru

Контактная задача о кручении однородного упругого полупространства круглым штампом в динамической постановке впервые была сформулирована и решена Рейснером и Сагочи [1]. В работе Снеддона [2], используя технику интегральных преобразований, задача сведена к решению интегрального уравнения. В 70-х годах прошлого века Грилицим В.Д. [3] было построено решение для изотропной двухслойной среды и ортотропного упругого слоя в виде ряда по отрицательным степеням параметра, являющегося отношением толщины первого слоя к радиусу штампа, эффективное для относительно малого радиуса штампа по сравнению с толщиной слоя.

Кассир [4] построил решение задачи кручения неоднородного изотропного полупространства для степенного закона изменения модуля сдвига по глубине. Решение задачи для изотропного полупространства с неоднородным покрытием при произвольном законе изменения модуля сдвига по глубине покрытия получено Айзиковичем С.М. [5].

Задача активно изучается по настоящее время, в частности, Вонг использовал кусочно-линейную аппроксимацию трансформанты ядра для сведения задачи к решению интегрального уравнения [6].

В настоящей работе на примере модельной контактной задачи кручения круговым штампом полупространства анализируется влияние нелинейности упругих свойств полупространства на распределение контактных давлений под штампом и отдельно учет влияния на распределение контактных давлений под штампом приповерхностного неоднородного покрытия. В качестве модели нелинейности используется билинейная модель пластичности.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в рамках гранта РНФ 22-19-00732-П.

1. *Reissner E.* Forced torsional oscillations of an elastic half-space / E. Reissner, H.F. Sagoci // J. Appl. Phys. – 1944. – Vol. 15. – P. 652–654.
2. *Sneddon I.N.* The Reissner–Sagoci problem / I.N. Sneddon // Proc. Glasgow Math. Assoc. – 1966. – Vol. 7. – P. 136–144.

3. *Грилицкий Д.В.* Кручение двухслойной упругой среды / Д.В. Грилицкий // Прикладная механика. – 1961. – Т. 7, вып. 1. – С. 89–94.
4. *Kassir M.K.* The Reissner-Sagoci problem for a non-homogeneous solid / M.K. Kassir // Int. J. Eng. Sci. – 1970. – Vol. 8. – P. 875–885.
5. *Айзикович С.М.* Кручение круглым штампом неоднородного полупространства // Расчет оболочек и пластин. – Ростов-на-Дону: РИСИ. – 1978. – С. 156–169.
6. *Liu T.-J.* Reissner-Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties / T.-J. Liu, Y.-Sh. Wang // Mech. Res. Commun. – 2009. – Vol. 36. – P. 322–329.

УДК 539.37

УРАВНЕНИЕ СОВМЕСТИМОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ГЕНКИ В ЗАДАЧЕ О НАГРУЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Андреанов И.К., канд. техн. наук, доц.
Комсомольский-на-Амуре государственный университет,
г. Комсомольск-на-Амуре, РФ
ivan_andrianov_90@mail.ru

В современном производстве достаточно часто встречаются осесимметричные оболочки и оболочки с центральной симметрией, испытывающие воздействие внутреннего или внешнего давлений [1, 2]. Особый интерес вызывает нагружение элементов в форме толстостенных сферических оболочек внешним равномерным давлением. Прежде всего, такими элементами являются корпуса глубоководных аппаратов по типу батисфер [3, 4], находящихся под воздействием гидростатического давления. На сегодняшний день достаточно хорошо исследованы вопросы деформирования толстостенных оболочек в пределах упругих деформаций, а также в стадии пластического деформирования для моделей материала без упрочнения или с линейным упрочнением [5]. Однако особые математические трудности вызывают задачи упругопластического деформирования оболочек в условиях нелинейного закона упрочнения, поскольку, как правило, такие задачи не имеют аналитического решения и требуют разработки численных процедур. В связи с этим требовалось рассмотреть постановку задачи об упругопластическом деформировании толстостенной сферической оболочки под внешним давлением сжатия с учетом несжимаемости материала.

Математическая постановка задачи упругопластического деформирования толстостенной сферической оболочки внешним давлением включает в себя положения теории упругости и деформационной теории пластичности. Для построения численного решения такой задачи предлага-

ется использовать метод переменных параметров упругости, где в качестве меры больших нелинейных деформаций используется деформация Генки. Предлагаемый для решения численный подход требует решения серий обратных задач, в рамках которых на каждой итерации смещается свободная внутренняя граница оболочки. Для реализации такого численного подхода требовалось вывести интегральное уравнение совместности деформаций в напряжениях.

В результате, было получено интегральное уравнение совместности деформаций Генки в напряжениях для задачи о нагружении толстостенной сферической оболочки внешним равномерным давлением сжатия:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\rho\rho} + \frac{1}{2}E^* \ln \left(-\rho \int_r^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left(\frac{2(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho})}{E^*} \right) d\rho + \frac{\rho}{r_0} \right), \quad (1)$$

где $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\rho\rho}$ – окружные, радиальные напряжения, E^* – переменный параметр упругости, ρ – радиальная координата, r_0 , r – начальный, текущий внутренний радиусы оболочки.

Полученное уравнение (1) совместно с уравнениями равновесия, физическими и геометрическими соотношениями позволит провести расчет методом переменных параметров упругости напряженно-деформированного состояния толстостенной сферической оболочки, нагруженной внешним давлением сжатия, при учете нелинейного закона упрочнения и несжимаемости материала.

Информация о финансовой поддержке. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-79-10135, <https://rscf.ru/project/25-79-10135/>.

1. *Andrianov I.K.* Bearing capacity of spherical thick-walled shell taking into account compressibility and nonlinear plasticity / I.K. Andrianov, S.I. Feoktistov // Mater. Phys. Mech. – 2022. – Vol. 50, No. 3. – P. 410–419. – DOI 10.18149/MPM.5032022_5. – EDN: LEWGQK.
2. *Андреанов И.К.* Обратная задача упругопластического деформирования свободной толстостенной цилиндрической оболочки с учетом нелинейного закона упрочнения / И.К. Андрианов, С.И. Феоктистов // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 3. – С. 259–269. – DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-259-269. – EDN SYNXOC.
3. *Филимонов Б.П.* Батисфера К.Э. Циолковского в истории автономных глубоководных аппаратов / Б.П. Филимонов // К.Э. Циолковский и этапы развития космонавтики : матер. 50-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского, Калуга, 15-17 сентября 2015 года / Отв. за выпуск: Н.А. Абакумова, Г.А. Сергеева, Л.Н. Канунова. – Калуга: ИД «Эйдос», 2015. – С. 86–87. – EDN: UIDNEB.
4. *Богданов А.С.* Развитие корабельных устройств глубоководных технических средств / А.С. Богданов // Судостроение. – 2019. – № 3 (844). – С. 17–21. – EDN: RDLMWA.

5. Андрианов И.К. Упругопластическое деформирование толстостенных осесимметричных оболочек под действием внутреннего давления с учетом нелинейной пластичности и сжимаемости материала / И.К. Андрианов. – Комсомольск-на-Амуре: КнАГУ, 2023. – 92 с. – ISBN 978-5-7765-1555-2. – DOI: 10.17084/978-5-7765-1555-2-2023.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ БАЛОК, СОПРЯЖЕННЫХ ПОД УГЛОМ

Бауэр С.М., д-р физ.-мат. наук, проф., **Дорофеев Н.П.**,

Нестерчук Г.А., канд. физ.-мат. наук,

Смирнов А.Л., канд. физ.-мат. наук, доц.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, РФ

s_bauer@mail.ru

Исследуются низкочастотные изгибные колебания конструкции, состоящей из двух балок, соединенных под углом, другие концы которых жёстко заделаны. Подобные элементы конструкций часто встречаются в различных инженерных сооружениях, и исследование их динамического поведения представляет интерес. Изучению поведения таких элементов посвящен ряд работ [1–5]. При этом наибольшее внимание уделяется, как правило, рамам, в которых балки соединены под прямым углом [2, 3] или последовательно [4]. Случай малого угла сопряжения позволяет выявить особенности динамического поведения конструкции.

Рассматриваются два стержня длиной l_1 и l_2 , жестко соединенные под углом β , а именно так, что угол сочленения между касательными к осевым линиям балок в точке контакта сохраняется в процессе деформации. Предполагается, что балки выполнены из одного материала и имеют одинаковое поперечное сечение (рис. 1).

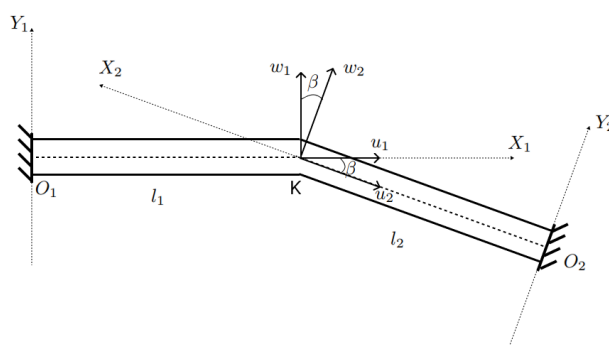


Рис. 1. К постановке задачи

Уравнения изгибных колебаний стержней описываются уравнениями

$$\frac{d^4 w_i}{dx_i^4} - k^4 w_i = 0, \quad k^4 = \frac{\rho S}{EJ} \omega^2, \quad (1)$$

где w_i – прогиб i -ого стержня, E – модуль упругости, ρ – плотность материала, S – площадь, а J – момент инерции сечения стержней. Координаты x_i отсчитываются от жестко закрепленного конца i -ого стержня.

В такой системе координат решение уравнения (1) для каждого стержня является линейной комбинацией двух функций Крылова, а четыре условия в точке соединения стержней позволяют построить характеристическое уравнение, из которого определяются частоты и формы собственных изгибных колебаний. Задача решалась аналитически и численно с использованием конечно-элементного пакета Comsol.

На рис. 2 представлена зависимость первых четырех собственных частот колебаний от угла сочленения стержней для разных отношений длин стержней ($l_1=l_2$, $l_2 = 2l_1$, $l_2 = 3l_1$).

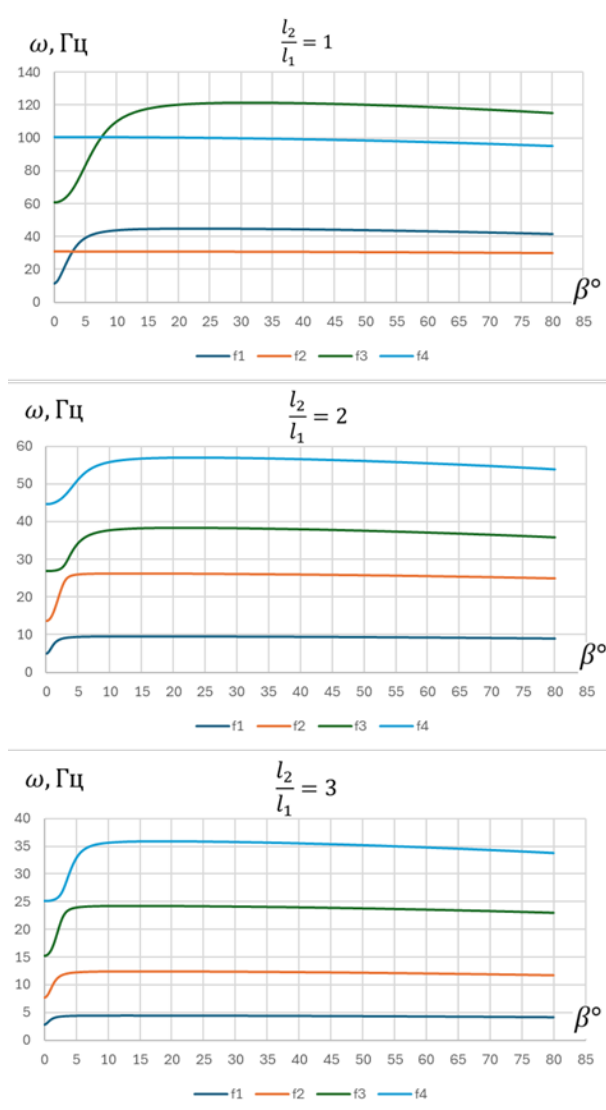


Рис. 2. Первые четыре частоты собственных колебаний конструкции в зависимости от угла сочленения β

Как и следовало ожидать, для любого отношения длин стержней при $\beta = 0$ первая собственная частота конструкции совпадает с первой ча-

стотой стержня длиной $l_1 + l_2$. При увеличении угла сочленения первая частота конструкции быстро увеличивается, выходя на предельное значение.

Можно отметить, что при $\beta = \pi/2$ каждая из балок совершает связанные изгибные и осевые колебания, где связь возникает из-за граничных условий на их стыках [3, 5].

На рис. 3 представлена первая форма собственных колебаний стержня для малых значений угла β .

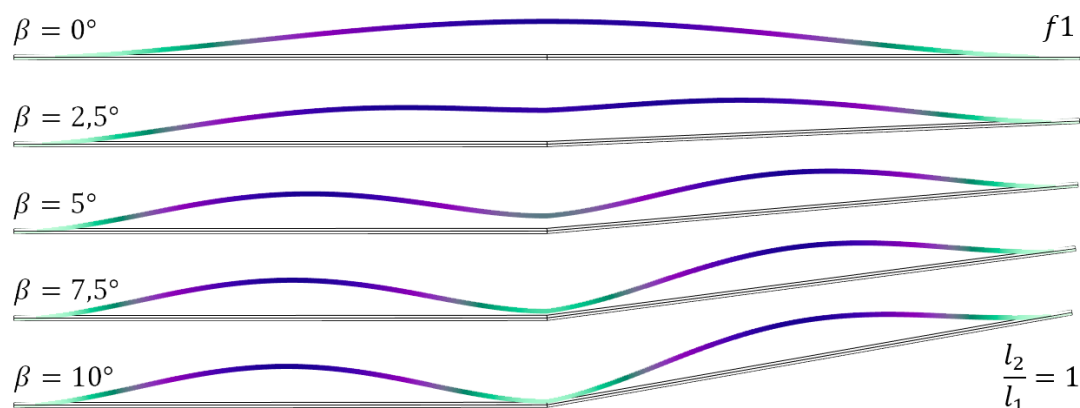


Рис. 3. Первая форма собственных колебаний конструкции при разных углах β

Видно, что для случая $l_1 = l_2$ уже при $\beta = 10^\circ$ первая форма колебаний конструкции переходит в первую форму составляющих стержней.

Информация о финансовой поддержке. Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 116636233).

1. Pengxin T. Wave-based in-plane vibration analysis of multiple coupled beam structures with arbitrary connection angle and elastic boundary restraints / T. Pengxin, L. Yang, D. Jingtao, L. Zhigang // J. Vib. Control, 2022. – 20 p. – DOI: 10.1177/10775463221133430.
2. Ratazzi A.R. Free Vibrations of Beam System Structures with Elastic Boundary Conditions and an Internal Elastic Hinge / A.R. Ratazzi, D.V. Bambill, C.A. Rossit // Chin. J. Eng. – 2013. – Article ID 624658. – 10 p. – DOI: 10.1155/2013/624658.
3. Albarracín C.M. Vibrations of elastically restrained frames / C.M. Albarracín, R.O. Grossi // J. Sound Vib. – 2005. – Vol. 285. – P. 467–476. – URL: www.elsevier.com/locate/jsvi.
4. Quintana V. Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beams / V. Quintana, R. Grossi // Proc. Inst. Mech. Eng., Part K: J. Multi-body Dyn. – 2010. – Vol. 223. – P. 1–10. – DOI: 10.1243/14644193JMBD189.
5. Obradović A. Free vibrations of planar serial frame structures in the case of axially functionally graded / A. Obradović, S. Šalinić, A. Tomović // Theoret. Appl. Mech. – 2020. – Issue 2. – P. 221–239. – DOI: 10.2298/TAM201006017O.

КОЛЛЕКТИВНОЕ ИНДЕНТИРОВАНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ СИСТЕМОЙ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ

Бобылев А.А., канд. физ.-мат. наук, доц.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, РФ

abobylov@gmail.com

Одним из распространенных способов идентификации свойств твердых тел является метод индентирования. Первичным источником информации о материале при индентировании, как правило, является непрерывно регистрируемая зависимость величины смещения индентора и величины приложенной нормальной нагрузки. Альтернативный подход состоит в использовании тактильных датчиков усилий, позволяющих сформировать тактильный образ, состоящий из множества элементов, называемых такселями, и отвечающий распределению силового поля в некоторой области контактного взаимодействия тел. В большинстве известных датчиков усилий силы, возникающие при контакте с объектом, вычисляются путем измерения деформаций или перемещений упругого элемента датчика. При разработке математических моделей датчиков усилий, формирующих тактильный образ, в качестве расчетной схемы (рис. 1) может быть принята система жестких штампов, упруго связанных с общей жесткой платформой.

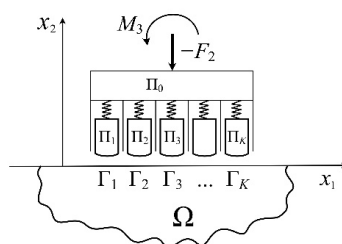


Рис. 1. Расчетная схема

В настоящей работе с использованием оператора Пуанкаре-Стеклова, отображающего на части границы (зоне возможного контакта) нормальные напряжения в нормальные перемещения, получена вариационная формулировка и на ее основе разработан алгоритм численного решения задачи о вдавливании в упругую полуплоскость системы жестких штампов, упруго связанных с общей жесткой платформой. Методом вычислительного эксперимента исследованы некоторые закономерности коллективного индентирования системы упруго связанных жестких штампов. Проведена оценка возможностей использования системы инденторов для механорецепторной тактильной диагностики.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕМБРАННЫХ УСИЛИЙ В ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ, РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ПО ПЛОЩАДИ КРУГА, НА БАЗЕ ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРИИ В ВАРИАНТЕ $\{1, 0\}$ -АППРОКСИМАЦИИ

Бондаренко Н.С., канд. физ.-мат. наук, доц.
Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ
n.bondarenko123@mail.ru

Введение. Композитные материалы, обладающие анизотропией упругих свойств, находят широкое применение в различных областях техники и промышленности. Понимание поведения тонкостенных конструкций, изготовленных из таких материалов и подверженных действию сосредоточенных или локальных силовых воздействий, критически важно при проведении прочностных расчётов конструкций. Также актуальным является использование обобщённых теорий пластин, позволяющих учитывать явления, связанные с поперечными сдвигами и обжатием. В публикации [1] рассматривается задача об изгибе тонкой ортотропной прямоугольной пластины, защемлённой по краям. Решение получено с использованием полиномов Лежандра и Чебышёва 1-го рода.

Целью данного исследования является анализ обобщённых мембранных усилий в ортотропной пластине, подверженной действию локального силового воздействия, распределённого по круговой области.

Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластину толщины $2h$ в безразмерной системе координат x_1, x_2, x_3 , определённой с точностью до полутолщины пластины h .

Пусть в срединной плоскости пластины в области

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$$

действует локальное силовое воздействие интенсивности $W(x_1, x_2) \equiv 1$.

Система уравнений $\{1, 0\}$ -аппроксимации включает в себя [2]:

– соотношения упругости в перемещениях

$$\begin{aligned} N_1 &= B_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right); & N_2 &= B_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right); \\ S_{12} &= B_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \end{aligned} \tag{1}$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad B_2 = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$B_{12} = \frac{2G_{12}}{E}; \quad E = \sqrt{E_1 E_2};$$

где $N_k = N_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$), $S_{12} = S_{12}(x_1, x_2)$ – обобщённые мембранные усилия; $u = u(x_1, x_2)$, $v = v(x_1, x_2)$ – обобщённые перемещения пластины; E_1, E_2 – модули Юнга для направлений x_1, x_2 соответственно; G_{12} – модуль сдвига, характеризующий изменение угла между главными направлениями x_1, x_2 ; ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона ($E_2 \nu_{12} = E_1 \nu_{21}$);
– уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} = -q_1; \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} = -q_2, \quad (2)$$

где $q_k = q_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$) – коэффициенты разложения компонент вектора объёмной силы по полиномам Лежандра. Обобщённые мембранные усилия в (1), (2) определены с точностью до значения Eh .

Методика решения задачи. Решение задач на локальные воздействия с помощью методов фундаментальных решений основано на использовании формулы свёртки [3], которая для указанной выше области Ω (круга радиуса R) и при $W(x_1, x_2) \equiv 1$ примет вид:

$$\mathbf{P}(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 d\theta \int_{-1}^1 f(\rho, \theta) d\rho \quad (3)$$

$$f(\rho, \theta) = \frac{\pi R^2 (\rho + 1)}{4} \mathbf{P}^0 \left(x_1 - \frac{R}{2} (\rho + 1) \cos(\pi(\theta + 1)), \right. \\ \left. x_2 - \frac{R}{2} (\rho + 1) \sin(\pi(\theta + 1)) \right),$$

где $\mathbf{P}(x_1, x_2)$ – искомые компоненты НДС, мембранные усилия; $\mathbf{P}^0$ – фундаментальное решение системы дифференциальных уравнений (1), (2).

Чтобы найти $\mathbf{P}^0$ предположим, что на пластину действует сосредоточенная сила. Поэтому правые части уравнений (2) берём в виде

$$q_k(x_1, x_2) = q_k^* \delta(x_1, x_2); \quad q_k^* = \text{const} \quad (k = 1, 2), \quad (4)$$

где $\delta(x_1, x_2)$ – двумерная дельта-функция Дирака [3].

Мембранные усилия, являющиеся фундаментальным решением системы уравнений (1), (2) с правыми частями (4), построены в работе [4]:

$$N_k = \sum_{j=1}^4 a_{kj} \Phi_j^*(x_1, x_2) \quad (k = 1, 2); \quad S_{12} = \sum_{j=1}^4 a_{3j} \Phi_j^*(x_1, x_2); \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\Phi_1^*(x_1, x_2) &= \sigma_0^2 \left(\frac{\sigma_1 x_1}{r_1^2} - \frac{\sigma_2 x_1}{r_2^2} \right); & \Phi_2^*(x_1, x_2) &= \sigma_0^2 \left(\frac{\sigma_2^3 x_1}{r_2^2} - \frac{\sigma_1^3 x_1}{r_1^2} \right); \\ \Phi_3^*(x_1, x_2) &= \sigma_0^2 \left(\frac{\sigma_2 x_2}{r_2^2} - \frac{\sigma_1 x_2}{r_1^2} \right); & \Phi_4^*(x_1, x_2) &= \sigma_0^2 \left(\frac{x_2}{\sigma_1 r_1^2} - \frac{x_2}{\sigma_2 r_2^2} \right); \\ r_k^2 &= \sigma_k^2 x_1^2 + x_2^2 \quad (k = 1, 2),\end{aligned}$$

где a_{kj} , σ_j зависят от упругих постоянных ортотропного материала и q_k^* .

Анализ результатов численных исследований. Проведены численные исследования влияния упругих констант ортотропного материала пластины на мембранные усилия (5), к которым была применена формула свёртки (3). Графики мембранных усилий на рис. 1 построены вдоль оси x_2 при $x_1 = 0$. Значения коэффициентов в формулах (4) брались такими: $q_1^* = q_2^* = 1$. Для кривых 1 радиус круга $R = 1$, для кривых 2 – $R = 2$, для кривых 3 – $R = 3$. В качестве ортотропных материалов пластины взяты материал М1 (сплошные кривые на рис. 1) и М2 (пунктирные кривые), механические характеристики которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Данные для ортотропных материалов

Материал	Обозначение	ν_{12}	ν_{21}	E_1 , МН/м ²	G_{12} , МН/м ²
стеклопластик С1-19-55	М1	0,161	0,128	$2,50 \cdot 10^4$	$4,30 \cdot 10^3$
стеклопластик С1-10-65	М2	0,170	0,122	$3,25 \cdot 10^4$	$6,10 \cdot 10^3$

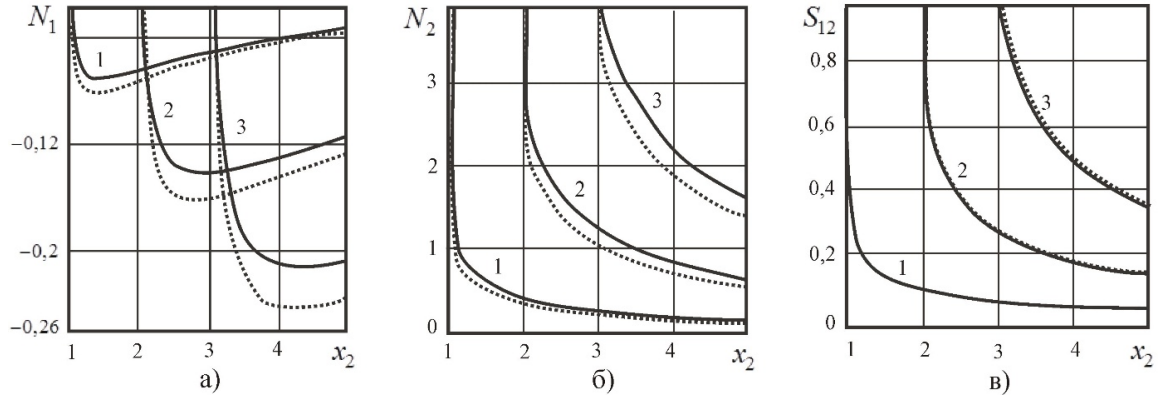


Рис. 1. Мембранные усилия в окрестности области действия локального силового воздействия (круга): а – N_1 ; б – N_2 ; в – S_{12}

Закключение. Из рис. 1 видно, что механические характеристики ортотропных материалов оказывают существенное влияние на значения мембранных усилий N_1 и N_2 (вплоть до 15%), тогда как их влияние на внутренний силовой фактор S_{12} является наименьшим.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400353-3).

1. *Germider O. V.* On Calculation of Bending of a Thin Orthotropic Plate Using Legendre and Chebyshev Polynomials of the First Kind / O.V. Germider, V.N. Popov // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2024. – Vol. 17, No. 5. – P. 586–598. – EDN: JSPTAR.
2. *Пелех Б.Л.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
4. *Бондаренко Н.С.* Определение обобщённых усилий в ортотропной пластине в рамках $\{m, n\}$ -аппроксимации при действии сосредоточенной силы, вызывающей безмоментное напряжённое состояние / Н.С. Бондаренко // Донецкие чтения 2022: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности : матер. VII Междунар. науч. конф., посвящ. 85-летию Донец. нац. ун-та (Донецк, 27–28 октября 2022 г.). – Т. 1: Мех.-мат., компьютерные науки, упр. – С. 44–46.

УДК 539.215+624.131

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ С УЧЁТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

Быкова М.И.¹, канд. физ.-мат. наук, доц.,

Шашкин А.И.¹, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Шашкина С.А.², канд. физ.-мат. наук

¹Воронежский государственный университет, г. Воронеж, РФ

²Военно-воздушная академия имени проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,
г. Воронеж, РФ

soffia-alex@inbox.ru, bykova_mi@amm.vsu.ru

1. Цилиндрический сдвиг кольца. Рассмотрим упругое кольцо внешнего радиуса R^+ , внутреннего радиуса R^- и толщиной $H = R^+ - R^-$. Положим внутреннюю границу кольца закрепленной, а внешней границе R^+ зададим перемещение U_0 .

Деформированное состояние кольца определяется сдвиговой компонентой тензора деформаций $\varepsilon_{r\phi}$, которая с учетом характерного размера h микроструктуры имеет вид [1, 2]

$$\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right) + \frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3U}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{dU}{dr} + 3 \frac{U}{r^3} \right), \quad (1)$$

где $U = U(r)$ - вращательное перемещение элемента упругого кольца.

Уравнение равновесия в перемещениях для $U(r)$ получим, используя (1) закон Гука и уравнение равновесия в проекции на окружное направление,

$$\frac{h^2}{3} U''' + \left(1 - \frac{h^2}{r^2} \right) U' - \left(1 - \frac{h^2}{r^2} \right) \frac{U}{r} = \frac{c}{\mu r^2}. \quad (2)$$

В отличие от классического уравнения равновесия для упругого материала без учета микроструктуры, то есть при $h = 0$, дифференциальное уравнение (2) имеет более высокий, третий, порядок, и является сингулярно возмущенным за счет малого параметра h при старшей производной [2].

В безразмерном виде задача (2) с граничными условиями в перемещениях и условиями сопряжения внешнего и внутреннего распределения перемещения $U(r)$ имеет вид [3]

$$\frac{\bar{h}^2}{3}\bar{U}''' + \left(1 - \frac{\bar{h}^2}{\bar{r}^2}\right)\bar{U}' - \left(1 - \frac{\bar{h}^2}{\bar{r}^2}\right)\frac{\bar{U}}{\bar{r}} = \frac{c_1}{r^2}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(1) &= 0, \quad 3\bar{U}''(1) + \bar{h}\bar{U}'''(1) = 0, \\ \bar{U}(1 + \bar{H}) &= 1, \quad 3\bar{U}''(1 + \bar{H}) + \bar{h}\bar{U}'''(1 + \bar{H}) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $\bar{U} = \frac{U}{U_0}$; $\bar{H} = \frac{R^+ - R^-}{R^-}$; $\bar{h} = \frac{h}{R^-}$; $\bar{r} = \frac{r}{R^-}$.

Уравнение (3) для перемещения $U(r)$ представляет собой дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами, для которого определены граничные условия (4). Аналитически его решить не представляется возможным, поэтому был применён численный метод. Для нахождения численного решения уравнения (3) без учета микроструктуры, в нём не следует учитывать слагаемые, содержащие характерный размер микроструктуры ($h \rightarrow 0$). На рис. 1 представлено поведение окружного перемещения $\bar{U}$ в цилиндрическом слое, которое соответствует классическому решению.

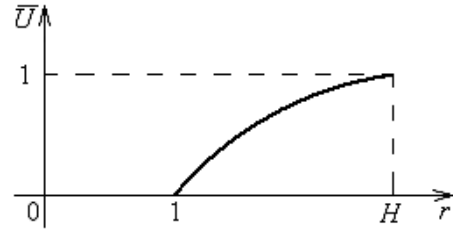


Рис. 1. Качественная картина поведения окружного перемещения в цилиндрическом слое

Приведём результаты ряда численных экспериментов для решения аппроксимированной задачи (3), (4), (рис. 2, 3).

Линия 2 на рис. 2 отражает концентрацию гармонических возмущений (при $h = 0,1$) вблизи внешней границы кольца. Линии 1, 3 отображают точное и численное решения задачи при $h = 0$ (без учета микроструктуры). Численное решение практически неотлично в масштабах данного рисунка. На рис. 3 приведен график перемещений для случая малых h ($h = 0,001$), который отражает факт концентрации перемещения в области границы $r=1+H$ и отсутствия влияния этих граничных условий вглубь кольца.

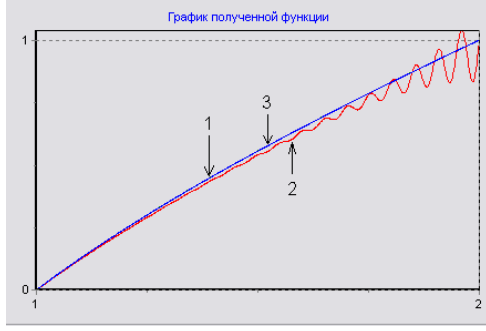


Рис. 2. График точного 1 и численного решения без учёта микроструктуры 3, график численного решения с учетом микроструктуры при $h = 0.1$ 2.



Рис. 3. График численного решения с учётом микроструктуры

2. Сжатие (растяжение) цилиндрического упругого слоя.

Рассмотрим цилиндрический упругий слой внешним радиусом R^+ , внутренним радиусом R^- и толщиной $H = R^+ - R^-$ (рис. 5).

Положим, что на внутреннюю стенку действует давление p_0 , внешняя стенка свободна от нагрузок. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущей задаче, получим уравнение равновесия в перемещениях (5), которое в безразмерном виде с граничными условиями (6) сопряжения внешнего и внутреннего распределения перемещения $U(r)$ имеет вид

$$(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\bar{h}^2}{6} \frac{\partial^4 \bar{U}_r}{\partial \bar{r}^4} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\bar{h}^2}{6\bar{r}} \frac{\partial^3 \bar{U}_r}{\partial \bar{r}^3} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial^2 \bar{U}_r}{\partial \bar{r}^2} + 2\bar{\mu} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{r}} - 2\bar{\mu} \frac{\bar{U}_r}{\bar{r}^2} = 0, \quad (5)$$

$$(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \left(\bar{U}'(1) + \frac{\bar{h}^2}{6} \bar{U}'''(1) \right) = -1, \quad 3\bar{U}''(1) + \bar{h} \bar{U}'''(1) = 0, \quad (6)$$

$$\bar{U}'(1 + \bar{H}) + \frac{\bar{h}^2}{6} \bar{U}'''(1 + \bar{H}) = 0, \quad 3\bar{U}''(1 + \bar{H}) + \bar{h} \bar{U}'''(1 + \bar{H}) = 0.$$

Здесь $\bar{U} = \frac{U}{U_0}$, $\bar{H} = \frac{R^+ - R^-}{R^-}$, $\bar{h} = \frac{h}{R^-}$, $\bar{r} = \frac{r}{R^-}$, $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}$, $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\sigma_0}$, $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\sigma_0}$. Результаты численного решения задачи (5), (6) приведены на рис. 4, 5, 6.

На рис. 4 приведен график перемещений $U(r)$ при сжатии цилиндрического слоя, для случая малых h ($h = 0,001$), который отражает тот факт, что возмущение носит погранслойный характер. На рис. 5 приведен график перемещений $U(r)$ при растяжении цилиндрического слоя, для случая малых h ($h = 0,001$), где также наблюдаются возмущения вблизи пограничного слоя. На рис. 6 приведен график численного решения задачи без учета микроструктуры (т.е. при $h = 0$) при сжатии.

Приведённый подход позволяет рассчитывать как задачи классической теории упругости, так и учитывать влияние микроструктуры.

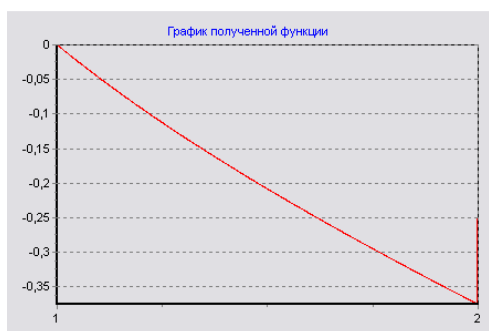


Рис. 4. График численного решения с учетом микроструктуры (сжатие)

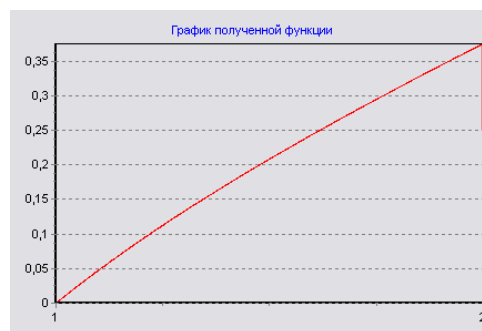


Рис. 5. График численного решения с учетом микроструктуры (растяжение)

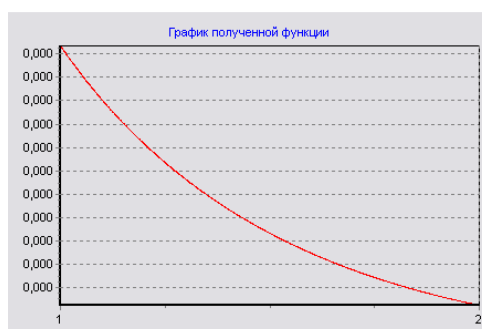


Рис. 6. График численного решения без учета микроструктуры

1. *Шашкина С.А.* Формулировка задачи теории упругости для материалов с микроструктурой / С.А. Шашкина // Математ. модели и операторные уравнения. – Воронеж: ВГУ, 2005. – Т. 3. – С. 81–86.
2. *Вервейко Н.Д.* Влияние микроструктуры материала на его деформирование и течение / Н.Д. Вервейко, А.А. Воронков, М.И. Быкова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика и математика. – 2005. – № 2. – С. 111–118.
3. *Быкова М.И.* Влияние микроструктуры материала на сдвиговую деформацию кольца / М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко, С.А. Шашкина // Авиакосмические технологии «АКТ-2006»: Тр. седьмой междунар. науч.-техн. конф. (Воронеж, 13–15 сентября 2006 г.). – Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2006. – С. 400–403.

УДК 539.371

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ СПЛАВА SiGe В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКЕ

Бычков А.А., канд. физ.-мат. наук, доц.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, РФ
az710@yandex.ru

Известны следующие механизмы релаксации напряжения в полупроводниковой пленке при малой деформации несоответствия: образование волнистости на первоначально плоской свободной поверхности пленки (неустойчивость Азаро-Тиллера-Гринфельда) [1]; зарождение дислокаций несоответствия на границе раздела пленка-подложка; перераспре-

деление атомов и вблизи волнистой поверхности пленки за счет уменьшения упругой энергии в напыленной на подложку полупроводниковой пленке [2]; уменьшение поверхностной энергии пленки при увеличении ее толщины; образование на поверхности пленки наноразмерных изолированных островков (режим роста Странского-Крастанова) [3]; за счет образования двойников несоответствия.

В данной работе приведены результаты расчетов, продолжающие исследование [4, 5] для полупроводниковой пленки с учетом перечисленных факторов для различных значений параметров пленки и островков.

Исследуются модели *SiGe* пирамидальных островков на смачивающем слое и полупроводниковой *SiGe/Si* пленки. Отношение высоты пирамидальных островков к длине стороны основания равно 0, 1, островков в форме усеченной пирамиды – 0, 2. Свободная поверхность пленки: $z = h(x, y) = h_0 + h_1(x, y)$ – двумерная циклоида с длиной волны $\lambda = 2\pi a$ вдоль осей Ox и Oy , в параметрической форме (t_1, t_2 – параметры) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= at_1 - d \sin t_1, \\ y &= at_2 - d \sin t_2, \\ z &= h_0 - d^2/a - d(\cos t_1 + \cos t_2), \end{aligned} \quad (1)$$

d – ширина пленки ($d = 400$ нм).

Учитывается постоянство объема образца

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1(t_1, t_2) \frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} dt_1 dt_2 = 0.$$

Приращение свободной энергии поверхности пленки за счет возмущения имеет вид [1]

$$\Delta F = \int_{\Gamma_N} \gamma dS + \int_{\Omega} w dV - \gamma_0 S_0 - W_0, \quad (2)$$

где $\gamma = c\gamma_{Ge} + (1 - c)\gamma_{Si}$ – удельная поверхностная энергия, γ_{Ge} и γ_{Si} – удельная поверхностная энергия соответственно для *Ge* и *Si*, $c = c(x, y, z)$ – доля *Ge* в сплаве, Γ_N – свободная граница, Ω – область занятая телом, $w = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}/2$ – плотность упругой энергии на поверхности пленки, γ_0 – удельная поверхностная энергия невозмущенной пленки, S_0 – площадь свободной поверхности невозмущенной пленки, W_0 – упругая энергия невозмущенной пленки. Условие неустойчивости плоской поверхности пленки $\Delta F \leq 0$.

Для определения напряжений решалась упругая задача

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0, & \Omega, \\ u_i &= 0, & \Gamma_D, \\ \sigma_{ij}n_j &= 0, & \Gamma_N\end{aligned}\tag{3}$$

где Γ_D – граница пленка-подложка, $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ – граница тела. Закон Гука $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*)$, где $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_m c(x, y, z)\delta_{ij}$ – деформация несоответствия [3], $\varepsilon = 0, 04$.

Для вычисления распределения упругих деформаций в образцах использовался метод конечных элементов. Циклоида, аналогично [5], представлялась рядом Фурье. Упругие перемещения не учитывались в силу их сравнительной малости. Подложка полагалась недеформируемой.

Неоднородность распределения атомов Ge , согласно [3]:

$$\Delta c = \frac{1}{3\varepsilon_m} (Tr \varepsilon - \overline{Tr \varepsilon}) + (\bar{c} - c),\tag{4}$$

где $\overline{Tr \varepsilon} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} Tr \varepsilon dV$ – средняя деформация дилатации, $\bar{c} = c_{cp}$ – средняя доля атомов Ge , $\frac{1}{V} \int_{\Omega} \Delta c(x, y, z) dV = 0$.

Расчет $c = c(x, y, z)$ соответствующего минимальной упругой энергии W выполнялся по итерационной формуле

$$c_{i+1,j} = c_{i,j} + \Gamma \left[\frac{1}{3\varepsilon_0} (Tr \varepsilon_i - \overline{Tr \varepsilon_i}) - (\bar{c} - c_{i,j}) \right],$$

где $c_{i,0} = c_i$, Γ – параметр ($\Gamma \leq 10^{-2}$), $c_{i,j}$ при $j \rightarrow \infty$ сходится к некоторому $c_{i,\infty} = c_{i+1}$:

$$\frac{1}{3\varepsilon_0} (Tr \varepsilon_i - \overline{Tr \varepsilon_i}) - (\bar{c} - c_{i,\infty}) = 0.\tag{5}$$

Учитывалось условие $0 \leq c(x, y, z) \leq 1$.

Из полученных результатов видно, что атомы Ge концентрируются на выступах возмущенной поверхности пленки и в вершинах островков (рис. 1). При этом, учет перераспределения компонент пленки приводит к повышению поверхностной энергии образца, в то время как упругая энергия образца принимает меньшие значения.

Проведенные расчёты показали, что учет неоднородного распределения Ge в образцах пленки и островков значительно меняет критический размер островка в меньшую сторону. Этот эффект усиливается при уменьшении доли Ge в сплаве.

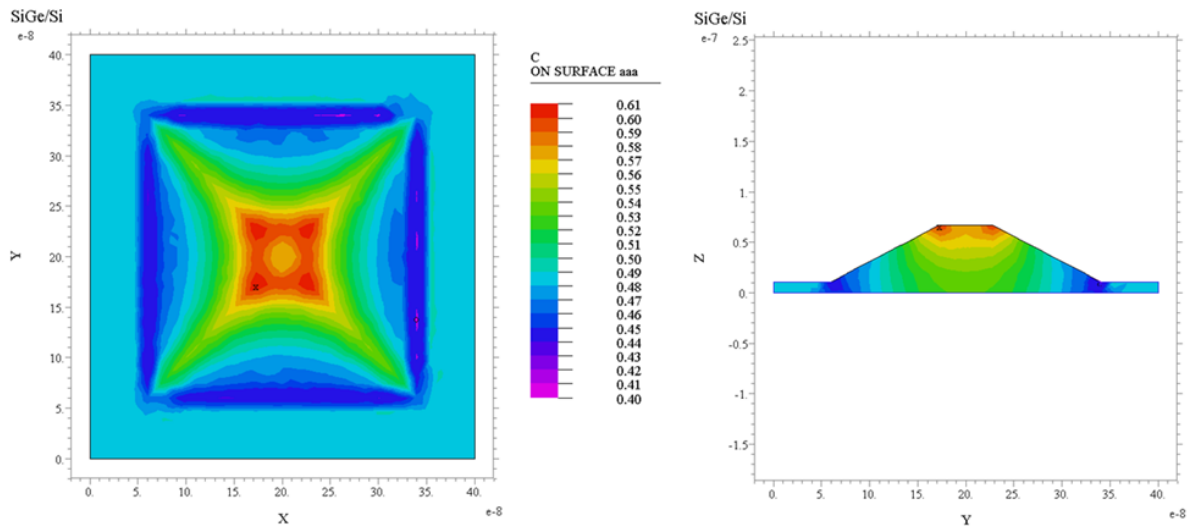


Рис. 1. Распределение Ge в сплаве $SiGe$ в островке в форме усеченной пирамиды ($c_{cp} = 0,5$)

Обнаружена зависимость изменения концентрации от амплитуды возмущения пленки. При увеличении амплитуды возмущения неоднородность Δc растет. Аналогичный эффект наблюдается при росте островков. Для более высоких островков, на поздних стадиях роста, значение Δc увеличивается. Сравнение полученных результатов с расчетом, не учитывающим механизм механо-dиффузии, показывает существенную релаксацию упругой энергии в пленке, что согласуется с результатом [2], полученным для плоской задачи.

Согласно проведенным расчетам, перераспределение Ge обеспечивает релаксацию упругой энергии в сплаве, а атомы Ge концентрируются на выступах возмущенной поверхности пленки и в вершинах островков. Учет неоднородности распределения Ge в образцах оказывает существенное влияние на рост островков (стабильный рост происходит при меньших размерах островков) и волнистости на свободной поверхности.

1. Paul D.J. Si/SiGe heterostructures: from material and physics to devices and circuits / D.J. Paul // Semicond. Sci. Technol. – 2004. – Vol. 19. – R75-R108.
2. Wu C.-C. Composition and stress fields in undulated thin films / C.-C. Wu, R. Hull // J. Appl. Phys. – 2006. – Vol. 100. – 083510.
3. Digiuni D. Aspect-ratio-dependent driving force for nonuniform alloying in Stranski-Krastanow islands / D. Digiuni, R. Gatti, F. Montalenti // Phys. Rev. – 2009. – Vol. 80. – 155436.
4. Бычков А.А. Влияние процессов релаксации на форму поверхности полупроводниковой пленки на подложке / А.А. Бычков, Д.Н. Карпинский // Актуальные проблемы прочности : сб. тр. XLVIII Междунар. конф., посвящ. памяти М.А. Кришталла. – Тольятти: ТГУ, 2009. – 270 с. – С. 220–221.
5. Бычков А.А. Равновесное распределение компонент сплава SiGe в полупроводниковой пленке на Si подложке / А.А. Бычков // Инженер. вестн. Дона. – 2020. – № 1. – URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N1y2020/6267>.

НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР

Ватульян А.О., д-р физ.-мат. наук, проф.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, РФ
aovatulyan@sfsu.ru

Изучение деформирования элементов конструкций из новых, в том числе композитных материалов, твердых биологических тканей, в которых свойства изменяются по некоторым законам в зависимости от координат, требует и адекватных средств по определению функций, определяющих неоднородность. Отметим, что использование решений коэффициентных обратных задач является важным фактором успешности расчетов на прочность конструктивных элементов в биомеханике, технике, механике новых, в том числе функционально-градиентных материалов и полимеркомпозитов, геофизике. Возможны различные постановки задач для конечных тел (балки, стержни, пластины) по определению переменных свойств. Наиболее распространенными и эффективными являются постановки в частотной области и восстановление искомых переменных коэффициентов по информации об АЧХ. Важную роль в постановке таких задач играет структура способа нагружения и чувствительность отклика по отношению к некоторым переменным или постоянным характеристикам. Большинство моделей, связанных с определением постоянных или переменных характеристик упругих или пороупругих тел, базируется на дополнительной информации, полученной в результате динамического силового воздействия на поверхность исследуемого тела. При этом измеряются физические поля (обычно смещения) на границе тела в некотором частотном или временном интервале. Такие постановки приводят к нелинейным (обычно билинейным) операторным уравнениям [1], для которых разработаны итерационные схемы, сочетающие решение прямых задач с известными законами неоднородности, с решением операторных уравнений с компактными операторами для нахождения поправок. Отметим, что для практического использования соответствующих конструктивных элементов и расчетов для них часто достаточно статических испытаний (в частности, канонических испытаний на сжатие, кручение и изгиб призматических образцов). Таким образом, возникает новый класс постановок обратных задач, для решения которых могут быть использованы и более простые математические и вычислительные средства. Эти постановки базируются на решении задач о статическом

нагружении поверхностной нагрузкой упругих или пористоупругих тел, а в качестве дополнительной информации в обратной задаче выступает поле смещений на свободной от нагрузок границе тела. При решении задач такого типа использованы два подхода.

Первый опирается на упрощенные постановки прямых задач для вытянутых призматических тел, которые строятся с помощью сочетания вариационного принципа Лагранжа и метода Канторовича [2], и приводят к корректным краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Получены краевые задачи для сжатия и изгиба, на их основе представлены способы решения задач по определению одномерных зависимостей для параметров Ляме.

Второй базируется на проекционных схемах различного типа. Предлагается искать решение обратной задачи (смещения и коэффициенты дифференциальных операторов) в виде следующей последовательности задач двух этапов. Решение прямой задачи отыскивается в виде линейной комбинации линейно-независимых внутри тела функций, удовлетворяющих главным граничным условиям, причем коэффициенты разложения отыскиваются из граничного условия на поверхности в рамках одной из проекционных схем. Таким образом строится представление поля смещений внутри области. На втором этапе найденное решение используется для решения обратной задачи, в которой все неизвестные функции коэффициентов также отыскиваются в виде линейных комбинаций известных функций (как правило, полиномов первого или второго порядков). Коэффициенты этих аппроксимаций определяются из вариационного принципа.

Представлены простые примеры по реализации предлагаемой схемы при анализе задач сжатия, кручения или изгиба для прямоугольных областей, из которых находятся зависящие от одной координаты модуль сдвига и модуль Юнга.

Информация о финансовой поддержке. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2019. – 272 с.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1962. – 528 с.

ОБ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОРИСТОУПРУГИХ ТЕЛ

Ватульян А.О.¹, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Дударев В.В.¹, канд. физ.-мат. наук,

Нестеров С.А.², д-р физ.-мат. наук

¹Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, РФ

²Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, г. Владикавказ, РФ

aovatulyan@sfn.ru, vvdudarev@mail.ru, 1079@list.ru

Пористоупругие материалы находят широкое применение в различных областях техники благодаря оптимальному сочетанию массы и прочности. В настоящее время для описания механического поведения упругих материалов с пустотами, свободными от жидкости широко используется модель Ковина-Нунзиато, в которой в качестве неизвестных выступают вектор перемещений среды и пористость (микро-дилатация) [1]. В рамках модели Ковина-Нунзиато были исследованы задачи пороупругости для однородных [1] и составных [2] пористых тел.

В настоящее время в качестве альтернативы слоистым материалам в различные области техники широко внедряются функционально-градиентные пористые материалы (ФГПМ) – композиты, материальные свойства которых изменяются по заданным законам. Однако, любое изделие, изготовленное из композитного материала, должно быть исследовано для получения оценки различия между фактическими и теоретическими характеристиками. В случае неоднородных материалов их характеристики можно определить, применяя технологии неразрушающего контроля и решая коэффициентные обратные задачи (КОЗ).

Ранее, для решения КОЗ пороупругости в случае упругих тел с порами, насыщенными жидкостью, применялся либо итерационный подход, при котором материальные характеристики уточнялись путем решения интегрального уравнения Фредгольма (ИУФ) 1-го рода [3, 4], либо генетические алгоритмы или градиентные методы минимизации функционала невязки [5, 6]. В случае упругих материалов с пустыми порами, проведенные на данный момент исследования касаются идентификации характеристик только однородных тел [7].

В настоящем докладе исследована задача идентификации переменных физико-механических характеристик упругого стержня с пустыми порами по информации о его торцевом смещении на некотором временном отрезке при неустановившихся колебаниях.

Обозначим через u – смещение стержня, φ – функцию пористости, E – модули Юнга, a – параметр диффузии пор, β – модуль связанности, ξ – модуль жесткости пор. Тогда обезразмеренная постановка прямой задачи о колебаниях пороупругого стержня имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{E} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \delta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \bar{\xi} \Phi - \frac{\partial U}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad (2)$$

$$U(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'(1) = 0, \quad \bar{E}(1) U'(1) + \delta_0 \Phi(1) = \psi(\tau), \quad (3)$$

$$U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = \Phi(z, 0) = 0, \quad (4)$$

где $z = \frac{x}{l}$, $U = \frac{u}{l}$, $\Phi = \frac{\xi_0}{\beta} \varphi$, $\Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}$, $\delta_0 = \frac{\beta^2}{\xi_0 E_0}$, $\bar{\alpha} = \frac{a}{\xi_0 l^2}$, $\bar{E} = \frac{E}{E_0}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$, $\bar{\xi} = \frac{\xi}{\xi_0}$, $\tau = \frac{t}{t_0}$, $t_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} l$, $\varepsilon = \frac{\omega}{\xi_0 t_0}$, а ξ_0 , E_0 , ρ_0 – характерные значения физико-механических характеристик стержня.

Прямая задача (1)–(4) в результате некоторых преобразований сведена к системе ИУФ 2-го рода относительно трансформант по Лапласу от функции пористости и напряжения:

$$\tilde{\Phi}(z, p) = \int_0^1 K_1(z, \chi, p) \tilde{\Phi}(\chi, p) d\chi + \int_0^1 K_2(z, \chi, p) \tilde{\Omega}(\chi, p) d\chi, \quad (5)$$

$$\tilde{\Omega}(z, p) = \int_0^1 K_3(z, \chi, p) \tilde{\Phi}(\chi, p) d\chi + \int_0^1 K_4(z, \chi, p) \tilde{\Omega}(\chi, p) d\chi + \tilde{\psi}(p),$$

$$\text{где } K_1(z, \chi, p) = - \left(\bar{\xi} + p\varepsilon - \frac{\delta_0}{\bar{E}} \right) \int_0^{\min\{z, \chi\}} \frac{d\eta}{\bar{\alpha}(\eta)}, \quad K_2(z, \chi, p) = - \frac{1}{\bar{E}(\chi)} \int_0^{\min\{z, \chi\}} \frac{d\eta}{\bar{\alpha}(\eta)},$$

$$K_3(z, \chi, p) = - \frac{\delta_0 p^2}{\bar{E}(\chi)} \int_{\min\{z, \chi\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad K_4(z, \chi, p) = - \frac{p^2}{\bar{E}(\chi)} \int_{\min\{z, \chi\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta.$$

Система ИУФ (5) решалась на основе метода коллокаций, а обращение трансформант осуществлялось на основе теории вычетов. В результате расчетов выяснено, что модуль Юнга и плотность оказывают большое влияние на торцевое смещение $U(1, \tau) = f(\tau)$, влияние модуля жесткости пор было намного слабее.

Для решения обратной задачи представлен итерационный подход, построенный аналогично [3]. Для этого на основе слабой постановки в трансформантах Лапласа и метода линеаризации получено ИУФ 1-го рода для нахождения поправок физико-механических характеристик стержня:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{E}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left(\tilde{U}^{(n-1)} \right)^2 dz + \\ & + \int_0^1 \delta \bar{\xi}^{(n-1)} \left(\tilde{\Phi}^{(n-1)} \right)^2 dz - \int_0^1 \delta \bar{\alpha}^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{\Phi}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz = \\ & = -\tilde{\psi}(p) \left(\tilde{f}(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad [p \in [0, \infty)]. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае реконструкции на конечном временном интервале функции поправки находятся из решения ИУФ 1-го рода, полученного путем обращения (6). В случае раздельного восстановления характеристик получены упрощенные уравнения, регуляризации которых произведена с помощью метода Тихонова А.Н. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении функционала невязки $J = \int_{a_1}^{a_2} \left(f(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau) \right)$ предельного значения, равного 10^{-6} .

В результате вычислительных экспериментов по раздельной реконструкции физико-механических характеристик выяснено, что монотонные законы изменения модуля Юнга и плотности восстанавливаются с погрешностью, не превышающей 4% вдали от защемленного торца $z = 0$ при любом параметре поромеханической связанности δ_0 ; наибольшая погрешность реконструкция плотности возникает в окрестности торца $z = 0$; успешная реконструкция модуля жесткости пор возможна только при $\delta_0 \geq 0.3$.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Cowin S.C. Linear elastic materials with voids / S.C. Cowin, J.W. Nunziato // J. Elast. – 1983. – Vol. 13, No. 2. – P. 125–147. – DOI: 10.1007/BF00041230.
2. Нестеров С.А. О деформировании составных упругих тел с пустыми порами / С.А. Нестеров // Эколог. вестн. науч. центров Черномор. эконом. сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 68–79. – EDN: ZUBCXQ. – DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79.

3. *Ватульян А.О.* Об обратных коэффициентных задачах пороупругости // А.О. Ватульян, А.А. Ляпин // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 2. – С. 114–121.
4. *Дударев В.В.* Реконструкция поля предварительных напряжений в неоднородной пороупругой среде / В.В. Дударев, А.А. Ляпин, Ю.А. Святко // Эколог. вестн. науч. центров Черномор. эконом. сотрудничества. – 2015. – №3. – С. 20–25.
5. *Ляпин А.А.* О применении генетических алгоритмов и градиентных методов к задаче реконструкции поля предварительных напряжений в пороупругой неоднородной колонне / А.А. Ляпин, О.В. Руденко, Ю.А. Святко // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. – Т. 61, № 3. – С. 481–488. – DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.316.
6. *Dehghani H.* Poroelastic model parameter identification using artificial neural networks: on the effects of heterogeneous porosity and solid matrix Poisson ratio / H. Dehghani, A. Zilian // Computat. Mech. – 2020. – Vol. 66. – P. 625–649. – DOI: 10.1007/s00466-020-01868-4.
7. *Bishay P.L.* On the characterization of porosity-related parameters in micro-dilatation theory / P.L. Bishay, M. Repka, V. Sladek, J. Sladek // Acta Mech. – 2017. – Vol. 228. – P. 1631–1644. – DOI: 10.1007/s00707-016-1789-9.

УДК 539.3

О ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ РАСТЯЖЕНИЯ ПОРИСТОУПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

*Ватульян А.О.*¹, д-р физ.-мат. наук, проф.,
*Нестеров С.А.*², д-р физ.-мат. наук,
*Юров В.О.*², канд. физ.-мат. наук

¹Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, РФ

²Южный математический институт – филиал ВНИИ РАН, г. Владикавказ, РФ
 1079@list.ru

Пористые материалы обладают уникальными физико-механическими свойствами и широко применяются в различных областях науки и техники благодаря оптимальному сочетанию массы и прочности [1]. В настоящее время для описания поведения упругих материалов с пустыми пора́ми широко применяется микро-дилатационная теория Ковина-Нунзиато [1, 2]. На основе теории микро-дилатации получены, как аналитические решения статических задач, например, задачи об одноосном растяжении изотропной пористой балки [1–3], контактной задачи [4], так и численные решения, например, методом конечных элементов (МКЭ) [5].

Для нахождения физико-механических характеристик упругих тел обычно используются их испытания на растяжение, кручение или изгиб. Однако для пористых материалов, например, костной ткани, использование стержневой модели для нахождения физико-механических характеристик часто не дает верных результатов. Требуется построение упрощённых моделей, занимающих промежуточное положение между стержневым решением и решением плоской задачи пороупругости.

Задача для упругого прямоугольника исследовалась на протяжении многих лет и в настоящее время продолжает оставаться во внимании ученых [6, 7]. Для построения приближенных аналитических моделей деформирования упругих тел широко применяется метод Канторовича [8], особенно в сочетании с вариационным принципом Лагранжа.

В докладе рассмотрена задача о растяжении пористоупругого прямоугольника, одна боковая сторона которого жестко закреплена, на другой действует растягивающая нагрузка, остальные грани свободны от напряжений. Обозначим через u_i – компоненты вектора перемещений, φ – функция пористости (микро-дилатация), σ_{ij} – классические напряжения, h_i – неклассические напряжения, λ и μ – модули Ламе, a – параметр диффузии пор, β – модуль связанности, ξ – модуль жесткости пор. Постановка безразмерной задачи для прямоугольника имеет вид:

$$\Omega_{11,1} + \Omega_{13,3} = 0, \quad (1)$$

$$\Omega_{31,1} + \Omega_{33,3} = 0, \quad (2)$$

$$\alpha (\Phi_{,11} + \Phi_{,33}) - \Phi - (U_{1,1} + U_{3,3}) = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} U_1(0, y_3) = U_3(0, y_3) = \Phi_{,1}(0, y_3) = 0, \\ \Omega_{13}(1, y_3) = \Phi_{,1}(1, y_3) = 0, \quad \Omega_{11}(1, y_3) = P(y_3), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{13}(y_1, -\varepsilon/2) = \Omega_{33}(y_1, -\varepsilon/2) = \Phi_{,3}(y_1, -\varepsilon/2) = 0, \\ \Omega_{13}(y_1, \varepsilon/2) = \Omega_{33}(y_1, \varepsilon/2) = \Phi_{,3}(y_1, \varepsilon/2) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $y_1 = \frac{x_1}{L}$, $y_3 = \frac{x_3}{L}$, $\chi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-\nu}$, $\varepsilon = \frac{b}{L}$, $U_i = \frac{u_i}{L}$, $\Phi = \frac{\xi}{\beta}\varphi$, $\delta_0 = \frac{\beta^2}{\mu\xi}$, $\alpha = \frac{a}{\xi L^2}$, $H_i = \frac{h_i L}{a}$, $P = \frac{p}{\mu}$, $\Omega_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}$. Компоненты напряжений имеют вид: $H_i = \alpha\Phi_{,i}$, $\Omega_{11} = \chi(U_{1,1} + U_{3,3}) + 2U_{1,1} + \delta_0\Phi$, $\Omega_{13} = U_{1,3} + U_{3,1}$, $\Omega_{33} = \chi(U_{1,1} + U_{3,3}) + 2U_{3,3} + \delta_0\Phi$.

Для решения задачи (1)–(5) предложен метод Канторовича, используемый в рамках вариационного принципа Лагранжа. Будем считать функции $\Phi(y_1, y_3)$, $U_1(y_1, y_3)$, $P(y_3)$ чётными по координате y_1 , а функцию $U_3(y_1, y_3)$ – нечётной по y_1 , тогда положим: $U_1(y_1, y_3) = f_1(y_1)$, $\Phi(y_1, y_3) = f_2(y_1)$, $U_3(y_1, y_3) = y_3 f_3(y_1)$. С помощью упрощения функционала энергии путем интегрирования по поперечной координате и варьирования неизвестных функций, задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и соответствующими граничными условиями:

$$\alpha f_2'' - f_2 - f_1' - f_3 = 0, \quad (6)$$

$$\delta_0 f_2' + (\chi + 2) f_1'' + \chi f_3' = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{12} f_3'' - (\chi + 2) f_3 - \chi f_1' - \delta_0 f_2 = 0, \quad (8)$$

$$f_2'(0) = f_1(0) = f_3(0) = 0, \quad (9)$$

$$f_2'(1) = f_3'(1) = 0, \quad (\chi + 2) f_1'(1) + \chi f_3(1) + \delta_0 f_2(1) = P \quad (10)$$

Здесь знак «штрих» обозначает производную по координате y_1 . Характеристический многочлен системы (6)–(10) имеет двукратный нулевой корень $\gamma_{1,2} = 0$, соответствующий стержневому решению, и две пары

вещественных корней $\gamma_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}}, \quad \gamma_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}},$ где $a_0 = \alpha \frac{\varepsilon^2}{12} (\chi + 2), \quad a_1 = \left(4\alpha (\chi + 1) + \frac{\varepsilon^2}{12} (\chi + 2 - \delta_0) \right), \quad a_2 = 4 (\chi + 1 - \delta_0),$ порождающих погранслойные решения.

Получено аналитическое решение задачи (6)–(10), которое имеет громоздкий вид и здесь не приводится. Задача верифицировалась путем сравнения с результатами, полученными с помощью конечно-элементного пакета FlexPDE. Выяснено, что прикладная модель дает решения, достаточно близкие к найденным в пакете FlexPDE, однако она не описывает краевой эффект для нормальных напряжений Ω_{11} вблизи заделки, а при увеличении параметра относительной толщины ε с большей погрешностью описывает краевой эффект для смещения U_1 . Выяснено также, что изменения безразмерных параметров связанности δ_0 и диффузии пор α практически не влияют на распределения классических напряжений. Однако при увеличении параметра связанности функция пористости и компоненты смещений U_1 увеличиваются, а U_3 – уменьшается по абсолютной величине; неклассические напряжения H_1 в окрестности заделки принимают пиковое значение, а затем быстро убывают до нуля.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Нестеров С.А. О деформировании составных упругих тел с пустыми порами / С.А. Нестеров // Эколог. вестн. науч. центров Черномор. эконом. сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 68–79. – EDN: ZUBCXQ. – DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79.
2. Cowin S.C. Linear elastic materials with voids / S.C. Cowin, J.W. Nunziato // J. Elast. – 1983. – Vol. 13, No. 2. – P. 125–147. – DOI: 10.1007/BF00041230.

3. *Dell'Isola F.* Saint-Venant's Problem for Porous Linear Elastic Materials / F. Dell'Isola, R.C. Batra // J. Elast. – 1997. – Vol. 47(1). – P. 73–81. – DOI: 10.1023/A:1007478322647.
4. *Колосова Е.М.* Аналитическое решение осесимметричной контактной задачи для пороупругого слоя / Е.М. Колосова, М.И. Чебаков // Изв. РАН. МТТ. – 2020. – № 6. – С. 116–124. – EDN: YTNCYE. – DOI: 10.31857/S0572329920050116.
5. *Iovane G.* Finite element analysis of static problems for elastic media with voids / G. Iovane, A.V. Nasedkin // Comput. Struct. – 2005. – Vol. 84, No. 1–2. – P. 19–24. – DOI: 10.1016/j.compstruc.2005.09.002.
6. *Ватульян А.О.* Масштабно-зависимая модель деформирования слоистого прямоугольника / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Владикавказ. мат. журн. – 2022. – Т. 24, № 4. – С. 48–57. – EDN: MSRKIC. – DOI: 10.46698/v8145-3776-3524-q.
7. *Коваленко М.Д.* Точные решения неоднородных краевых задач теории упругости в прямоугольнике / М.Д. Коваленко, А.П. Кержаев, И.В. Меньшова, Ю.Н. Карнет // Докл. РАН. Физика, техн. науки. – 2023. – Т. 513, № 1. – С. 61–66. – EDN: HTMBLZ. – DOI: 10.31857/S268674002306010X.
8. *Голоскоков Д.П.* Изгиб защемленной тонкой изотропной пластины методом Канторовича с использованием специальных полиномов / Д.П. Голоскоков, А.В. Матросов, И.В. Олемской // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы упр. – 2023. – 19(4). – С. 423–442. – EDN: ITJIIN. – DOI: 10.21638/11701/spbu10.2023.401.

УДК 531/534:517.968:004.032.26

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО РОДА И НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Ватульян А.О.¹, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Шамшин В.М.², канд. физ.-мат. наук

¹Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, РФ

²Ростовский-на-Дону колледж связи и информатики, г. Ростов-на-Дону, РФ

aovatulyan@sfedu.ru, ufocombat@gmail.com

Введение. Развитие современной техники требует создания эффективных методов расчета конструкций из материалов со сложными механическими свойствами. Учет анизотропии в задачах о колебаниях упругих тел обусловлен физическими характеристиками широкого класса конструкционных материалов – от кристаллов и пьезокерамик до современных композитов. Математическое моделирование динамических процессов в таких средах приводит к системам дифференциальных уравнений в частных производных, для решения которых необходимы высокоточные численные методы, в том числе и альтернативные МКЭ.

Среди таких методов особое место занимает метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), позволяющий снизить размерность задачи на единицу и свести краевую задачу к интегральному уравнению или системе

интегральных уравнений по границе области, что имеет принципиальное значение при исследовании задач со сложной геометрией границ и смешанными граничными условиями.

Представленная работа развивает неклассический подход к методу граничных элементов через формулировку **ГИУ первого рода с гладкими ядрами** [1, 2], принципиально не требующих построения фундаментальных решений. Это снимает классические ограничения метода и открывает возможности для решения новых классов задач математической физики.

Постановка задачи. В качестве демонстрации эффективности предлагаемого подхода рассматривается модельная задача для уравнения Гельмгольца. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с ляпуновской границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца: $\Delta u + k^2 u = 0$ в Ω , где k – волновое число, Δ – оператор Лапласа. На границе области заданы смешанные граничные условия: $u = f$ на Γ_1 (условие Дирихле), $\partial u / \partial n = g$ на Γ_2 (условие Неймана), n – внешняя единичная нормаль к границе. Согласно развиваемому подходу, данная краевая задача сводится к системе неклассических граничных интегральных уравнений первого рода на контуре Γ , не требующих построения фундаментального решения оператора Гельмгольца.

$$\int_{\Gamma_1} \partial u(x) / \partial n e^{ik(x,d)} e^{ik(x,d)} ds - ik \int_{\Gamma_2} u(x) (d, n) e^{ik(x,d)} e^{ik(x,d)} ds = F(\alpha)$$

$$F(\alpha) = - \int_{\Gamma_2} g(x) e^{ik(x,d)} ds + ik \int_{\Gamma_1} f(x) (d, n) e^{ik(x,d)} ds$$

где $d = (\cos \alpha; \sin \alpha)$; $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Применение неклассических ГИУ первого рода приводит к кажущемуся парадоксу: исходная корректно поставленная краевая задача при переходе к граничной формулировке трансформируется в некорректную задачу в смысле Адамара [3], характеризующуюся неустойчивостью решения относительно малых возмущений входных данных. Для преодоления этой принципиальной трудности в работе применяется комбинация различных методов регуляризации.

Классический подход основан на методе регуляризации А.Н. Тихонова [3] с использованием априорной информации о гладкости решения: на гладких участках границы вводится стабилизирующий функционал, включающий требования непрерывности первой и второй производных вдоль контура. Параллельно с этим исследуется применение

физически информированных нейронных сетей (Physics-Informed Neural Networks, PINN) [4, 5] для решения полученных интегральных уравнений. Существенным преимуществом нейросетевого подхода является наличие встроенных механизмов регуляризации: архитектура сети и процесс обучения естественным образом подавляют высокочастотные осцилляции и обеспечивают гладкость решения без явного введения регуляризирующих добавок. В работе проводится сравнительный анализ эффективности различных стратегий: применение PINN без дополнительной регуляризации, комбинирование нейросетевого подхода с тихоновской регуляризацией, а также гибридные схемы, сочетающие преимущества обоих методов. Показано, что синергетическое использование классических методов регуляризации и современных нейросетевых технологий позволяет достичь высокой точности и устойчивости решения даже в условиях существенной некорректности исходной системы ГИУ, при этом обеспечивая адаптивность к особенностям конкретной задачи.

В качестве примеров рассмотрены задачи для областей двух принципиально различных типов геометрии. К первому типу относятся области с гладкими границами – круг, эллипс и кольцо, для которых существуют эталонные аналитические решения. Второй тип представлен областями с угловыми точками – прямоугольник, треугольник и трапеция, требующими особого подхода при численной реализации. Наличие угловых точек обуславливает необходимость введения специальных условий сопряжения в вершинах, обеспечивающих корректное поведение решения, а также применения модифицированной схемы регуляризации с локальным сгущением граничных элементов и адаптивным выбором параметров стабилизации вблизи углов. Для каждой из указанных геометрий исследована задача определения резонансных частот – собственных значений оператора Гельмгольца, соответствующих нетривиальным решениям однородной краевой задачи. Особое внимание уделено анализу влияния геометрических особенностей границы на сходимость численного метода и точность вычисления первых собственных частот. Полученные результаты демонстрируют эффективность предложенного подхода как для гладких контуров, так и для областей со сложной геометрией границы.

Заключение. В работе представлен подход к решению двумерных задач для уравнения Гельмгольца на основе неклассических ГИУ первого рода с гладкими ядрами, не требующих построения фундаментальных решений. Основные результаты: резонансные частоты определены с точностью 10^{-3} , граничные значения функций восстановлены с точностью 10^{-2} . Для областей без аналитического решения проведено сопоставление с методом конечных элементов. Комбинация метода Тихонова

с физически информированными нейронными сетями обеспечила устойчивость решения некорректной задачи. Подход продемонстрировал эффективность как для гладких границ, так и для областей с угловыми точками при использовании адаптивной регуляризации.

1. *Ватульян А.О.* Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости / А.О. Ватульян, В.М. Шамшин // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, вып. 3. – С. 112–119.
2. *Ватульян А.О.* О граничных интегральных уравнениях в акустике / А.О. Ватульян, Е.В. Садчиков // Акуст. журн. – 1998. – Вып. 3. – С. 326–330.
3. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
4. *Raissi M.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations / M. Raissi, P. Perdikaris, G.E. Karniadakis // J. Computat. Phys. – 2019. – Vol. 378. – P. 686–707. – DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.
5. *Fang Z.* Learning Only on Boundaries: A Physics-Informed Neural Operator for Solving Parametric Partial Differential Equations in Complex Geometries / Z. Fang, S. Wang, P. Perdikaris // Neural Comput. – 2024. – Vol. 36, No. 3. – P. 475–498. – DOI: 10.1162/neco_a_01647.

УДК 615.849

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА В РЕАЛИЗАЦИИ ПОДГОТОВКИ ИНЖЕНЕРА И ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Ваулин В.И.¹, канд. пед. наук, доц., *Александрова А.А.¹*,
Альдебенев В.В.¹, *Ваулин С.В.²*

¹Филиал Самарского государственного технического университета в г. Сызрани,
г. Сызрань, РФ

²ОАО «ТЯЖМАШ», г. Сызрань, РФ

vaul.vladimir2014@yandex.ru

Одной из дисциплин подготовки инженеров является «Инженерная графика», которая развивает мышление инженера, формирует компетенций [1]. При выполнении чертежей используются виды проецирования (центральное, параллельное, ортогональное, аксонометрическое), с применением методов матрасчетов и математического аппарата. Например: при проецировании отрезков используется аппарат символов; обозначений геометрических фигур (отрезок A_1B_1 пересекается с осью X ($A_1B_1 \cap X \equiv F_1$)), при геометрических построениях используется аппарат матрасчетов уклонов, деления окружности на части, определения рациональности геометрического построения и др. [3], которые рассчитываются по формуле

$$P = M/\Phi \cdot 100\%, \quad (1)$$

или представляет собой тангенс угла между ними

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}. \quad (2)$$

Выполнение чертежей темы «Соединения» используется математический аппарат расчетов элементов болта

$$L : L = A + B + S_{\text{ш}} + H + k, \quad (3)$$

где A и B – толщины соединяемых деталей; $S_{\text{ш}}$ – толщина шайбы; H – высота гайки; k – запас резьбы болта. Для изображения «Зубчатой передачи», необходим математический расчет размеров, формул расчета зубчатого венца, графическо-математических обозначений [3]. Расчет диаметра $d_{\text{ст.}}$ ступицы назначают в зависимости от материала колеса:

$$d_{\text{ст.}} = 1,5d_3 + 10 = 82 \text{ мм}. \quad (4)$$

Имеются нанесения размеров на строительных чертежах, объектах промышленности. Например: математический аппарат масштабов объекта, размеры объекта, различные типы линий имеющие точные характеристики. Примером служит графические и математические обозначения размеров фигур и деталей, в чертежах общего вида и сборочных единиц, расчеты размеров букв, объединений, графических символы, диаграмм. В ходе изучения инженерной графики используется математический аппарат формул, рядов формул, последовательных расчётов, что позволит освоить ЕСКД и выполнить различные виды чертежей, проектирование и конструирование научных исследований [2]. Например, модель конструирования поверхности в машиностроении (рис. 1).



Рис. 1. Пример реализации графических преобразований при конструировании поверхностей в автомобильном машиностроении

Особое место в машиностроении играет обозначение на чертежах допусков формы. Сформированные знания, умения и навыки изображения элементов ЕСКД на чертежах реализуются в проектной деятельности студентов в том числе в системах автоматического проектирования

(САПР) технологических процессов (ТП) машиностроения и обработке. В этом плане важен инструментарий математического обеспечения САПР ТП при выполнении техпроектирования и автоматизации, основой которого являются матмодели, методы и алгоритмы. Технологическое проектирование в машиностроении и механообработке состоит из технических средств, организующей системы, а также средств обеспечения САПР ТП [2]. Выделяют следующие виды обеспечения САПР ТП: 1 Информационное обеспечение; 2 Математическое обеспечение; 3 Программное обеспечение; 4 Лингвистическое обеспечение; 5 Организационно-методическое обеспечение. Математическая модель (ММ) ТП это математическая система описания точности изготовления изделий в условиях производства, которая включает средства теории множеств и графов, теорию вероятности и матлогику, матпрограммирование, уравнения алгебраические, дифференциальные и интегральные и др. [2]. ММ САПР ТП должно быть точным, экономичным, универсальным. Точность соотношения ММ и объекта рассчитывают по формуле:

$$\varepsilon_j = \frac{(y_{jм} - y_{jist})}{y_{jist}}. \quad (5)$$

ММ структурно-логические бывают: ММ табличные (табл.1); ММ сетевые; ММ перестановочные. **Табличная** ММ описывает структуру ТП для выработки техрешения таблица 1.

Таблица 1. Классификация математических моделей в САПР ТП

Признак классификации	Математические модели
Характер отображаемых свойств объекта	Структурные; функциональные
Принадлежность к иерархическому уровню	Микроуровня; макроуровня; метаяуровня
Степень детализации описания внутри одного уровня	Полные; макромоделли
Способ представления свойств объекта	Аналитические; алгоритмические; имитационные
Способ получения модели	Теоретические; эмпирические

Примером табличной модели служит токарном прутковом станке-автомате, где детали с поверхностями свойств F_j . ММ эффективности

F функционирования представляют уравнение (систему уравнений):

$$F = f(x, y), \quad (6)$$

где x – управляемые и y – неуправляемые переменные.

Методика создания ММ ТП включает стадии: определение в матмодели необходимых свойств изделия (объекта); создание информационной базы свойств изделия (объекта); формирование матмодели числовых данных параметров в структуре ММ; расчет параметров значений ММ в числах; проверка адекватной точности ММ. Для использования ММ в производстве нужно создать программу логики выполнения арифметических операций расчета на ЭВМ с учетом уровней иерархии [4]. В качестве объекта проектирования рассматривается ТП механической обработки детали, сборки узла или машины, управляющая программа обработки для станка с ЧПУ, конструкция и ТП изготовления специального режущего и вспомогательного инструмента, технологической оснастки.

Заключение. Важным инструментарием являются математический и графический аппарат, графическое изображение, символы и обозначения, включает обозначения, формулы, знаки обозначения, формулы расчета. Сформировать профессиональные компетенции: способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.

1. Байкалова С.М. Особенности изучения инженерной графики / С.М. Байкалова, Н.А. Куткина // Изв. ТулГУ. Техн. науки. – 2021. – Вып. 4. – С.382–391.
2. Волков В.Я. Графическое моделирование линейчатых многообразий пространства PN методами исчислительной геометрии / В.Я. Волков, О.Б. Ильясова // Вестн. Сиб. гос. автомоб.-дорож. акад. – 2014. – Вып. 4 (38). – С. 100–104.
3. Инженерная графика: Часть I. Часть II / сост. В.И. Ваулин, С.А. Сингеев. – Сызрань: филиал СамГТУ в г.Сызрани, 2023. – 185 с.
4. Lavrinenko S.V. The effectiveness of information and communication technologies in the educational process / S.V. Lavrinenko, P.K. Ikonnikova // Proc. 11th Int. Forum Strategic Technology IFOST 2016. – 2016. – 7884296. – P. 465–468. – DOI: 10.1109/IFOST.2016.7884296.

ВЫБОР РАЗМЕРА СЕКТОРА ПРИ РАСЧЕТАХ НА ПРОЧНОСТЬ ДИСКОВ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Водолагин А.Л., канд. техн. наук, **Гущин А.Ю.**, канд. техн. наук
ПАО «ОДК-УМПО» филиал «ОКБ им. А. Люльки», г. Москва, РФ
guschin.ayu@mail.ru

В процессе разработки нового авиационного двигателя большой объем работ занимают прочностные расчеты ответственных деталей в 3D-постановке с использованием метода конечных элементов. К таким деталям относятся диски компрессора и турбины. Для снижения трудозатрат на создание расчетной модели и машинного времени, затрачиваемого на проведение расчетов, инженер-расчетчик стремится упростить расчетную модель и использовать угловой сектор, вырезанный из цельного диска. Как правило, при выборе размера расчетного сектора соблюдается кратность числу концентраторов напряжений в диске. Например, если в диске 35 пазов под установку рабочих лопаток (далее РЛ), то и расчетный сектор будет составлять $1/35$ от всего диска. В данном случае будет соблюдаться условие циклической симметрии и результаты расчета можно будет распространить на весь диск.

На рисунке 1 приведен диск с кольцевым пазом под установку рабочих лопаток. В подобном диске имеется окно под сборку РЛ, через которое лопатки заводятся в паз диска, а потом сдвигаются вдоль паза и равномерно распределяются по ободу диска

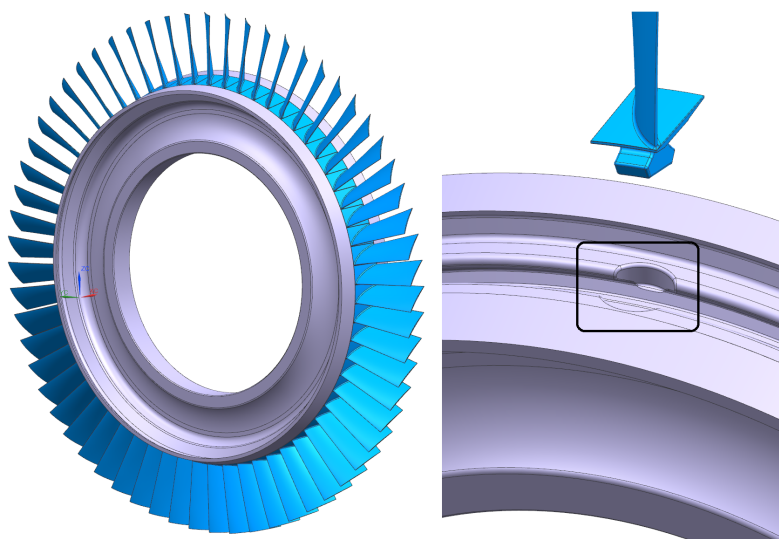


Рис. 1. Диск компрессора с кольцевым пазом

При выборе расчетного сектора необходимо учитывать, что кроме окна под сборку РЛ в диске имеются и другие концентраторы. Для соблюдения условия циклической симметрии для каждого типа концентратора требуется подбирать свой размер расчетного сектора.

Для иллюстрации сказанного был выбран диск компрессора с окном под сборку РЛ. Исходная модель диска приведена на рисунке 2.

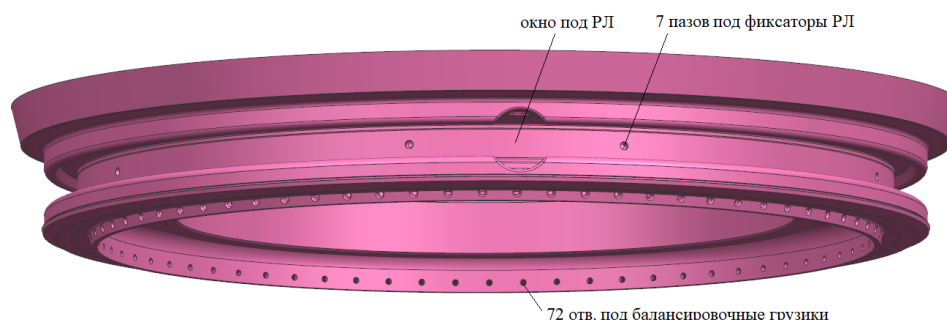


Рис. 2. Диск компрессора, выбранный для расчетов

Из рисунка 2 видно, что подбор размера сектора под расчет данного диска может вызвать определенные трудности, учитывая разное число концентраторов напряжений в виде окна под РЛ, пазов под фиксаторы РЛ и отверстий под балансировочные грузики.

В нашем примере были выбраны следующие варианты моделей: расчетный сектор с окном под РЛ и размерностью под 2 РЛ, 4 РЛ, 6 РЛ. Также был выполнен расчет на полной модели диска. Расчеты выполнялись методом конечных элементов с использованием расчетного комплекса ANSYS.

В качестве граничных условий для расчетов были заданы необходимые инерционные и тепловые нагрузки, соответствующие расчетному режиму.

Результаты расчетов приведены ниже. За эталон были приняты результаты, полученные на модели целого диска. В таблице 1 приведены значения эквивалентных напряжений (в кгс/мм²) в основных концентраторах диска.

Таблица 1. Результаты расчетов в концентраторах напряжений

Тип концентратора	Модель на 2 РЛ	Модель на 4 РЛ	Модель на 6 РЛ	Полная модель
Окно под РЛ	67,03	69,38	70,11	70,26
Паз под фиксатор	-	70,72	71,12	71,19
Отверстие под балансировочный грузик	77,98	77,79	77,93	78,01

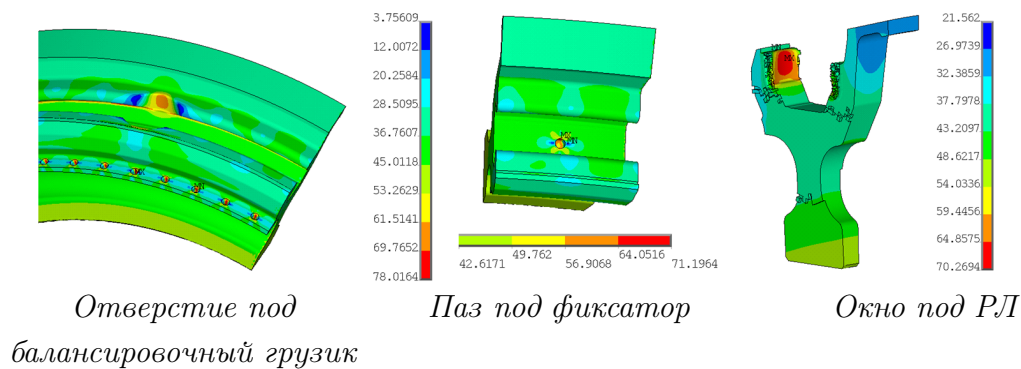


Рис. 3. Значения эквивалентных напряжений в концентраторах диска на полной модели, кгс/мм²

Из таблицы 1 видно, что максимальные уровни напряжений в отверстиях под балансировочный грузик отличаются на разных моделях на величину не более 0,3%, максимальные уровни напряжений в пазах под фиксаторы РЛ отличаются на разных моделях на величину не более 0,7%. Таким образом, уровень напряжений в отверстиях и пазах мало зависит от размеров расчетной модели. Каждый расчетный сектор в достаточной мере описывает данные концентраторы напряжений. Для оценки данных концентраторов допустимо использовать любой вариант расчетной модели. Из таблицы 1 видно, что для модели с окном под 2 РЛ максимальные расчетные напряжения отличаются от напряжений, полученных на модели целого диска, на величину порядка 5%. Для моделей с окном под 4 РЛ и более разница по напряжениям не превышает 1,3%. В данном случае заметно влияние размера модели на результат расчета напряжений в окне под РЛ. Следовательно, для оценки данного концентратора не желательно использовать вариант расчетной модели с размерностью в 2 рабочие лопатки, так как он дает несколько заниженные расчетные напряжения по сравнению с напряжениями, полученными на целом диске.

Таким образом, первоначально необходимо внимательно изучить конструкцию диска и все имеющиеся концентраторы напряжений. И далее определять размер расчетного сектора исходя из количества имеющихся концентраторов напряжений. При этом следует помнить, что желание уменьшить размер расчетной модели (упростить модель) с целью снижения временных затрат (на создание модели и времени расчета) порой может приводить к увеличению погрешности расчета напряжений.

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ИСПЫТАТЕЛЬНЫЙ СТЕНД НЭСТ С ИМИТАЦИЕЙ СОТР КА

Германов Л.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.

АО «НПО Лавочкина», г. Химки, РФ

GermanovLN@laspace.ru

В статье рассматривается новый подход в моделировании состояния электронагревателей для систем обеспечения тепловых режимов (СОТР) космических аппаратов (КА). Основу предложенного подхода моделирования составляют: «Принцип подобия электрических и тепловых цепей», «Комплексная эквивалентная электрическая схема замещения (тепловая SPICE-модель) нагревателя электрического стеклопластикового тонкого (НЭСТ) в составе СОТР» и «Алгоритм комплексного управления группой НЭСТ в составе СОТР». Данный подход позволяет объединить принципы моделирования электрических цепей и тепловых сетей, обеспечивая комплексный подход в моделировании, управлении и испытаниях НЭСТ в составе СОТР КА, а также сформулировать основные принципы по созданию автоматизированного испытательного стенда НЭСТ и определить его параметры [1-3].

Существенным недостатком технических средств испытаний НЭСТ, используемых в настоящее время, является человеческий фактор и ручной труд [4-6]. Для устранения указанного недостатка автором разработана замкнутая по температуре корпуса КА (ИП АИС) система регулирования. В процессе исследования получена линеаризованная SPICE-модель НЭСТ по электрическому току и напряжению для последующего синтеза регулятора и формулирования законов регулирования микроконтроллера (МК) в составе СОТР [3]. Решение исходной модели осложнялось наличием нелинейности: квадратичная зависимость мощности НЭСТ от напряжения и тока. Известным методом решения поставленной задачи является линеаризация нелинейных зависимостей. В частности, в результате разложения известных квадратичных зависимостей мощности НЭСТ в ряд Тейлора получены линеаризованные уравнения мощности нагревателя в функции напряжения и тока [3].

Анализ полученных математических моделей, представленных передаточными функциями, свидетельствует о том, что обеспечить процесс регулирования напряжения, тока и, как следствие, мощности в функции температуры корпуса КА возможно путём синтеза замкнутой системы автоматического регулирования с обратной связью по температуре, установления законов регулирования и разработки на их основе программно-

го обеспечения для МК, обеспечивающих регулирование коэффициентов усиления передаточных функций регулятора в функциональной температурной зависимости. При реализации этой концепции автором была предложена структурная схема АИС, предназначенного для контроля параметров и испытаний НЭСТ с имитацией СОТР КА (рис. 1).

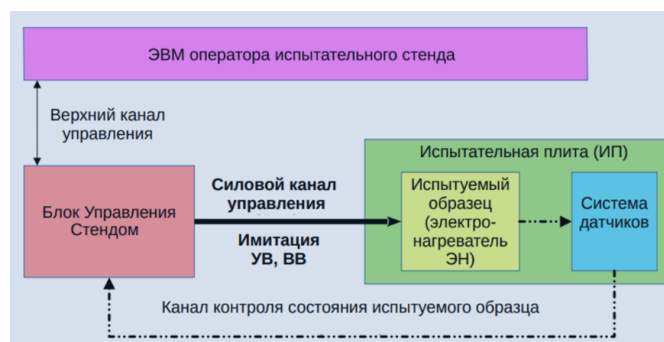


Рис. 1. Структурная схема автоматизированного стенда контроля параметров и испытаний НЭСТ с имитацией СОТР КА

Предложенный автором Алгоритм управления [3] заключается в чередовании временных моментов включения каналов управления с мёртвым временем и временем релаксации АБ, что позволяет оптимизировать режимы работы СЭС КА и СЭС испытательного стенда НЭСТ по энергетической эффективности (в том числе по электромагнитной совместимости силовых энергетических каналов и слаботочных каналов управления, как в составе КА, так и в составе испытательного стенда (ИС)).

Кроме этого, предложенный режим «мягкой коммутации» НЭСТ [3] позволяет:

- снизить пиковую максимальную мгновенную нагрузку на АБ, силовые ключи и НЭСТ, что в свою очередь снижает в общем нагрузку на СЭС КА и СЭС АИС в целом;

- повысить коэффициент энергетической эффективности использования АБ за счёт снижения максимальных пиковых значений тока общей импульсной нагрузки и тем самым увеличить разрядную ёмкость АБ, обеспечивая возможность получения большего количества энергии от АБ до момента полного её разряда и продлить время разряда АБ;

- продлить срок службы АБ за счёт смягчения режимов её работы и обеспечения цикличности (ритмичности) её работы, тем самым повысить живучесть КА в целом, что особенно актуально в случае возникновения внештатных ситуаций, связанных с отказом альтернативных систем питания КА (т.к. солнечные панели, электрохимические источники тока, энергетические реакторы и др.);

- снизить взаимное влияние каналов управления НЭСТ друг на друга на энергетическом (силовом) уровне в составе СОТР, что особенно актуально при высоком значении внутреннего сопротивления АБ (обу-

словленного, например, глубоким разрядом, износом или старением АБ);

- снизить уровень (энергию) электромагнитных помех, благодаря снижению пиковых значений тока разряда АБ и отказа от синхронной одномоментной работы силовых ключей;

- снизить стоимость комплектующих СОТР КА и СЭС АИС, за счёт снижения пиковой нагрузки и, следовательно, номинальных значений комплектующих этих систем.

Совместное использование предложенных «Принципа подобия электрических и тепловых цепей», «Комплексной эквивалентной электрической схемы замещения (тепловой SPICE-модели) НЭСТ в составе СОТР» и «Алгоритма комплексного управления группой НЭСТ в составе СОТР» [3] позволяет:

- регламентировать (формализовать, параметризовать) алгоритмы испытаний НЭСТ (равно как и алгоритм работы испытательного стенда НЭСТ);

- синхронизировать работу каждого канала НЭСТ относительно друг друга в составе штатной СОТР;

- прогнозировать и выявлять на ранних стадиях отклонения множества параметров группы НЭСТ в партии до начального этапа эксплуатации.

1. Бугрова А.Д. Особенности построения и функционирования систем терморегулирования негерметичных приборных отсеков посадочных аппаратов АО «НПО им. С.А. Лавочкина» / А.Д. Бугрова, Р.И. Гуров, Е.Ю. Котляров, В.А. Бондаренко // Тепловые процессы в технике. – 2021. – Т. 13, № 1. – С. 12–23.
2. Вятлев П.А. К вопросу изготовления фольговых электронагревателей космического аппарата лазерными технологиями / П.А. Вятлев, А.Г. Шеманов, С.Г. Харитонов, Ю.Н. Мишин // Вестн. НПО им. С.А. Лавочкина. – 2020. – № 1. – С. 68–74.
3. Германов Л.Н. Направление развития методов моделирования, алгоритмов управления и средств испытаний электронагревателей для систем обеспечения тепловых режимов космических аппаратов / Л.Н. Германов // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований: сб. ст. по матер. ХС междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск: СибАК, 2025 (в печ.)
4. Луконин Н.В. Увеличение эффективности исполнительных устройств системы терморегулирования космических аппаратов в условиях открытого космоса / Н.В. Луконин, Е.Н. Головенкин, Г.В. Дмитриев, И.Я. Шестаков // Космические аппараты и технологии. – 2019. – Т. 3, № 4. – С. 209–215. DOI: 10.26732/2618-7957-2019-4-209-215.
5. Финченко В.С. Системы обеспечения тепловых режимов автоматических межпланетных станций: науч. издание / В.С. Финченко, Е.Ю. Котляров, А.А. Иванков ; под ред. В.В. Ефанова и В.С. Финченко. – Изд-во АО «НПО Лавочкина», 2018. – 400 с.
6. Чеботарев В.Е. Методика проектирования электрообогревателей негерметичного космического аппарата / В.Е. Чеботарев, Р.Ф. Фаткулин, Г.В. Дмитриев, Н.В. Луконин // Косм. аппараты и технологии. – 2022. – Т. 6, № 4. – С. 229–234. – DOI: 10.26732/j.st.2022.4.01.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ И ИНТЕРФЕЙСНЫЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В СВОБОДНЫХ И КОНТАКТИРУЮЩИХ АНИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Глухов А.А.¹, канд. физ.-мат. наук,
Номбре С.Б.², канд. физ.-мат. наук, доц.,
Сторожев В.И.¹, д-р техн. наук, проф.,
Фоменко М.В.¹, канд. физ.-мат. наук

¹Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

²Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
г. Макеевка, РФ

antonglukhov2012@yandex.com

Теоретический анализ круга модифицированных моделей распространения локализованных и интерфейсных упругих волн [1, 2], в которых предусмотрен учет факторов усложнения физико-механических свойств волноводов в виде деформируемого полупространства и контактирующих разнотипных полупространств, включая анизотропию и непрерывную разнофакторную неоднородность их материалов, является актуальным направлением исследований в динамике деформируемого твердого тела, востребованным приложениями в области акустоэлектроники сейсмоакустики, ультраакустической диагностики, дефектоскопии. К представляющим в этой связи значительный интерес особенностям постановки задач о свойствах локализованных и интерфейсных упругих волн относится учет одноосной приповерхностной неоднородности анизотропных функционально-градиентных полупространств, для описания которой предложено использование двойных экспоненциальных функций [3]. В рамках данного направления представляемая работа посвящена методике численно-аналитического исследования моделей распространения локализованных и интерфейсных сдвиговых волн в свободных и контактирующих трансверсально-изотропных функционально-градиентных полупространствах с приповерхностной неоднородностью, описываемой однотипными законами одноосной двойной экспоненциальной неоднородности для параметра плотности и модулей упругости.

Первой из рассматриваемых является модель распространения локализованных волн сдвига вдоль свободной поверхности трансверсально-изотропного функционально-градиентного полупространства $V = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 < \infty\}$ с локализованной приповерхностной зоной неоднородности, модули упругости $c_{ij}(x_3)$ и плотность $\rho(x_3)$

материала которого имеют представления вида

$$\begin{aligned} c_{ij} &= c_{ij0} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3) \quad (ij = 44, 66), \\ \rho &= \rho_0 \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad \varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)). \end{aligned} \quad (1)$$

Представляемая модель позволяет путем варьирования действительно-значных параметров $\beta > 0$ и λ описывать темпы и уровни изменений характеристик физико-механических свойств материалов при отходе от границы вглубь неоднородного полупространства и их асимптотическое стремление к опорным значениям c_{ij0} , ρ_0 при неограниченном увеличении абсолютного значения поперечной координаты x_3 . При выборе в качестве направления распространения исследуемых локализованных сдвиговых волн с волновым числом k и циклической частотой ω координатного направления Ox_1 , комплексные функции волновых перемещений $u_j(x_1, x_3, t)$ в полупространстве представляются в форме

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_3, t) &= u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\ u_1(x_1, x_3, t) &= u_3(x_1, x_3, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а амплитудная функция поперечной координаты x_3 в представлении (2) определяется из обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$-k^2 c_{660} u_{20}(x_3) - c_{440} \lambda \beta e^{-\beta x_3} u'_{20}(x_3) + c_{440} u''_{20}(x_3) + \rho_0 \omega^2 u_{20}(x_3) = 0, \quad (3)$$

и может быть представлена описываемым в работе [3] экспоненциальным рядом

$$\begin{aligned} u_{20}(x_3) &= e^{-\alpha x_3} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha - (p-1)\beta) ((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha - n\beta)x_3}, \end{aligned} \quad (4)$$

в котором $\alpha^2 = (\Omega^2 - c_{660} k^2)/c_{440}$ ($\text{Re } \alpha > 0$), $\Omega^2 = \rho_0 \omega^2 h_*^2 / c_*$, $\gamma = \lambda \beta$, h_* , c_* – нормирующие параметры для величин с размерностями перемещений и напряжений. Напряжения на поверхности полупространства в рассматриваемой волне имеют представление

$$\sigma_{230}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) (u_{20}(x_3))', \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} (u_{20}^{(1)}(x_3))' &= -\alpha e^{-\alpha x_3} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha - p\beta) ((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha - n\beta)x_3}, \end{aligned} \quad (6)$$

и, соответственно, дисперсионное соотношение для анализируемых волн имеет вид

$$\Phi(\omega, k) = -\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha - p\beta)((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] = 0. \quad (7)$$

Для модели распространения интерфейсных сдвиговых волн вдоль границы идеального механического контакта разнородных приповерхностно-неоднородных трансверсально-изотропных полупространств $V_+ = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 < \infty\}$ и $V_- = \{(x_1, x_2) \in R^2, -\infty < x_3 \leq 0\}$ с соответствующими физико-механическими характеристиками

$$c_{ij+} = c_{ij0+} \cdot \varphi_+(\lambda_+, \beta_+, x_3) \quad (ij = 44, 66), \quad \rho_+ = \rho_{0+} \cdot \varphi_+(\lambda_+, \beta_+, x_3), \quad (8)$$

$$\varphi_+(\lambda_+, \beta_+, x_3) = \exp(\lambda_+ \exp(-\beta_+ x_3)), \quad \beta_+ > 0;$$

$$c_{ij-} = c_{ij0-} \cdot \varphi_-(\lambda_-, \beta_-, x_3) \quad (ij = 44, 66), \quad \rho_- = \rho_{0-} \cdot \varphi_-(\lambda_-, \beta_-, x_3), \quad (9)$$

$$\varphi_-(\lambda_-, \beta_-, x_3) = \exp(\lambda_- \exp(-\beta_- x_3)), \quad \beta_- < 0;$$

представления амплитудных функций волновых перемещений и динамических напряжений на граничных поверхностях в контактирующих полупространствах имеют вид

$$u_{20\pm}(x_3) = e^{\mp\alpha_{\pm}x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\pm}^n \left[\prod_{p=1}^n (\mp\alpha_{\pm} - (p-1)\beta_{\pm})((\mp\alpha_{\pm} - p\beta_{\pm})^2 + \alpha_{\pm}^2)^{-1} \right] e^{(\mp\alpha_{\pm} - n\beta_{\pm})x_3}, \quad (10)$$

$$\alpha_{\pm}^2 = (\Omega_{\pm}^2 - {}_{660\pm}k^2)/c_{440\pm} \quad \text{Re } \alpha_{\pm} > 0, \quad \Omega_{\pm}^2 = \rho_{0\pm}\omega^2 h_*^2/c_*, \quad \gamma_{\pm} = \lambda_{\pm}\beta_{\pm};$$

$$\sigma_{230\pm}(x_3) = c_{440\pm} \exp(\lambda_{\pm} \exp(-\beta_{\pm} x_3)) (u_{20\pm}(x_3))', \quad (11)$$

где

$$(u_{20\pm}(x_3))' = \mp\alpha_{\pm} e^{\mp\alpha_{\pm}x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \mp\alpha_{\pm} \gamma_{\pm}^n \left[\prod_{p=1}^n (\mp\alpha_{\pm} - p\beta_{\pm})((\mp\alpha_{\pm} - p\beta_{\pm})^2 + \alpha_{\pm}^2)^{-1} \right] e^{(\mp\alpha_{\pm} - n\beta_{\pm})x_3}. \quad (12)$$

Таким образом, следующее из условий идеального механического сопряжения полупространств V_+ и V_- дисперсионное соотношение для интерфейсных волн сдвига вдоль поверхности их контакта может быть запи-

сано в виде

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_+^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha_+ - (p-1)\beta_+) ((-\alpha_+ - p\beta_+)^2 + \alpha_+^2)^{-1} \right] \right) \cdot \quad (13) \\
 & \cdot c_{440-} \exp \lambda_- \left(\alpha_- + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_- \gamma_-^n \left[\prod_{p=1}^n (\alpha_- - p\beta_-) ((\alpha_- - p\beta_-)^2 + \alpha_-^2)^{-1} \right] \right) - \\
 & - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_-^n \left[\prod_{p=1}^n (\alpha_- - (p-1)\beta_-) ((\alpha_- - p\beta_-)^2 + \alpha_-^2)^{-1} \right] \right) \cdot \\
 & \cdot c_{440+} \exp \lambda_+ \left(-\alpha_+ + \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha_+ \gamma_+^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha_+ - p\beta_+) ((-\alpha_+ - p\beta_+)^2 + \alpha_+^2)^{-1} \right] \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Реализуемый с применением численных методов анализ дисперсионных соотношений (7) и (13) является инструментом исследования влияния факторов учитываемых усложненных физико-механических свойств волноводов на эффекты существования в них бегущих волн рассматриваемых типов и особенности их спектров.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Приказчиков Д.А.* Развитие асимптотических моделей поверхностных и интерфейсных волн / Д.А. Приказчиков // Механика деформируемого твердого тела. Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (4). – С. 1713–1715.
2. *Dong H.* Interface Waves / H. Dong, J.M. Hovem // Waves in Fluids and Solids / acad. ed. Ruben Picó Vila. – London: IntechOpen Limited, 2011. – 326 p. – DOI:10.5772/752. – ISBN 978-953-307-285-2.
3. *Болнокин В.Е.* Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2022. – № 3 (80). – С. 14–19.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ВОЛН ГУЛЯЕВА-БЛЮСТЕЙНА В ПЬЕЗОАКТИВНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С МНОГОФАКТОРНОЙ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Глухов А.А.¹, канд. физ.-мат. наук,
Пачева М.Н.¹, канд. физ.-мат. наук, **Карасев Д.С.**¹,
Сторожев С.В.^{1,2}, д-р. техн. наук, доц.

¹Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

²Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
г. Макеевка, РФ

antonglukhov2012@yandex.com

Распространяющиеся вдоль поверхности полубесконечных пьезоактивных тел сдвиговые поверхностные электроупругие волны (волны Гуляева-Блюстейна), находят самое широкое и перспективное применение в технологиях обработки сигнальной информации и акустоэлектронных устройствах [1–4]. Новые возможности в этой области открывает использование в качестве моделей волноводов для волн этого типа тел из пьезоактивных анизотропных функционально-градиентных материалов с однонаправленной приповерхностной непрерывной многофакторной неоднородностью экспоненциального типа, под которой подразумевается описание свойств различных физико-механических параметров материала с использованием отличающихся двойных экспоненциальных функций.

Получение дисперсионного соотношения для обобщенных волн Гуляева-Блюстейна в занимающем в координатах $Ox_1x_2x_3$ область $V = \{x_1 \in [0, \infty), (x_2, x_3) \in R^2\}$ пьезоактивном анизотропном полупространстве с физико-механическими параметрами $c_{44}(x_1)$, $e_{15}(x_1)$, $\varepsilon_{11}(x_1)$, $\rho(x_1)$ вида

$$c_{44}(x_1) = c_{440}\varphi_c(\lambda_c, \beta_c, x_1), \quad \varphi_c(\lambda_c, \beta_c, x_1) = \exp(\lambda_c \exp(-\beta_c x_1)), \quad (1)$$

$$\rho(x_1) = \rho_0\varphi_\rho(\lambda_\rho, \beta_\rho, x_1), \quad \varphi_\rho(\lambda_\rho, \beta_\rho, x_1) = \exp(\lambda_\rho \exp(-\beta_\rho x_1)),$$

$$e_{15}(x_1) = e_{150}\varphi_e(\lambda_e, \beta_e, x_1), \quad \varphi_e(\lambda_e, \beta_e, x_1) = \exp(\lambda_e \exp(-\beta_e x_1)),$$

$$\varepsilon_{11}(x_1) = \varepsilon_{110}\varphi_\varepsilon(\lambda_\varepsilon, \beta_\varepsilon, x_1), \quad \varphi_\varepsilon(\lambda_\varepsilon, \beta_\varepsilon, x_1) = \exp(\lambda_\varepsilon \exp(-\beta_\varepsilon x_1)),$$

имеющем свободную от усилий, контактирующую с разреженным газом или вакуумом граничную поверхность, либо свободную граничную поверхность с тонким электродным покрытием, при задании в качестве

направления распространения оси Ox_2 в плоскости $x_1 = 0$, базируется на численно-аналитическом алгоритме интегрирования в функциональных степенных рядах системы дифференциальных уравнений относительно амплитудных составляющих комплексных колебательных смещений и потенциала квазистатического электрического поля для исследуемых волн [5] с волновым числом k и круговой частотой ω

$$u_3(x_1, x_2, t) = u_{30}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \quad (2)$$

$$\varphi(x_1, x_2, t) = \varphi_0(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)).$$

С предложенным в работе [5] ведением представлений

$$\begin{aligned} u_{30}(x_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n, \quad \varphi_0(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_1^n, \quad \exp(\lambda_c x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_c^m}{m!} x_1^m, \quad (3) \\ \exp(\lambda_e x_1) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_e^m}{m!} x_1^m, \quad \exp(\lambda_\varepsilon x_1) = \sum_{nv=0}^{\infty} \frac{\lambda_\varepsilon^m}{m!} x_1^m, \quad \exp(\lambda_\rho x_1) = \sum_{nv=0}^{\infty} \frac{\lambda_\rho^m}{m!} x_1^m; \\ \varphi_e(\lambda_e, \beta_e, x_1) &= \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe} x_1^q, \quad \Delta_{qe} = (-1)^q \frac{\beta_e^q}{q!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^q \lambda_e^m}{m!}; \dots, \\ \varphi_\rho(\lambda_\rho, \beta_\rho, x_1) &= \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_1^q, \quad \Delta_{q\rho} = (-1)^q \frac{\beta_\rho^q}{q!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^q \lambda_\rho^m}{m!}; \\ \exp(-\beta_c x_1) \varphi_c(\lambda_c, \beta_c, x_1) &= \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc} x_1^q, \quad \Omega_{qc} = \sum_{m=0}^q \frac{\lambda_c^m}{m!} \Delta_{q-m, c}; \dots; \\ \exp(-\beta_\varepsilon x_1) \varphi_\varepsilon(\lambda_\varepsilon, \beta_\varepsilon, x_1) &= \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{q\varepsilon} x_1^q, \quad \Omega_{q\varepsilon} = \sum_{m=0}^q \frac{\lambda_\varepsilon^m}{m!} \Delta_{q-m, \varepsilon}, \end{aligned}$$

для искоемых амплитудных функций получены выражения

$$u_{30j}(x_1, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} x_1^n, \quad \varphi_{0j}(x_1, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} x_1^n, \quad (4)$$

в которых совокупности коэффициентов $\{a_n, b_n\}$ ($n = \overline{0, \infty}$) определяются из системы рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)c_{440}\Delta_{p-n, c}a_{n+2} + (n+2)(n+1)e_{150}\Delta_{p-n, e} = \\ = -((n+1)\delta_A\Omega_{p-n, c}a_{n+1} + (n+1)\delta_e\Omega_{p-n, e}b_{n+1} + \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& +(\rho_0\omega^2\Delta_{p-n,\rho} - k^2c_{440}\Delta_{p-n,c})a_n - k^2e_{150}\Delta_{p-n,e}b_n), \\
& (n+2)(n+1)e_{150}\Delta_{p-n,e}a_{n+2} - (n+2)(n+1)\varepsilon_{110}\Delta_{p-n,\varepsilon}b_{n+2} = \\
& = -((n+1)\delta_e\Omega_{p-n,e}a_{n+1} - (n+1)\delta_\varepsilon\Omega_{p-n,\varepsilon}b_{n+1} - \\
& - e_{150}k^2\Delta_{p-n,e}a_n + k^2\varepsilon_{110}\Delta_{p-n,\varepsilon}b_n).
\end{aligned}$$

При формировании четырех базисных решений $u_{30j}(x_1, \omega, k)$, $\varphi_{0j}(x_1, \omega, k)$ ($j = \overline{1, 4}$) рассматриваемой системы, коэффициенты a_2 , b_2 определяются из алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& 2c_{440}\Delta_{0c}a_2 + 2e_{150}\Delta_{0e}b_2 = \\
& = -\delta_c\Omega_{0c}a_1 - e_{150}\delta_e\Omega_{0e}b_1 - (\rho_0\Delta_{0\rho}\omega^2 - c_{440}\Delta_{0c}k^2)a_0 + k^2e_{150}\Delta_{0e}b_0, \\
& 2e_{150}\Delta_{0e}a_2 - 2\varepsilon_{110}\Delta_{0\varepsilon}b_2 = \\
& = -e_{150}\delta_e\Omega_{0e}a_1 + \varepsilon_{110}\delta_\varepsilon\Omega_{0\varepsilon}b_1 + e_{150}k^2\Delta_{0e}a_0 - k^2\varepsilon_{110}\Delta_{0\varepsilon}b_0,
\end{aligned} \tag{6}$$

через произвольные величины a_1 , b_1 , a_0 , b_0 посредством задания их совокупностей в виде $\{0, 0, 0, 1\}$, $\{0, 0, 1, 0\}$, $\{0, 1, 0, 0\}$, $\{1, 0, 0, 0\}$ с последующим определением из (5) четырех последовательностей значений $\{a_n^{(j)}, b_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$ ($j = \overline{1, 4}$).

Из четырех описанных базисных решений конструируются два базисных решения $\tilde{u}_{30j}(x_1, \omega, k)$, $\tilde{\varphi}_{0j}(x_1, \omega, k)$ ($j = \overline{1, 2}$), обладающие свойствами затухания в глубине полупространства, и для выражаемых через эти базисные решения комплексных функций упругих перемещений и потенциала квазистатического электрического поля

$$\begin{aligned}
u_3(x_1, x_2, t) &= (C_1\tilde{u}_{301}(x_1, \omega, k) + C_2\tilde{u}_{302}(x_1, \omega, k))\exp(-i(\omega t - kx_2)), \\
\varphi(x_1, x_2, t) &= (C_1\tilde{\varphi}_{01}(x_1, \omega, k) + C_2\tilde{\varphi}_{02}(x_1, \omega, k))\exp(-i(\omega t - kx_2)),
\end{aligned} \tag{7}$$

формулируются однородные краевые условия на свободной, контактирующей с вакуумом или разреженным газом граничной поверхности

$$\begin{aligned}
& (c_{44}(x_1)\partial_1 u_3 + e_{15}(x_1)\partial_1 \varphi)_{x_1=0} = 0, \\
& (-\varepsilon_{11}(x_1)\partial_1 \varphi + e_{15}(x_1)\partial_1 u_3)_{x_1=0} = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

или на свободной поверхности, имеющей тонкое электропроводящее покрытие

$$(c_{44}(x_1)\partial_1 u_3 + e_{15}(x_1)\partial_1 \varphi)_{x_1=0} = 0, \quad (\varphi)_{x_1=0} = 0. \tag{9}$$

При подстановке в эти соотношения представлений (7), их следствием являются однородные системы линейных алгебраических уравнений

относительно произвольных постоянных C_1 , C_2 , равенства нулю определителей которых и представляют собой конструируемые дисперсионные соотношения для обобщенных поверхностных электроупругих волн Гуляева-Блюстейна

$$\Delta_{11}(\omega, k)\Delta_{22}(\omega, k) - \Delta_{11}(\omega, k)\Delta_{21}(\omega, k) = 0, \quad (10)$$

в которых

$$\Delta_{1j}(\omega, k) = e^{\lambda_e} \tilde{u}'_{30j}(0, \omega, k) + e^{\lambda_e} \tilde{\varphi}'_{0j}(0, \omega, k) \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (11)$$

и, соответственно указанным случаям задания краевых условий для характеристик квазистатического электрического поля,

$$\Delta_{2j}(\omega, k) = e^{\lambda_e} \tilde{u}'_{30j}(0, \omega, k) - e^{\lambda_e} \tilde{\varphi}'_{0j}(0, \omega, k) \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (12)$$

либо

$$\Delta_{2j}(\omega, k) = \tilde{\varphi}_{0j}(0, \omega, k) \quad (j = \overline{1, 2}). \quad (13)$$

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Yang J.* Dynamic anti-plane problems of piezoceramics and applications in ultrasonics – a review / J. Yang, J. Wang // Acta Mech. Solid. Sin. – 2008. – Vol. 21, Issue 3. – P. 207-220. – DOI: 10.1007/s10338-008-0824-3.
2. *Heywang W.* Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.
3. *Uchino, K.* Advanced Piezoelectric Materials / K. Uchino. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2011. – 696 p.
4. *Tanaka S.* Piezoelectric acoustic wave devices based on heterogeneous integration technology / S. Tanaka // Proc. 2014 IEEE Int. Freq. Control Symposium (FCS) (Taipei, Taiwan). – 2014. – P. 1–4. – DOI:10.1109/FCS.2014.6859994.
5. *Карасев Д.С.* Базисные решения уравнений распространения электроупругих сдвиговых волн в пьезокерамическом полупространстве с многофакторной приграничной неоднородностью / Д.С. Карасев, М.Н. Пачева, С.В. Сторожев, М.В. Фоменко // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2025. – № 1. – С. 5–11. – DOI: 10.5281/zenodo.14922466. – EDN: WUYDEQ.

О ВЛИЯНИИ ДЕФЕКТОВ ТИПА ТРЕЩИН НА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНОК ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛОВ

Глушанков Е.С., канд. физ.-мат. наук
Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ
evgenij.glushankov@gmail.com

С использованием комплексных потенциалов и метода наименьших квадратов задача об определении термонапряженного состояния многосвязной пластинки из пьезоматериала сведена к решению двух перепределенных систем линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярных разложений. На основе данного решения проведены численные исследования термонапряженного состояния пластинки с отверстием и краевой трещиной с установлением закономерностей влияния дефектов типа краевых трещин на термонапряженное состояние пластинки.

Постановка и решение задачи. Рассматривается бесконечная пластинка из пьезоматериала с эллиптическими отверстиями и прямолинейными трещинами. Контуры отверстий и трещин L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) располагаются произвольно относительно друг друга, в т. ч. могут пересекаться друг с другом, образуя контуры отверстий более сложной геометрии. На контурах заданы постоянные значения температуры T_l , механические и электромагнитные воздействия на них отсутствуют. На бесконечности действует линейный (однородный) поток тепла плотности (интенсивности) q под углом α , механические и электромагнитные воздействия отсутствуют.

Будем считать, что задача определения термонапряженного состояния пластинки дана в несвязанной постановке, тогда для ее решения необходимо решить сперва задачу теплопроводности, а затем задачу термоэлектромагнитоупругости [1]. Для решения этих задач целесообразно использовать комплексные потенциалы теплопроводности $F_5(z_5)$ и термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$), являющиеся функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y \quad (k = \overline{1, 5}), \quad (1)$$

где μ_5 и μ_k ($k = \overline{1, 4}$) – корни характеристических уравнений плоских задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости соответственно. Тогда общая задача сводится к последовательному определению этих

комплексных потенциалов из граничных условий соответствующих задач.

Функции $F_5(z_5)$ и $\Phi_k(z_k)$ определяются в многосвязных областях S_5 и S_k соответственно, получаемых из области S , занимаемой пластинкой, аффинными преобразованиями (1). В общем случае многосвязной области функции $F_5(z_5)$ $\Phi_k(z_k)$ обретают вид [1]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5), \quad (2)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (3)$$

Здесь c_5 , D_{5l} , c_{5ln} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{5l}(z_5)$, $\varphi_{5ln}(z_5)$ – известные функции; a_{kln} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости; $N_k(z_k)$, $\varphi_{kln}(z_k)$ – известные функции.

Неизвестные постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , a_{kln} определяются с помощью метода наименьших квадратов. Для этого на каждом из контуров L_j ($j = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему из $\mathcal{M}_j$ «коллокационных» точек $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_j}$). Тогда для определения этих постоянных получаются системы линейных алгебраических уравнений [1]

$$2c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} w_{5l}(\tau_{5im}) D_{5l} + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{5ln}(\tau_{5im}) c_{5ln} = T_j, \quad (4)$$

$$(j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_j}),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kjp} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) \varphi'_{kln}(\tau_{kjm}) a_{kln} =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kjp} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) N'_k(\tau_{kjm}) -$$

$$-2 \operatorname{Re} d_{5jp} \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) r_5 F_5(\tau_{5jm}) - \frac{df_{jp}}{ds}(\tau_{jm}),$$

$$(j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_j}, p = j = \overline{1, 4}), \quad (5)$$

d_{kjp} – известные постоянные, определяемые типом граничных условий; $\tau_{kjm} = x_{jm} + \mu_k y_{jm}$ ($k = \overline{1, 5}$); τ_{jm} – аффиксы точек M_{jm} . После нахождения псевдорешений систем (4) и (5) методом сингулярного разложения

постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , a_{kln} , a , следовательно, и комплексные потенциалы будут известными и можно вычислять значения основных характеристик температурного поля и термоэлектромагнитоупругого состояния (в т. ч. напряжения) в любой точке пластинки по известным формулам. А если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейную трещину, то можно определять и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в окрестности вершин трещины, используя известные формулы.

Описание результатов численных исследований. Исследования проводились для пластинки из композитного материала $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ [1] с круговым отверстием и краевой прямолинейной трещиной, выходящей из отверстия в направлении, параллельном (случай 1) или перпендикулярном (случай 2) направлению действия линейного потока тепла. При этом, решалась задача термоэлектромагнитоупругости (когда учитывались все свойства материала пластинки; сплошные линии на рисунках) и задача термоупругости (когда электромагнитные свойства материала не учитывались; пунктирные линии на рисунках).

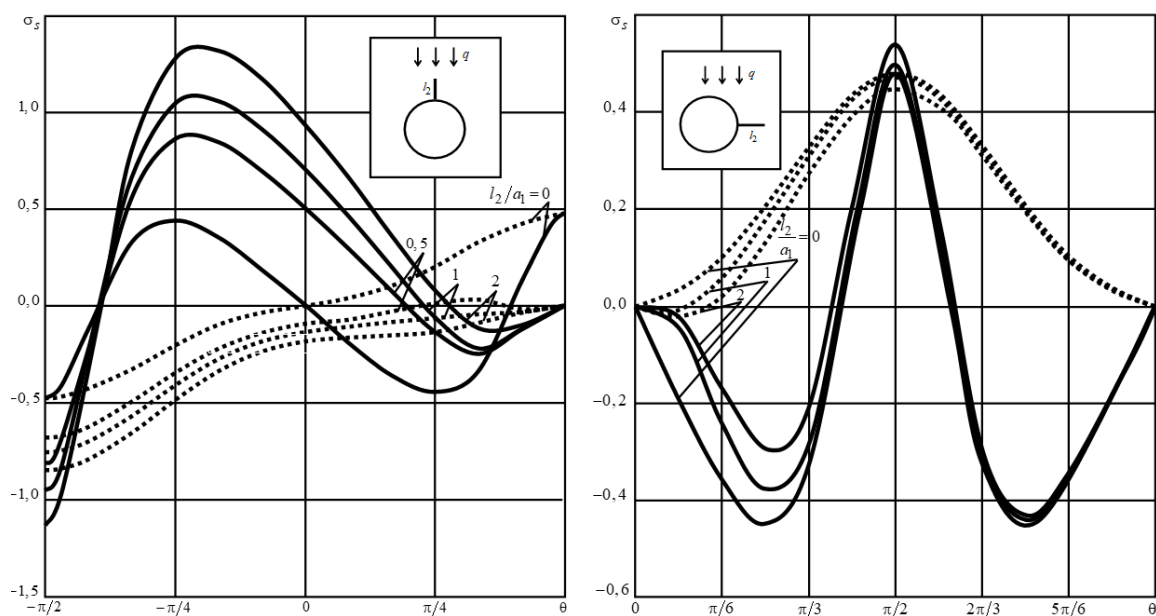


Рис. 1

Установлено, что в случае 1 длина трещины l_2 (а точнее, отношение l_2/a_1 длины трещины к радиусу отверстия a_1) оказывает существенное влияние на значения напряжений около отверстия. При этом, имеет место разгрузка напряжений около точки выхода трещины на контур отверстия по сравнению со случаем пластинки с отверстием без трещины ($l_2/a_1 = 0$). В других частях контура напряжения, наоборот, резко возрастают с длиной трещины. Вместе с тем, установлено, что длина краевой трещины оказывает значительное влияние на значения КИН. Трещине большей длины соответствует большее значение КИН около ее вершины. В случае 2 длина трещины оказывает менее существенное

влияние на значения напряжений около отверстия, концентрация напряжений ниже, чем в случае 1. В обоих случаях пренебрежение электромагнитными свойствами материала приводит к существенному искажению значений напряжений.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ДонГУ в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

1. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.

УДК 539.3:534.1

ОКРУЖНЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В ПОМЕЩЕННЫХ В ПОПЕРЕЧНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОВОДЯЩИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНАХ

Глуценко А.В., Пачева М.Н., канд. физ.-мат. наук,

Сторожев В.И., докт. техн. наук, проф.,

Фоменко М.В., канд. физ.-мат. наук

Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

pacheva.m.n@mail.ru

Излагаемые в публикациях [1–4] результаты теоретических численно-аналитических исследований по проблемам описания комплекса дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик окружных упругих волн плоского деформирования и изгиба тонких пластин концентрической кольцевой геометрии представляют интерес в фундаментальном аспекте и для обширной серии приложений в прочностных расчетах, при разработке устройств и технологий неразрушающего ультразвукового контроля, при конструировании и проектировании компонентов акустоэлектронных устройств. При этом, к числу актуальных малоисследованных моделей таких волновых процессов относится модель распространения окружных изгибных волн в тонких пластинах концентрической кольцевой геометрии, изготовленных из электропроводящих материалов и помещенных в поперечное магнитное поле [5]. В данном контексте, целью представляемых в настоящей работе исследований является получение дисперсионного соотношения для волн изгиба, распространяющихся вдоль окружного углового направления в пластине концентрической кольцевой геометрии с жестко закрепленными внутренним и внешним контурами, изготовленной из электропроводящего изотропного материала и подверженной воздействию равномерного поперечного магнитного поля постоянной напряженности.

Полагается, что срединная плоскость рассматриваемой тонкой кольцевой пластины толщины $2h$ занимает в полярных координатах $Or\theta$ область

$$S = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

а соотношения краевой задачи об изгибных колебаниях пластины в поперечном магнитном поле с постоянной напряженностью в рамках прикладной теории, базирующейся на гипотезах прямых нормалей, включают уравнение относительно комплексной функции динамического прогиба [5]

$$D\Delta\Delta w + 2\rho h(\partial^2 w/\partial t^2) - (2\sigma h^3/(3c^2))B_{0z}^2\Delta(\partial w/\partial t) + (h(\mu - 1)/(4\pi\mu))B_{0z}^2\Delta w = 0, \quad (1)$$

и краевые условия на жестко закрепленных внутреннем и внешнем контурах

$$(w)_{r=R_1} = (\partial w/\partial r)_{r=R_1} = (w)_{r=R_2} = (\partial w/\partial r)_{r=R_2} = 0. \quad (2)$$

В соотношениях (1) (2) $w(r, \theta, t)$ – комплексная функция динамических волновых прогибов; $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$ – двумерный оператор Лапласа; t – время; $D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2))$ – параметр цилиндрической жесткости пластины; $E, \nu, \rho, \sigma, \mu$ – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность, коэффициенты электропроводности и магнитной проницаемости материала пластины; c – параметр скорости электромагнитных волн в вакууме; B_{0z} – характеристика напряженности внешнего поперечного магнитного поля.

Для комплексной функции колебательных изгибных перемещений в исследуемых гармонических волнах с круговой частотой ω и волновым числом k , распространяющихся вдоль окружного углового направления θ рассматриваемой пластины, вводится представление

$$w(r, \theta, t) = w_0(r) \exp(-i(\omega t - k\theta)), \quad (3)$$

при подстановке промежуточной формы которого

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}_0(r, \theta) \exp(-i\omega t) \quad (4)$$

в (1) оно приводится к виду

$$(\Delta - \lambda_1^2)(\Delta - \lambda_2^2)\tilde{w}_0(r, \theta) = 0, \quad (5)$$

где λ_j^2 – корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + D^{-1}(h(\mu - 1)/(4\pi\mu) + 2\sigma h^3 i\omega/(3c^2))\lambda - 2\rho h D^{-1}\omega^2 = 0. \quad (6)$$

Далее, с подстановкой

$$\tilde{w}_0(r, \theta) = w_0(r) \exp(ik\theta), \quad (7)$$

для амплитудной функции $w_0(r)$ записывается выражение через цилиндрические бесселевы функции

$$w_0(r) = a_{11}J_k(\lambda_1 r) + a_{21}Y_k(\lambda_1 r) + a_{21}J_k(\lambda_2 r) + a_{22}Y_k(\lambda_2 r), \quad (8)$$

а, решение (1) представляется в виде

$$w(r, \theta, t) = (a_{11}J_k(\lambda_1 r) + a_{21}Y_k(\lambda_1 r) + a_{21}J_k(\lambda_2 r) + a_{22}Y_k(\lambda_2 r)) \exp(-i(\omega t - k\theta)), \quad (9)$$

содержащем четыре произвольных коэффициента a_{qp} . С использованием соотношений дифференцирования цилиндрических функций

$$\partial/\partial r (J_k(\lambda_j r)) = (\lambda_j/2)(J_{k-1}(\lambda_j r) - J_{k+1}(\lambda_j r)) = \alpha_j(r), \quad (10)$$

$$\partial/\partial r (Y_k(\lambda_j r)) = (\lambda_j/2)(Y_{k-1}(\lambda_j r) - Y_{k+1}(\lambda_j r)) = \beta_j(r),$$

следующее из граничных условий модели (2) дисперсионное соотношение для исследуемых волн может быть, в итоге, записано в форме

$$F(k, \omega) = \det \|\vartheta_{qp}(k, \omega)\| \quad (q, p = \overline{1, 4}), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_{11}(k, \omega) &= J_k(\lambda_1 R_1), & \vartheta_{12}(k, \omega) &= Y_k(\lambda_1 R_1), \\ \vartheta_{13}(k, \omega) &= J_k(\lambda_2 R_1), & \vartheta_{14}(k, \omega) &= Y_k(\lambda_2 R_1), \\ \vartheta_{21}(k, \omega) &= \alpha_1(R_1), & \vartheta_{22}(k, \omega) &= \beta_1(R_1), \\ \vartheta_{23}(k, \omega) &= \alpha_2(R_1), & \vartheta_{24}(k, \omega) &= \beta_2(R_1), \\ \vartheta_{31}(k, \omega) &= J_k(\lambda_1 R_2), & \vartheta_{32}(k, \omega) &= Y_k(\lambda_1 R_2), \\ \vartheta_{33}(k, \omega) &= J_k(\lambda_2 R_2), & \vartheta_{34}(k, \omega) &= Y_k(\lambda_2 R_2), \\ \vartheta_{41}(k, \omega) &= \alpha_1(R_2), & \vartheta_{42}(k, \omega) &= \beta_1(R_2), \\ \vartheta_{43}(k, \omega) &= \alpha_2(R_2), & \vartheta_{44}(k, \omega) &= \beta_2(R_2). \end{aligned}$$

Искомый параметр волнового числа k входит в дисперсионное уравнение (11) как индексная величина специальных цилиндрических функций.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Тютюкин В.В. Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны. / В.В. Тютюкин // Акуст. журн. – 2003. – Т. 49, № 6 – С. 843–851.
2. Дубяго Л.В. Дисперсионный спектр упругих волн изгиба вдоль окружного направления в тонкой изотропной кольцевой пластине с жестко закрепленными либо шарнирно опертыми краями / Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2019. – № 4 (69). – С. 48–56.
3. Болнокин В.Е. Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с закрепленными краями / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2021. – № 4 (77). – С. 35–43.
4. Глущенко А.В. Окружные нормальные изгибные волны в кольцевой пластине с двумя разнородными концентрическими составляющими / А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2023. – № 1. – С. 12–20.
5. Амбарцумян С.А. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин / С.А. Амбарцумян, Г.Е. Багдасарян, М.В. Белубекян. – М.: Наука, 1977. – 272 с.

УДК 539.3

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ В ИЗОТРОПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Гольцев А.С., д-р физ.-мат. наук, проф.
Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ
asgoltsev@mail.ru

Методы расчёта тонкостенных элементов конструкций при сосредоточенных силовых воздействиях являются актуальными [1].

Рассмотрим тонкую изотропную сферическую оболочку кривизны k и постоянной толщины h . Модуль упругости материала оболочки E , коэффициент Пуассона ν . Оболочка находится под действием сосредоточенного продольного усилия P , приложенного в начале координат в направлении оси Ox .

Сосредоточенные воздействия вызывают локальные напряжённые состояния, расположенные в непосредственной близости от места приложения нагрузки. Решения для таких областей строятся исходя из уравнений напряжённых состояний с большим показателем изменчивости, совпадающих с уравнениями теории пологих оболочек [2], которые и примем как разрешающие [3]. Кроме того, будем считать, что край оболочки находится на значительном удалении от места приложения сосредоточенной силы и напряжённое состояние затухает на линии внешней границы. Тогда в постановке задачи граничные условия можно не учитывать.

Уравнения равновесия в перемещениях (u, v, w) для пологих изотропных сферических оболочек в безразмерной системе координат x_i

($i = \overline{1, 3}$), определённых с точностью до толщины, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + k(1+\nu) \frac{\partial w}{\partial x_1} &= -(1-\nu^2) X, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + k(1+\nu) \frac{\partial w}{\partial x_2} &= -(1-\nu^2) Y, \\ k \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\} + \frac{1}{12(1+\nu)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right] + 2k^2 w &= (1-\nu) Z, \end{aligned} \quad (1)$$

где X, Y, Z – проекции внешней нагрузки на координатные оси.

Сосредоточенное воздействие моделируем с помощью дельта-функции Дирака (δ). Тогда нагрузка имеет вид

$$X = P\delta(x_1, x_2), \quad Y = 0, \quad Z = 0; \quad (2)$$

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье к системе (1) при нагрузке (2) найдём трансформанты перемещений, которые подставим в уравнения физического закона в пространстве трансформант. К полученным трансформантам силовых факторов применим процедуру обращения. В результате получим оригиналы всех внутренних силовых факторов. Структуру решения при $P = 1$ в полярной системе координат (r, ϕ) проиллюстрируем на примере мембранного усилия N_1 , изгибающего момента M_1 и перерезывающей силы Q_1 .

$$\begin{aligned} N_1(r, \varphi) &= \frac{1-\nu}{8\pi} \frac{1}{r} [(5+\nu) \cos \varphi + (1+\nu) \cos 3\varphi] + \\ &+ \frac{(1+\nu)}{\pi^2} k_0^2 r \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\varphi \cdot F_{N1}(n) \operatorname{Im} G_{n+1,n}(\sqrt{i}k_0 r), \\ F_{N1}(n) &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \theta \cos(2n+1)\theta d\theta; \\ M_1(r, \varphi) &= -\frac{1+\nu}{\pi^2} k r \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\varphi \cdot F_{M1}(n) \operatorname{Re} G_{n+1,n}(\sqrt{i}k_0 r), \\ F_{M1}(n) &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta f_\nu(\theta) \cos(2n+1)\theta d\theta; \\ Q_1(r, \varphi) &= \frac{1+\nu}{\pi^2} k \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \cdot F_{Q1}(n) \operatorname{Re} G_{n,n}(\sqrt{i}k_0 r), \end{aligned}$$

$$F_{Q1}(r, n) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cos 2n\theta d\theta,$$

где $f_\nu(\theta) = \cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta$, $k_0^2 = \sqrt{12(1 - \nu^2)} \cdot k$, $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geq 1. \end{cases}$

Решение для усилия N_1 содержит два слагаемых. Первое из них не зависит от кривизны оболочки и соответствует «плоской части», которая описывает решение для пластин. Второе слагаемое, содержащее кривизну оболочки, соответствует «оболочечной добавке», которая отражает влияние изогнутой поверхности оболочки на решение. Решения для остальных мембранных усилий имеют аналогичную структуру.

Решения для моментов и перерезывающих сил представлены лишь оболочечной добавкой. Это соответствует общим положениям механики пластин, поскольку плоское напряжённое состояние описывается только мембранными усилиями.

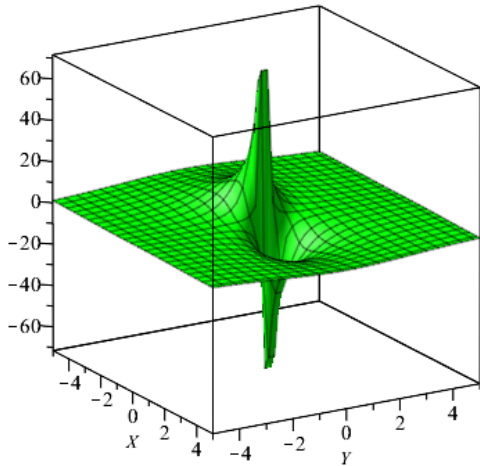


Рис. 1

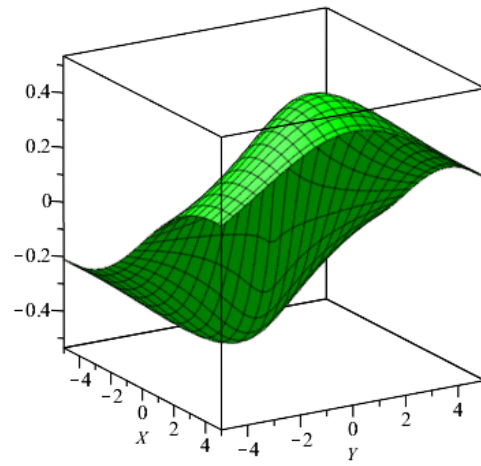


Рис. 2

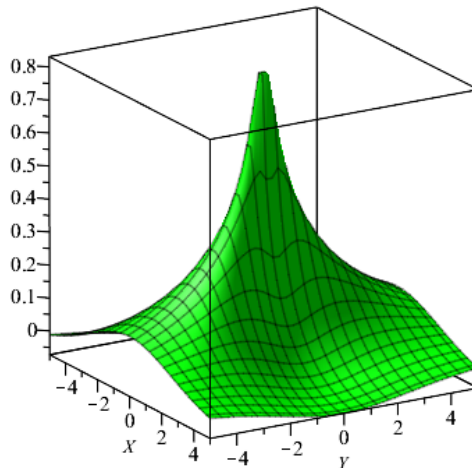


Рис. 3

Для реализации компьютерной модели распределения внутренних силовых факторов использованы возможности системы компьютерной математики Maple. С помощью команды PLOT3D и графической структуры трёхмерной графики типа GRID осуществлена визуализация распределения рассматриваемых величин. На рисунках 1–3 показано распределение усилия N_1 , момента M_1 и перерезывающей силы Q_1 соответственно. Значения усилий даны с точностью до множителя Eh , момента – Eh^2 , X и Y – безразмерные координаты.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400353-3).

1. *Шагивалеев К.Ф.* Расчёт замкнутой цилиндрической оболочки на сосредоточенную нагрузку, действующую вдоль образующей / К.Ф. Шагивалеев, Е.К. Сурнина // Техническое регулирование в транспортном строительстве. – 2020. – № 5 (44). – 4 с. – URL: trts.esrae.ru/67-590 (дата обращения: 16.08.2025).
2. *Шевченко В.П.* Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек / В.П. Шевченко // Концентрация напряжений / под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В.П. Шевченко. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). – С. 159–196. – ISBN 966-539-139-9.
3. *Хижняк В.К.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учеб. пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: Изд-во Донец. гос. ун-та, 1980. – 128 с.

УДК 539.3

ЛОКАЛЬНЫЙ НАГРЕВ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПО ОТРЕЗКУ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Гольцева Ю.А., Моисеенко И.А., д-р физ.-мат. наук, доц.

Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

jul.goltseva@gmail.com

Локальный нагрев тонкостенных элементов конструкций является распространённым типом нагрузки для многих аппаратов, приборов и установок [1]. Простейшим вариантом такого типа нагрузок, который моделирует сварочный процесс и представляет интерес для теоретического исследования, является равномерный нагрев пластин и оболочек по отрезку прямой линии [2].

Рассмотрим тонкую ортотропную пластину толщиной $2h$, нагреваемую по линии длиной $2a$, расположенную по линии главной оси ортотропии (Ox) симметрично относительно начала координат. Пластина находится в условиях симметричного теплообмена с внешней средой по закону Ньютона. Ортотропный материал пластины имеет следующие характеристики: E_1 , E_2 , G_{12} , ν_1 , ν_2 – модули Юнга, модуль сдвига, коэффициенты Пуассона для главных направлений; α_1 , α_2 – температурные

коэффициенты линейного расширения для главных направлений. Пластина нагревается равномерно по своей толщине. Необходимо определить распределение силовых компонент термоупругого состояния пластины в области локального нагрева.

Решение поставленной задачи основано на использовании формулы свёртки фундаментального решения дифференциальных уравнений задачи термоупругости ортотропных пластин с функцией интенсивности нагрева по рассматриваемой локальной области. В общем виде она записывается следующим образом [3]:

$$\mathbf{T}(\vec{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{T}^0(\vec{r} - \vec{t}) \mathbf{W}(\vec{t}) d\Omega,$$

где $\mathbf{T}$ – искомые компоненты термоупругого состояния (N_1, N_2, S – мембранные нормальные и касательное усилия); $\mathbf{T}^0$ – фундаментальные решения дифференциальных уравнений термоупругости, соответствующие искомым компонентам термоупругого состояния (N_1^0, N_2^0, S^0); $\mathbf{W}$ – интенсивность распределения источников тепла, моделирующих нагрев пластины, в зоне локального воздействия Ω ; $\vec{r}$ – вектор текущей точки; $\vec{t}$ – вектор точки интегрирования по области Ω .

Фундаментальное решение задачи термоупругости ортотропных пластин в классической постановке построено в работе [4]. В безразмерной полярной системе координат (r, ϕ) , определённой с точностью до полутолщины пластины, оно имеет следующую структуру:

$$N_i^0(r, \phi) = \frac{B_i}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\phi \int_0^{\pi/2} f_i(\theta) G_{n,n}(\mu(\theta)r) \cos 2n\theta d\theta \quad (i = 1, 2);$$

$$S^0(r, \phi) = \frac{2B_3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\phi \int_0^{\pi/2} f_3(\theta) G_{n,n}(\mu(\theta)r) \sin 2n\theta d\theta;$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geq 1, \end{cases}$$

где $B_j, f_j(\theta)$ ($j = \overline{1, 3}$) и $\mu(\theta)$ – константы и функции, содержащие однородные тригонометрические полиномы по синусу и косинусу, коэффициенты которых зависят от термомеханических параметров задачи; $G_{n,n}(z)$ – специальная функция, введённая в рассмотрение при построении фундаментальных решений теории пластин и оболочек [3]. По своим свойствам она подобна функции Макдональда.

Таким образом, фундаментальное решение представимо в виде рядов Фурье, коэффициентами которых являются определённые интегралы от

комбинации тригонометрических функций и специальной G -функции. Эти интегралы находятся численно с помощью квадратурной формулы Гаусса. Для удовлетворительной точности расчёта достаточно ограничиться десятью членами ряда.

Численные исследования проведены для стеклопластика косоугольной намотки, обладающего сильной анизотропией, со следующими механическими характеристиками [5]:

$$E_1 = 3,763 \cdot 10^3 \text{МПа}, \quad E_2 = 9,807 \cdot 10^2 \text{МПа}, \quad G_{12} = 3,923 \cdot 10^2 \text{МПа}, \\ \nu_1 = 0,2798, \quad \alpha_1 = 0,7 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}, \quad \alpha_2 = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}.$$

В расчётах использовались относительные коэффициенты теплопроводности материала, по отношению к значению вдоль толщины пластины, со значениями $\lambda_1 = 2,306$, $\lambda_2 = 1$. Рассматривался случай слабого теплообмена с окружающей средой при значении критерия Био $Bi = 0,001$. Предполагалось равномерное распределение источников тепла по линии нагрева единичной относительной интенсивности ($W = 1$).

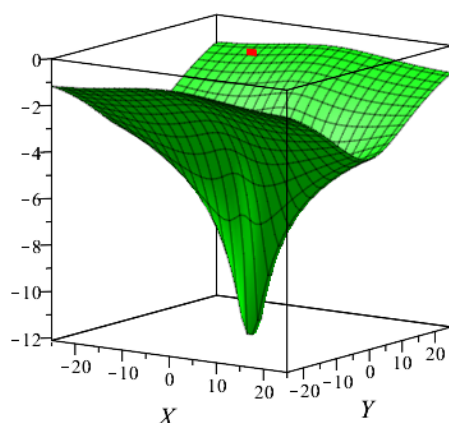


Рис. 1

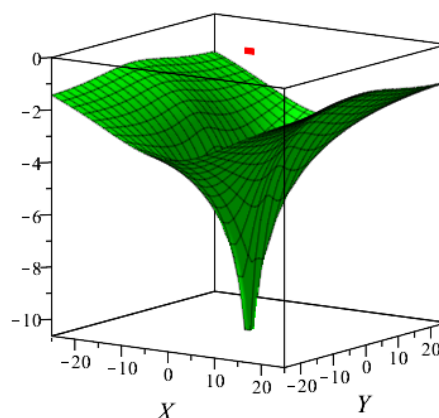


Рис. 2

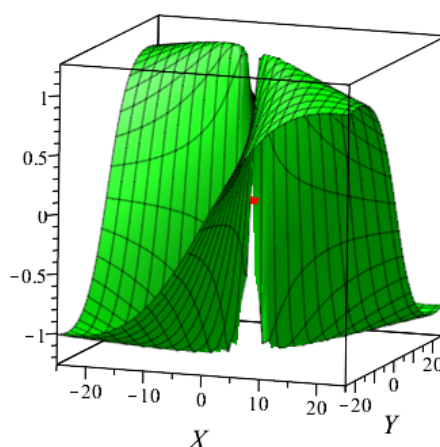


Рис. 3

Для визуализации результатов численных исследований использованы возможности системы компьютерной математики Maple. С помощью команды PLOT3D и графической структуры трёхмерной графики типа GRID осуществлена визуализация распределения искомых компонент термоупругого состояния. На рис. 1–3 показано распределение нормального усилия N_1 , нормального усилия N_2 и касательного усилия S соответственно. Значения усилий даны с точностью до множителя Eh , X и Y – безразмерные координаты. Линия нагрева обозначена красным цветом.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

1. Пасынков А.А. Анализ изотермического обжима трубных заготовок с локальным нагревом / А.А. Пасынков, Н.С. Мальцева // Изв. ТулГУ. Техн. науки. – 2021. – № 9. – С. 457–461.
2. Хапко Б.С. Тепловые напряжения в сферической оболочке, обусловленные источником тепла в форме линии / Б. С. Хапко, В. П. Заболотный // Обобщённые функции в термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 198–202.
3. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек / В.П. Шевченко // Концентрация напряжений / под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В.П. Шевченко. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). – С. 159–196. – ISBN 966-539-139-9.
4. Гольцев А.С. Фундаментальное решение уравнений плоской задачи термоупругости для тонких ортотропных пластин при симметричном теплообмене / А.С. Гольцев // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 1999. – № 1. – С. 57–61.
5. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – Киев; Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.

БАЗИСНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПРОТЯЖЕННЫХ ИЗОТРОПНЫХ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРАХ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ

Дзундза А.И., д-р пед. наук, проф.,

Моисеенко И.А., д-р физ.-мат. наук, доц.

Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

miamia733@mail.ru

Одним из подходов, обеспечивающих возможность построения базисных наборов аналитических частных решений дифференциальных уравнений волновой динамики, описывающих волновые процессы в полых радиально неоднородных протяженных цилиндрах, является задание специального вида функциональных законов изменения физико-механических характеристик материала волновода и привлечение аппарата рядов по обобщенной кольцевой координате. Так для единого экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности материала волновода построены в аналитическом виде базисные наборы частных решений уравнений модели для случаев изотропного [1], трансверсально-изотропного [2] и ортотропного [3] материалов. В данном исследовании на базе предложенных специальных моделей радиальной неоднородности изотропного материала, свободных от ограничений на вид функциональных законов, построены базисные наборы аналитических частных решений уравнений модели для двух типов осесимметричных нормальных волн, распространяющихся в протяженных полых цилиндрах.

Рассматривается изотропный цилиндрический волновод, имеющий в поперечном сечении форму концентрического кругового кольца с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами. В нормированной параметром $R_* = (R_1 + R_2)/2$ безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ волновод занимает область $V = \{r \in [1 - h, 1 + h], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}$, где $h = (R_2 - R_1)/(R_1 + R_2)$. Материал волновода считается функционально неоднородным в радиальных направлениях

$$\lambda(r) = C_* \tilde{\lambda}(r), \quad \mu(r) = C_* \tilde{\mu}(r), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r).$$

Нормировочные параметры $C_* = \text{const}$ и $\rho_* = \text{const}$ имеют размерность соответственно упругих модулей Ламе и плотности. Полагается, что функциональные законы

$$\tilde{\lambda}(r) > 0, \quad \tilde{\mu}(r) > 0, \quad \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [1 - h, 1 + h]) \quad (1)$$

являются произвольными в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик и относятся к классу $C^2(1-h, 1+h)$.

Исследование свойств распространяющихся вдоль оси Oz с круговой частотой ω и продольным волновым числом k ($k \in \mathbb{C}$) осесимметричных нормальных упругих волн проводится в рамках пространственной линейной математической модели волновой динамики. С целью построения базисных решений уравнения модели вводится замена переменных $r = hx + 1$, где $x \in [-1, 1]$ – обобщенная кольцевая координата [4]. Соответственно далее используется система координат $Ox\theta z$. Соотношения (1) в новой системе координат получают вид

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(x) > 0, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(x) > 0, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(x) > 0 \quad (x \in [-1, 1]). \quad (2)$$

В рамках указанной модели волновой динамики подлежат независимому исследованию волновые процессы отдельно для волн крутильного

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(TW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \tilde{u}_{\theta}^{(TW)}(x), \\ \Sigma^{(TW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_{\Sigma}^{(TW)} \tilde{\Sigma}^{(TW)}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

и продольно-сдвигового

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x), \\ \Sigma^{(LSW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_{\Sigma}^{(LSW)} \tilde{\Sigma}^{(LSW)}(x) \end{aligned} \quad (4)$$

типов. Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma^{(TW)}(x, z, t) &= \left[\sigma_{\theta z}^{(TW)}(x, z, t), \sigma_{r\theta}^{(TW)}(x, z, t) \right]^T, \\ \tilde{\Sigma}^{(TW)}(x) &= \left[\tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(x) \right]^T, \\ \mathbf{U}^{(LSW)}(x, z, t) &= \left[u_r^{(LSW)}(x, z, t), u_z^{(LSW)}(x, z, t) \right]^T, \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) &= \left[\tilde{u}_r^{(LSW)}(x), \tilde{u}_z^{(LSW)}(x) \right]^T, \\ \Sigma^{(LSW)}(x, z, t) &= \left[\sigma_{rr}^{(LSW)}(x, z, t), \sigma_{\theta\theta}^{(LSW)}(x, z, t), \right. \\ &\quad \left. \sigma_{zz}^{(LSW)}(x, z, t), \sigma_{rz}^{(LSW)}(x, z, t) \right]^T, \\ \tilde{\Sigma}^{(LSW)}(x) &= \left[\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(x) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x), \quad \tilde{\sigma}_s^{(TW)}(x) \quad (s = \theta z, r\theta), \\ \tilde{u}_s^{(LSW)}(x) \quad (s = r, z), \quad \tilde{\sigma}_s^{(LSW)}(x) \quad (s = rr, \theta\theta, zz, rz) \end{aligned}$$

вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент в случае волн крутильного и продольно-сдвигового типов; $\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)}$, $\mathbf{P}_U^{(LSW)}$ и $\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)}$ – квадратные диагональные матрицы комплексной нормировки с элементами

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)}\right]_{1,1} = i, \quad \left[\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)}\right]_{2,2} = 1, \quad \left[\mathbf{P}_U^{(LSW)}\right]_{1,1} = 1, \quad \left[\mathbf{P}_U^{(LSW)}\right]_{2,2} = i, \\ \left[\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)}\right]_{j,j} = 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad \left[\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)}\right]_{4,4} = i. \end{aligned}$$

С целью построения базисных наборов аналитических частных решений уравнений модели волновой динамики для рассматриваемых типов волновых процессов вводятся в рассмотрение декартова система координат Oxy и комплексная переменная $\xi = x + iy$. Формально полагается, что оси Ox систем координат $Ox\theta z$ и Oxy совпадают. Вводятся также произвольные функции $\varphi = \varphi(\xi)$ и $\psi_j = \psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1,2}$), аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$). Для рассматриваемых типов волновых процессов (3) и (4) законы радиальной неоднородности (2) через введенные функции переопределяются. Для случая (3) в виде

$$\tilde{\mu}(x) = e^{\varphi(x)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \psi_1(x) e^{\varphi(x)} \quad (x \in [-1, 1]); \quad (5)$$

для случая (4) двумя альтернативными способами:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(x) = (1 - 2\psi_1(x)) e^{\varphi(x)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \psi_1(x) e^{\varphi(x)}, \\ \tilde{\rho}(x) = \psi_2(x) e^{\varphi(x)} \quad (x \in [-1, 1]); \end{aligned} \quad (6-A)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(x) = \psi_1(x) e^{\varphi(x)}, \quad \tilde{\mu}(x) = e^{\varphi(x)}, \\ \tilde{\rho}(x) = \psi_2(x) e^{\varphi(x)} \quad (x \in [-1, 1]). \end{aligned} \quad (6-B)$$

Далее соотношения (5) и (6-A), (6-B) называются моделями радиальной неоднородности для соответствующих типов волновых процессов. Предложены аналитический и численный подходы к определению аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функций $\varphi = \varphi(\xi)$ и $\psi_j = \psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1,2}$).

На основе моделей неоднородности (5) и (6-A), (6-B) рассматривается аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной ξ обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вещественных функций $\tilde{u}_\theta^{(TW)}(x)$ в случае (3) и $\tilde{u}_s^{(LSW)}(x)$ ($s = r, z$) в случае (4),

полученных из уравнений движения для рассматриваемых типов волновых процессов (3) и (4). Указанные уравнения получены: для модели неоднородности (5) в виде

$$\left(d_\xi^2 + \hat{f}^{(1)}(\xi) d_\xi + \hat{f}^{(2)}(\xi) \right) \hat{u}_\theta^{(TW)}(\xi) = 0 \quad (|\xi| < \delta), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(1)}(\xi) &= \varphi' + h(h\xi + 1)^{-1}, \\ \hat{f}^{(2)}(\xi) &= h^2 \left(\Omega^2 \psi - k^2 - (h\xi + 1)^{-2} \right) - h(h\xi + 1)^{-1} \varphi'; \end{aligned}$$

для моделей неоднородности (6-А) и (6-Б) в виде

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta), \quad (8)$$

где $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi)$ и $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(\xi)$ – соответственно матричный дифференциальный оператор и вектор-столбец вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} d_\xi^2 + \tilde{f}_{11}^{(1)}(\xi) d_\xi + \tilde{f}_{11}^{(2)}(\xi) & \tilde{f}_{12}^{(1)}(\xi) d_\xi + \tilde{f}_{12}^{(2)}(\xi) \\ \tilde{f}_{21}^{(1)}(\xi) d_\xi + \tilde{f}_{21}^{(2)}(\xi) & d_\xi^2 + \tilde{f}_{22}^{(1)}(\xi) d_\xi + \tilde{f}_{22}^{(2)}(\xi) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(\xi) &= \left[\tilde{u}_r^{(LSW)}(\xi), \tilde{u}_z^{(LSW)}(\xi) \right]^T. \end{aligned}$$

Функции $\tilde{f}_{mn}^{(j)}(\xi)$ ($m, n, j = \overline{1, 2}$) определяются соответственно выбранному варианту модели неоднородности (6-А) либо (6-Б).

Для моделей неоднородности (5) и (6-А), (6-Б), а также для каждого подхода к определению функций $\varphi = \varphi(\xi)$ и $\psi_j = \psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 2}$) получены достаточные условия несильной радиальной неоднородности материала (2), обеспечивающие аналитичность в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функций $\tilde{f}^{(j)}(\xi)$, $\tilde{f}_{mn}^{(j)}(\xi)$ ($m, n, j = \overline{1, 2}$) и, следовательно, существование базисных наборов аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) частных решений уравнений (7) и (8).

Для уравнений (7) и (8) построены наборы соответственно из двух и четырех линейно независимых, аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) частных решений, представленных своими разложениями с определяемыми из явных рекуррентных соотношений коэффициентами.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

1. Моисеенко И.А. Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2019. – № 1 (66). – С. 31–53.

2. *Моисеенко И.А.* Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко // Механика твердого тела. — 2016. — Вып. 46. — С. 134–146.
3. *Моисеенко И.А.* Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко, С.А. Приймченко, В.А. Шалдырван // Журн. теорет. и прикладной механики. — 2017. — № 1 (58). — С. 27–41.
4. *Шульга Н.А.* Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полем цилиндре / Н.А. Шульга. // Прикладная механика. — 1974. — Т. 10, № 9. — С. 14–18.

УДК 539.422.24

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАСШТАБНО-СТРУКТУРНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ОДНООСНОМ НАГРУЖЕНИИ ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ ВО ВСЕМ ДИАПАЗОНЕ АСИММЕТРИИ ЦИКЛА

Завойчинская Э.Б., д-р физ.-мат. наук, проф., **Лавриков Г.Е.**
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, РФ
george.lavrikov@yandex.ru

Представленный доклад посвящен анализу метода исследования вероятности усталостного разрушения и построению предельных кривых в областях много- и гигацикловой усталости титановых сплавов. Рассматривается циклическое осевое нагружение следующего вида:

$$\sigma(\tau) = \sigma_a(\alpha + \sin \omega\tau), \quad \alpha = \frac{\sigma_m}{\sigma_a}, \quad \tau \in [0, t], \quad (1)$$

где σ_m — постоянная компонента напряжения, σ_a — амплитуда, ω — круговая частота, ν — частота, $\omega = 2\pi\nu$, N — число циклов нагружения, $N = \nu t$, α — параметр асимметрии цикла, R — коэффициент асимметрии цикла, $R = (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$.

По результатам известных физических исследований хрупкого разрушения можно выделить шесть масштабных уровней в зависимости от разных физических механизмов развития процесса с определением понятия дефекта j -ого масштабного уровня в некотором представительном объеме V_c ($V_c = L^3$ — объем твердого тела, в котором возможно зарождение начальной макротрещины-лидера длины L) [1, 2]. Дефект j -ого уровня характеризуется линейным размером $l_j = l_j(\tau)$ на интервале времени $\tau \in [0, t]$ и плотностью дефектов $q_j = q_j(\tau)$ в объеме V_c , задаваемой формулой: $q_j(\tau) = \lim_{\Delta V \rightarrow V_c} \Delta q_j(\tau)/\Delta V$, где $\Delta q_j = \Delta q_j(\tau)$ — среднее количество дефектов в объеме ΔV в момент времени $\tau \in [0, t]$,

$j = 1, \dots, 6$. Вводится некоторая непрерывная возрастающая функция j -го уровня $l_j^* = l_j^*(\tau)$ от линейного размера $l_j = l_j(\tau)$ и плотности $q_j = q_j(\tau)$, например, в таком виде: $l_j^*(\tau) = l_j(\tau) (q_j(\tau) V_c)^\gamma$, $\gamma = \text{const}$, $j = 1, \dots, 6$, $\tau \in [0, t]$, которая имеет размерность длины. Развитие усталостного разрушения современным физическим методом исследования микротвердости позволяет провести соответствие между предельными состояниями дефектов каждого уровня и определенным значением микротвердости по Виккерсу. Полагается, что представительный объем V_c характеризуется непрерывной убывающей функцией $HV = HV(\tau)$ на интервале времени $\tau \in [0, t]$. Тогда образование дефекта j -ого масштабного уровня начинается с достижения функцией $l_{j-1}^* = l_{j-1}^*(\tau)$ предельного значения $l_{f,j-1}^*(\tau_j)$ и функцией микротвердости $HV = HV(\tau)$ некоторого характерного значения $HV(\tau_j)$ в момент времени τ_j , $j = 1, \dots, 6$.

Вследствие случайного распределения дефектов по объему V_c процесс усталостного разрушения является стохастическим, а значения $l_j^*(\tau)$ и $HV(\tau)$ для каждого момента времени τ , $\tau \in [0, t]$ – случайными величинами. В качестве функции распределения вероятности хрупкого разрушения на каждом уровне $Q_j = Q_j(\tau)$ предлагается рассматривать вероятность, с которой случайная величина $HV(\tau)$ меньше своего значения $HV(\tau_j)$: $Q_j(\tau) = P(HV(\tau) < HV(\tau_j))$, $j = 1, \dots, 6$, $\tau \in [0, t]$. Вероятность разрушения j -го уровня $Q_j = Q_j(\tau)$ определяется процессом нагружения, записывается рекуррентная система определяющих соотношений для $Q_j = Q_j(\tau)$ с использованием интегрального оператора Гильберта-Шмидта. Собственные числа оператора задаются функциями прочностных свойств материала $\sigma_j = \sigma_j(\omega, N_j)$, при которых дефект j -го уровня достигает предельного состояния, а функция $HV = HV(\tau)$ – характерного значения $HV(\tau_j)$ при одночастотном симметричном нагружении с одной амплитудой. Функция распределения вероятности макро разрушения $Q = Q(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, $0 \leq Q(\tau) \leq 1$, задается таким образом: $Q(\tau) = Q_5(\tau) + Q_4^*(\tau) + Q_5^*(\tau) + Q_6(\tau)$, где функции $Q_4^* = Q_4^*(\tau)$, $Q_5^* = Q_5^*(\tau)$ – вероятности разрушения по дефектам четвертого и пятого уровней при формировании и развитии дефектов пятого и шестого уровней соответственно. Кривые усталости по уровням дефектности описываются следующими уравнениями: $Q_j(\tau_j) = Q_{j,th}$, $j = 1, \dots, 6$, $Q_j^*(\tau_{j+1}) = 1 - Q_{j+1,th}$, $Q_j^*(\tau_j) = Q_{j,th}$, $j = 4, 5$, где τ_j – долговечность на j -ом уровне.

На макроуровне функция $Q = Q(\tau)$ определяет кривую усталости по образованию макротрещины-лидера конечной длины: $Q(t_f) = Q_{th}$, где t_f – долговечность по образованию макротрещины конечной длины с вероятностью Q_{th} (в этой работе $Q_{th} = 1$), дальнейшее развитие которой описывается методами и подходами механики разрушения.

В модели для учета влияния параметра α базовые функции $\sigma_j = \sigma_j(\alpha, \omega, N_j)$ предлагается рассматривать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_j &= \sigma_j(\alpha, \omega, N_j) = \sigma_j(\omega, N_j) \cdot \hat{\sigma}(\alpha, \eta_j), \quad j = 1, \dots, 6, \\ \hat{\sigma}(\alpha, \eta_j) &= \alpha^c(\eta_j - 1) + 1, \quad j = 1, \dots, 6, \quad R < 0,5, \\ \hat{\sigma}(\alpha, \eta_j) &= \alpha^c(1 - \eta_j) + 1, \quad j = 1, \dots, 6, \quad R > 1,\end{aligned}\quad (2)$$

где c – константа материала; при $R < 0,5$ отношение $\eta_j = \sigma_j^0(\omega, N_j)/\sigma_j(\omega, N_j)$, при $R > 1$ – $\eta_j = \sigma_j^\infty(\omega, N_j)/\sigma_j(\omega, N_j)$; $\sigma_j = \sigma_j(\omega, N_j)$, $\sigma_j^0 = \sigma_j^0(\omega, N_j)$, $\sigma_j^\infty = \sigma_j^\infty(\omega, N_j)$ – базовые функции для симметричного нагружения, пульсирующего растяжения ($R = 0$) и пульсирующего сжатия ($R = \infty$) соответственно. Согласно известным опытным данным в диапазоне $R \in [0, 5, 1)$ имеет место циклическая ползучесть рассмотренных титановых сплавов. Например, для сплава ВТ6 в этом диапазоне максимальная деформация достигает 4%, максимальное напряжение цикла практически не зависит от числа циклов и близко к пределу текучести сплава. Изменяется характер процесса: определяющим становится развитие процесса вязкого разрушения, характерного для процессов ползучести.

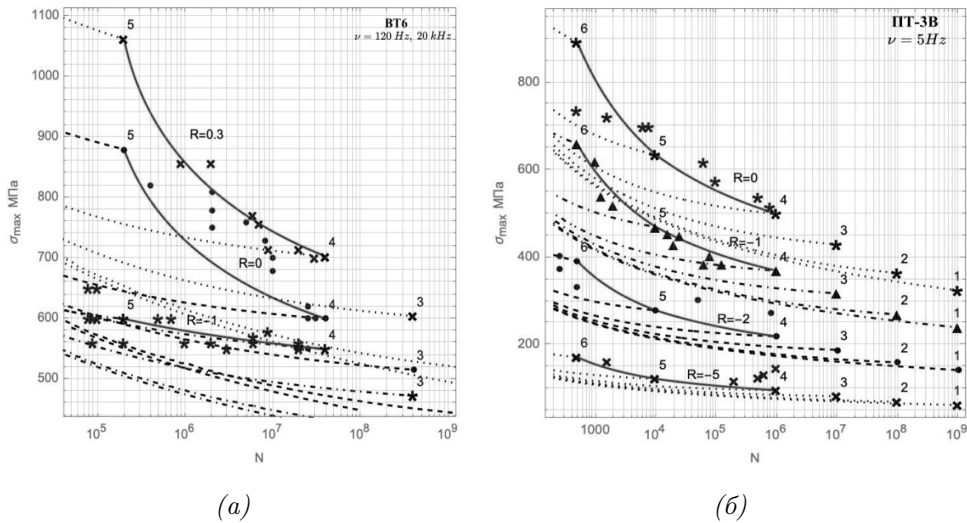


Рис. 1. Кривые усталости по уровням дефектности (пунктирные линии) и по макроразрушению (сплошные линии) для титанового сплава (а) ВТ6 и (б) ПТ-3В в координатах $N, \sigma_{\max}$ при различных значениях R и опытные данные [4,5]

Построены области развития и кривые усталости по макроразрушению микро-, мезо- и макродефектов и кривые усталости по уровням дефектности для титановых сплавов ВТ1-0, ВТ3-1, ВТ6, ВТ22, ПТ-3В, ТС17 при симметричном нагружении и разных частотах [3-5]. Получены расчетные кривые усталости по уровням дефектности и по макроразрушению для сплавов: ВТ1-0 при $R = -1, 3, \infty$ ($\nu = 100$ Гц), ВТ6 при $R = -1, 0, 0,3$ ($\nu = 120$ Гц, 20 кГц), ПТ-3В при $R = -5, -2, -1, 0$ ($\nu =$

5 Гц), удовлетворительно соответствующие имеющимся опытным данным. Максимальное значение напряжения цикла $\sigma_{\max}$ для сплава ВТ6 при $R = 0,3$, в среднем, увеличивается на 15% по сравнению с симметричным циклом при одинаковых долговечностях. Для сплава ПТ-3В наблюдается уменьшение $\sigma_{\max}$ при $R = -5$, примерно в 3,8 раза, по сравнению с симметричным циклом при одинаковых долговечностях. Для сплава ВТ3-1 при циклическом сжатии $R = 3$ $\sigma_{\max}$ увеличивается, в среднем, в два раза по сравнению с симметричным циклом нагружения при одинаковых долговечностях.

В докладе представлен метод построения кривых многоциклового усталости по уровням дефектности в зависимости от асимметрии цикла.

1. Завойчинская Э.Б. Долговечность конструкционных материалов при переменном нагружении / Э.Б. Завойчинская // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. – 2025. – № 1. – С. 84–95. – DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-1-11.
2. Завойчинская Э.Б. Определение долговечности по уровням дефектности при одноосном нагружении титановых сплавов различных классов во всем диапазоне коэффициентов асимметрии цикла / Э.Б. Завойчинская, Г.Е. Лавриков // Современные методы и технологии создания и обработки материалов. – 2024. – Т. 1. – С. 50–62.
3. Нарыкова М.В. Долговечность титана ВТ1-0 в различных структурных состояниях / М.В. Нарыкова, А.Г. Кадомцев, В.И. Бетехтин // Актуальные вопросы прочности: сб. тез. LXIV междунар. конф. – Екатеринбург: Уральский гос. горный университет. – 2022. – С. 101–102.
4. Peters J.O. On the application of the Kitagawa–Takahashi diagram to foreign-object damage and high-cycle fatigue / J.O. Peters, B.L. Boyce, X. Chen, J.M. McNaney, J.W. Hutchinson, R.O. Ritchie // Eng. Fracture Mech. – 2002. – № 69. – P. 1425–1446. – DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00152-7.
5. Багмутов В.П. Усталостная прочность при отрицательных значениях коэффициента асимметрии стали 45 и титанового сплава ПТ-3В / В.П. Багмутов, В.И. Водопьянов, О.В. Кондратьев, К.А. Бадиков // Изв. ВолгГТУ. – 2015. – № 5 (160). – С. 69–73.

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ И ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ

Калоеров С.А., д-р физ.-мат. наук, проф., **Гапотченко Я.И.**

Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

kaloerov@mail.ru, yakov.gapotchenko@gmail.com

Введение. В качестве элементов различных конструкций современной техники используются упругие тела с отверстиями и трещинами из анизотропных композиционных материалов, находящиеся в условиях антиплоской деформации. Под действием различных внешних сил около таких отверстий и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании конструкций. И здесь наиболее полную и достоверную информацию можно получить, используя методы определения напряженно-деформированного состояния с помощью комплексных потенциалов. В данной работе с использованием комплексного потенциала антиплоской деформации [1] дано решение задачи об антиплоской деформации тела с полостями произвольного поперечного сечения.

Постановка и метод решения. Рассмотрим отнесенное к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ находящееся в условиях антиплоской деформации многосвязное тело с цилиндрическими полостями с вдоль направления оси Oz , имеющее в каждой точке плоскость упругой симметрии, перпендикулярную оси Oz . Будем считать, что в общем случае поперечным сечением тела является многосвязная область S , ограниченная внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l, b_l (рис. 1). В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l параметрические уравнения эллипсов будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат Oxy имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

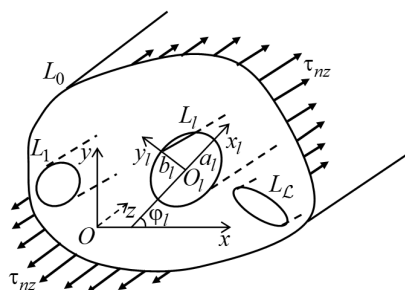


Рис. 1

где θ – параметр параметрического задания эллипса L_l , изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки.

Используя свойства комплексного потенциала антиплоской деформации и методы конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{3l}| \geq 1$ на внешности контуров L_{3l} , соответствующих контурам L_l при аффинных преобразованиях $z_3 = x + \mu_3 y$, где μ_3 – корень известного характеристического уравнения антиплоской деформации [1],

$$z_3 = z_{3l} + R_{3l} \left(\zeta_{3l} + \frac{m_{3l}}{\zeta_{3l}} \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z_{3l} &= x_{0l} + \mu_3 y_{0l}, \\ R_{3l} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)) / 2, \\ m_{3l} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)) / 2R_{3l}, \end{aligned} \quad (4)$$

для комплексного потенциала получим выражение

$$\Phi_3(z_3) = \Gamma_3 z_3 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \quad (5)$$

где Γ_3 – постоянная, определяемые из условий загрузки тела на бесконечности

$$\varphi_{3ln}(z_3) = \frac{1}{\zeta_{3l}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (6)$$

a_{3ln} – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$). Если этим условиям удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [2], то определение этих постоянных сводится к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, что решается методом сингулярных разложений.

Были проведены многочисленные исследования напряженного состояния тела с полостями различной конфигурации, сочетания и взаиморасположения. На рис. 2 для случая антиплоской деформации усилиями $\tau_{yz}^\infty = \tau_y$ тела с двумя одинаковыми круговыми полостями радиуса a_1 и центральной трещиной между ними длины $2a_1$, для некоторых значений отношения модулей сдвигов G_{xz}/G_{yz} изображены графики распределения напряжений τ_{sz} около контура L_1 на площадках, нормальных контуру, когда s/a_1 равны ∞ (сплошные линии), 1 (штриховые линии) и 0, 1 (штрих-пунктирные линии). Как видно, при сближении трещины с поверхностями полостей значения напряжений около полостей в небольшой

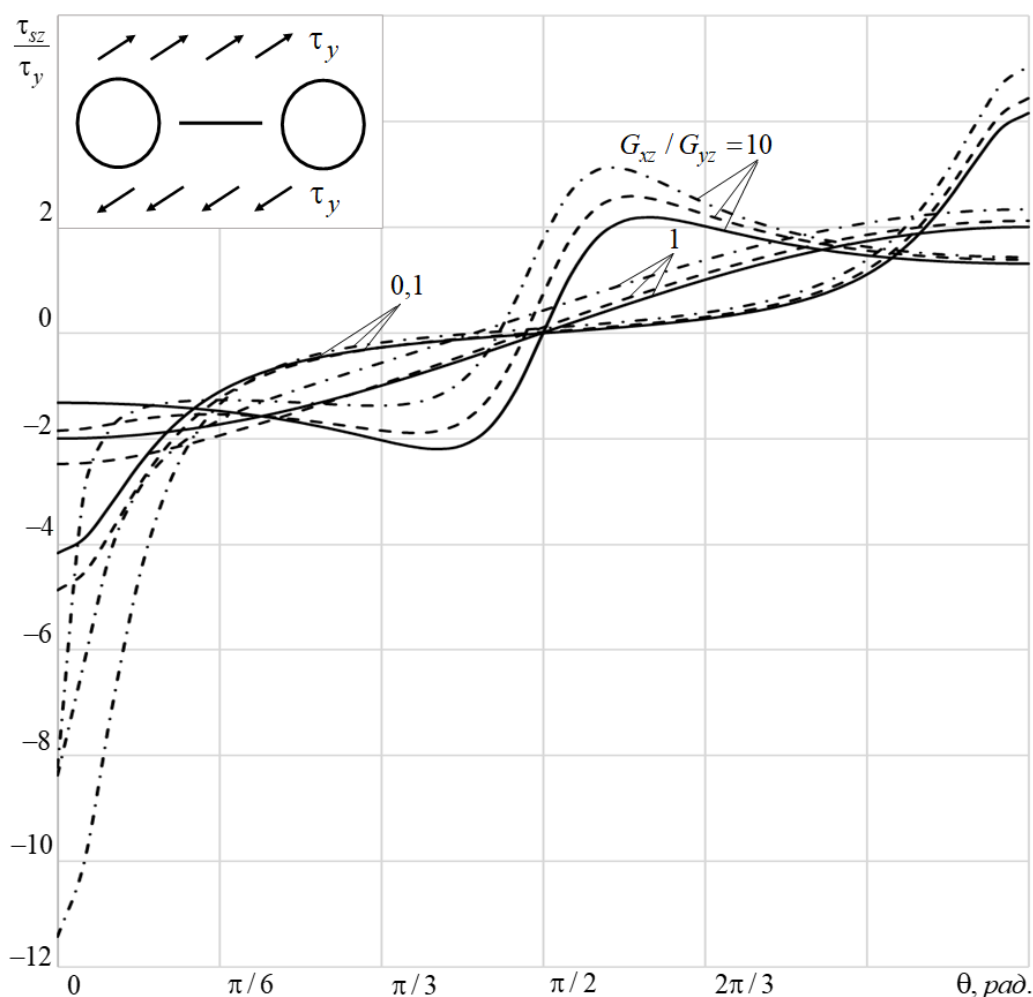


Рис. 2

окрестности перемычки, резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах; при этом значительно растет и КИН для концов трещины.

Как показывают результаты расчетов, при постоянной длине перемычки между отверстиями укорочение длины разреза между отверстиями не приводит к значительным изменениям напряжений около отверстий.

1. Горянская Е.С. Антиплоская деформация многосвязного анизотропного тела с продольными полостями и плоскими трещинами / Е.С. Горянская, С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 56–62.
2. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3(48). – С. 103–116.

ИЗГИБ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЬЕЗОПЛИТЫ С УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Калоеров С.А., д-р физ.-мат. наук, проф., **Ермаков О.Э.**

Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

kaloerov@mail.ru

Введение. Пластинки из пьезоматериалов получили широкое применение при изготовлении элементов различных конструкций современной техники. Часто они содержат отверстия, трещины, инородные включения и находятся в условиях изгиба тонких плит. Под действием различных механических сил и электромагнитных полей вблизи этих отверстий, трещин и включений возникают высокие концентрации моментов (напряжений), что может привести к разрушению конструкций и это необходимо учитывать при проектировании конструкций. Наиболее достоверные результаты при определении электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) многосвязных тонких плит, как показывают исследования, получаются при решении задач с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [1]. В данной работе с использованием этих функций решена задача о напряженном состоянии плиты с эллиптическими и прямолинейными упругими включениями.

Постановка и метод решения задачи.

Отнесем к прямоугольной системе координат Oxy электромагнитоупругую тонкую плиту, содержащую эллиптические отверстия с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и полуосями a_l, b_l (рис. 1). В отверстия вложены включения из других пьезоматериалов таким образом, что они находятся с плитой в условиях идеального электромагнитоупругого контакта. Если включение переходит в линейное, его можно рассматривать как эллиптическое, у которого $b_l = 0$. Обозначим бесконечную многосвязную область, ограниченную контурами L_l через S , области включений – через $S^{(l)}$. Для каждого включения введем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l так, что в этих системах и в основной системе координат уравнения эллипсов имеют вид

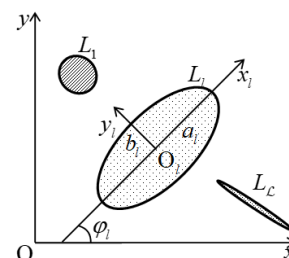


Рис. 1

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta; \quad (1)$$

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

где φ_l – угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l} , y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; θ – параметр, изменяющийся в интервале от 0 до 2π . На бесконечности плита находится под действием механических моментов M_x^∞ , M_y^∞ , H_{xy}^∞ и моментов индукций M_{dx}^∞ , M_{dy}^∞ , M_{bx}^∞ , M_{by}^∞ .

Используя свойства комплексных потенциалов и методы конформных отображений, для комплексных потенциалов задачи получим выражения [2]

$$\begin{aligned} W_k''(z_k) &= \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kln}(z_k) a_{kln}, \\ W_k^{''(l)}(z_k^{(l)}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn}^{'(l)}(z_k^{(l)}) a_{kn}^{(l)}; \\ \varphi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\ \varphi_{kn}^{'(l)}(z_k^{(l)}) &= n \left(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)} \right)^{n-1} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \end{aligned} \quad (3)$$

в которых Γ_k – известные постоянные, определяемые по значениям моментов на бесконечности [2]; ζ_{kl} – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей

$$\begin{aligned} z_k &= z_{kl0} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}); \\ z_{kl0} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2, \\ m_{kl} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2R_{kl}; \end{aligned} \quad (4)$$

все величины со значком (l) сверху относятся к включению $S^{(l)}$; a_{kln} и $a_{kn}^{(l)}$ – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах контактов плиты S и включений $S^{(l)}$. Удовлетворение этим условиям осуществляется обобщенным методом наименьших квадратов, что приводит к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. После определения указанных неизвестных постоянных по комплексным потенциалам можно найти изгибающие моменты и моменты индукций и напряженностей в любой точке плиты.

Описание результатов исследований. При проведении численных исследований упругие свойства материала каждого включения связывалось со свойствами материала плиты соотношениями $s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} s_{ij}$, где $\lambda_s^{(l)}$ – параметры, связывающие соответствующие постоянные материалов бесконечной плиты с областью S и включений с областями $S^{(l)}$.

На рис. 2 для случая изгиба моментами $M_y^\infty = m_y$ пьезоплиты с двумя одинаковыми круговыми упругими включениями радиуса a_1 на расстоянии $s = 0, 1$ (сплошные линии) и $s = \infty$ (штриховые) при некоторых значениях параметра $\lambda_s^{(l)}$ приведены графики распределения моментов вблизи левого включения.

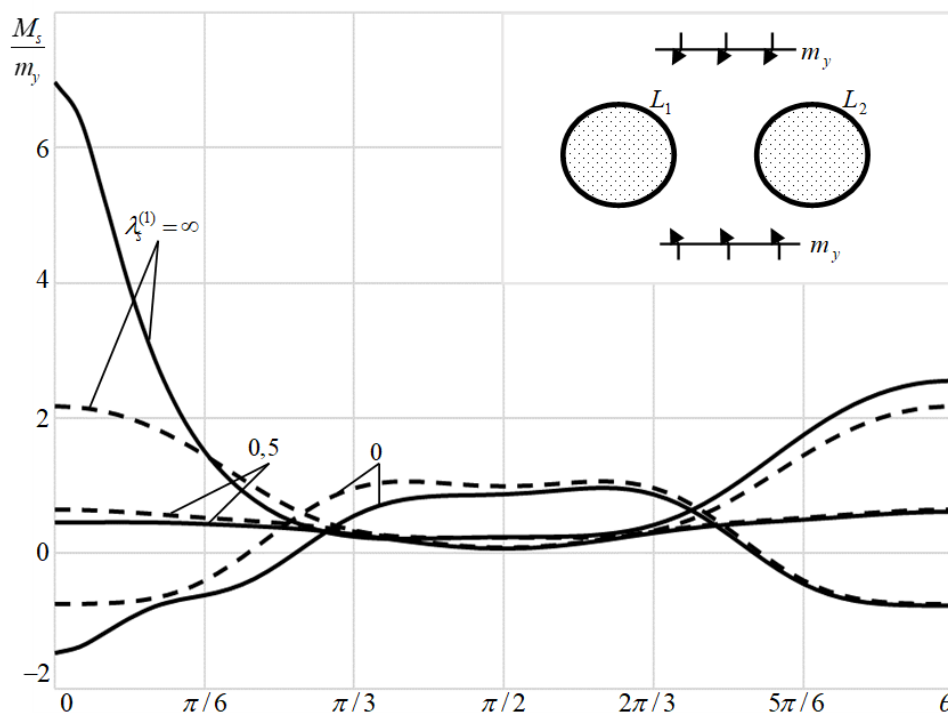


Рис. 2

Как следует из данных рис. 2, с уменьшением расстояния s между включениями значения моментов M_s в плите около контуров включений резко изменяются вблизи точек перемены и несколько меньше в зонах противоположной перемены. При этом, с уменьшением жесткости включений, значения моментов M_s растут.

1. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
2. Калоеров С.А. Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Прикладная математика и техн. физика. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 143–155.

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ В ЭЛЕКТРОМАГНИТОВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКЕ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

Калоеров С.А., д-р физ.-мат. наук, проф., **Полянский М.А.**

Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

kaloerov@mail.ru, m4xpolyan@yandex.ru

Введение. В различных отраслях в качестве элементов конструкций широко используются пластинки из пьезоматериалов с отверстиями и трещинами, около которых возникают высокие концентрации напряжений, которые могут приводить к разрушению конструкций. При этом в вязкоупругих пластинках эта концентрация с течением времени после приложения нагрузки может существенно возрастать. Все это нужно учитывать при проектировании конструкций. Поэтому важной задачей является решение задачи электромагнитовязкоупругости для пластинки с произвольными отверстиями и трещинами. При этом достаточно достоверные результаты по определению электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) получаются при решении задачи с использованием комплексных потенциалов и метода малого параметра [1, 2]. Здесь этим подходом решена задача о действии сосредоточенных сил в пластинке с произвольными отверстиями и трещинами.

Постановка и метод решения задачи.

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy бесконечную пьезопластинку, занимающую многосвязную область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1) с полуосями a_l, b_l . Если отнести эти контуры к локальным системам координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l , то в локальной и основной системах координат их параметрические уравнения имеют соответственно вид

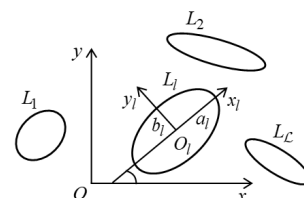


Рис. 1

Если отнести эти контуры к локальным системам координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l , то в локальной и основной системах координат их параметрические уравнения имеют соответственно вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

где θ - параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} - координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l - угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки. В частных случаях

могут переходить в прямолинейные разрезы-трещины. Пластика находится под действием сосредоточенных сил $P_r^0 (X_r^0, Y_r^0)$, приложенных в произвольных точках пластинки $z_r^0 (x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$).

Если для решения задачи использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругости $\Phi_k (z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$, где μ_k – корни известного характеристического уравнения, и метод малого параметра, в качестве которого брать изменение коэффициента Пуассона материала пластинки, то эти функции представляются рядами вида [2]

$$\Phi_k (z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk} (z_k), \quad (3)$$

в которых $\Phi_{jk} (z_k)$ – комплексные потенциалы приближений [2], причем в рассматриваемом случае

$$\Phi_{jk} (z_k) = \sum_{r=1}^R A_{jkr}^0 \ln (z_k - z_{kr}^0) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} (z_k) a_{jkl n}, \quad (4)$$

где A_{jkr}^0 – известные постоянные, определяемые из решения систем линейных алгебраических уравнений 8-го порядка;

$$\varphi_{kln} (z_k) = \zeta_{kl}^{-n}, \quad (5)$$

ζ_{kl} (причем $|\zeta_{kl}| \geq 1$) – функции, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}); \quad (6)$$

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2, \quad (7)$$

$$m_{kl} = (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2R_{kl};$$

$a_{jkl n}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, k = \overline{1, 4}, l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots$) – неизвестные постоянные, которые определяются из граничных условий на контурах L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Удовлетворение этим условиям обобщенным методом наименьших квадратов приводит к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, которую решим методом сингулярных разложений. После этого постоянные $a_{jkl n}$, а следовательно, и комплексные потенциалы (3) будут известными, и по ним найдем основные характеристики ЭМУС в любой момент времени.

Описание результатов численных исследований. Проведены многочисленные исследования для пластин из различных пьезоматериалов с круговыми отверстиями или трещинами. Некоторые из них приведены на рис. 2, где для некоторых значений длины l краевого разреза,

изображены графики распределения напряжений σ_s около контура отверстия при действии одной (рис. 2, а) или двух (рис. 2, б) сосредоточенных сил, в начальном (сплошные линии) и стационарном (пунктирные линии) состояниях.

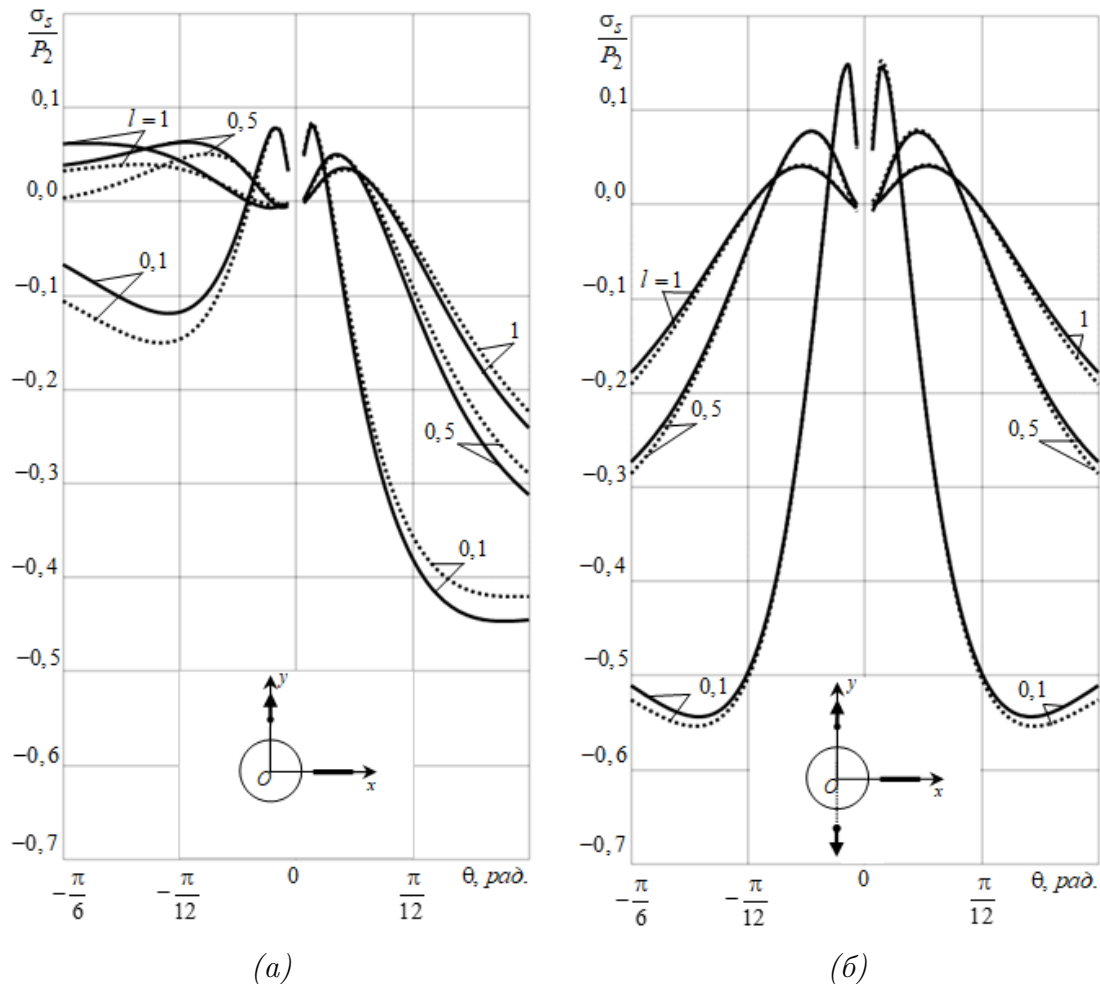


Рис. 2

Как видно из рис. 2, при сближении разреза к контуру отверстия наблюдаются значительные изменения значений напряжений в точках перемены между отверстием и разрезом, существенных изменений этих величин в остальных зонах около отверстия не наблюдается.

1. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитовязкоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
2. Калоеров С.А. Решение задачи о вязкоупругом состоянии многосвязной пьезопластинки / С.А. Калоеров, М.А. Полянский // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2024. – № 1. – С. 3–27.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПОЛОСЫ С ОТВЕРСТИЯМИ, ТРЕЩИНАМИ И ВЫЕМАМИ

Калоеров С.А., д-р физ.-мат. наук, проф., **Сероштанов А.В.**

Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

kaloerov@mail.ru, aleks.serosht@gmail.com

В используемых в качестве элементов различных конструкций современной техники тонких плитах с отверстиями и трещинами из пьезоматериалов часто возникает высокая концентрация напряжений, приводящая к их разрушению, что нужно учитывать при проектировании таких конструкций. И в этом направлении наиболее достоверные результаты при исследовании напряженно-деформированного состояния можно получить, используя комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит [1]. С использованием этих функций можно получить и решение практически важной задачи об изгибе многосвязной узкой пьезополосы.

Пусть полоса занимает область, ограниченную прямолинейными границами L^+ (верхней), L^- (нижней) и контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l (рис. 1), которые в частных случаях могут переходить в прямолинейные разрезы-трещины, пересекаться между собой. Если плиту отнести к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полосы и осью Ox , параллельной прямолинейным границам и отстоящей от L^+ , L^- соответственно на расстояниях h^+ и h^- , и выбрать локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l , отсчитываемых от положительного направления Ox против часовой стрелки, то в системе Oxy уравнения L_l записываются в виде

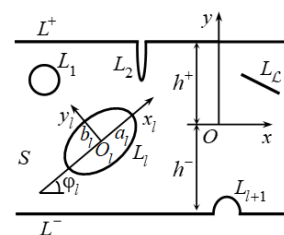


Рис. 1

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где $x_l = a_l \cos \theta$, $y_l = b_l \sin \theta$; φ_l - угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l} , y_{0l} - координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; θ - параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π .

Используя свойства комплексных потенциалов и методы конформных отображений, для искоемых функций данной задачи получим выражения [2]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) + b_{kln} \varphi_{kln}^+(z_k) + c_{kln} \varphi_{kln}^-(z_k)], \quad (1)$$

в которых Γ_k – постоянные, определяемые из условий загрузки полосы на бесконечности;

$$\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}, \quad \varphi_{kln}^+(z_k) = (\zeta_{kl}^+)^{-n}, \quad \varphi_{kln}^-(z_k) = (\zeta_{kl}^-)^{-n};$$

ζ_{kl} , ζ_{kl}^+ , ζ_{kl}^- – функции, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}),$$

$$z_k = -(\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} (\zeta_{kl}^+ + \overline{m_{kl}}/\zeta_{kl}^+),$$

$$z_k = (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^- + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} (\zeta_{kl}^- + \overline{m_{kl}}/\zeta_{kl}^-),$$

где $|\zeta_{kl}| \geq 1$, $|\zeta_{kl}^+| \geq 1$, $|\zeta_{kl}^-| \geq 1$;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2,$$

$$m_{kl} = (a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)) / 2R_{kl};$$

a_{kln} , b_{kln} , c_{kln} ($k = \overline{1, 4}$; $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = 1, 2, \dots$) – неизвестные постоянные, которые определяются из граничных условий на отрезках прямолинейных границ L^+ , L^- и контурах L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Удовлетворение этим условиям осуществляется обобщенным методом наименьших квадратов, что приводит к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений.

После определения указанных неизвестных коэффициентов разложений (1) по комплексным потенциалам можно найти изгибающие моменты, перерезывающие силы, моменты индукций и напряженностей в любой точке полосы.

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ).

Для случая действия на бесконечности механических изгибающих моментов M_x^∞ были проведены численные исследования по изучению закономерностей распределения изгибающих моментов в пьезополосе из композита CdSe – BaTiO₃.

Исследованиями установлено, что с приближением отверстия к одной из прямолинейных границ полосы (рис. 2) значения моментов в точках перемены и прямолинейной границы вблизи перемены резко возрастают, незначительно изменяясь в остальных точках. Приближение кругового отверстия с краевой трещиной к границе полосы (рис. 3) ведет к весьма существенному росту концентрации изгибающих моментов в точках перемены, около контура отверстия и около прямолинейной границы вблизи перемены. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в зоне перемены между отверстием и прямолинейной границей. Поэтому при исследованиях концентрации напряжений в элементах конструкций из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости, а нужно решать задачу электромагнитоупругости.

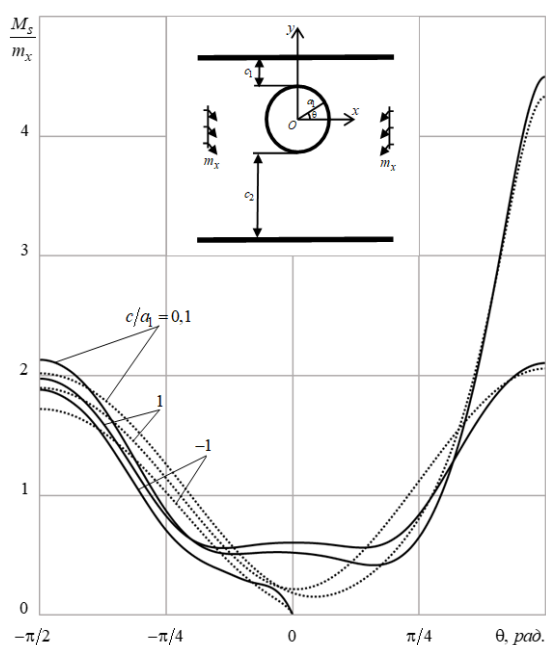


Рис. 2

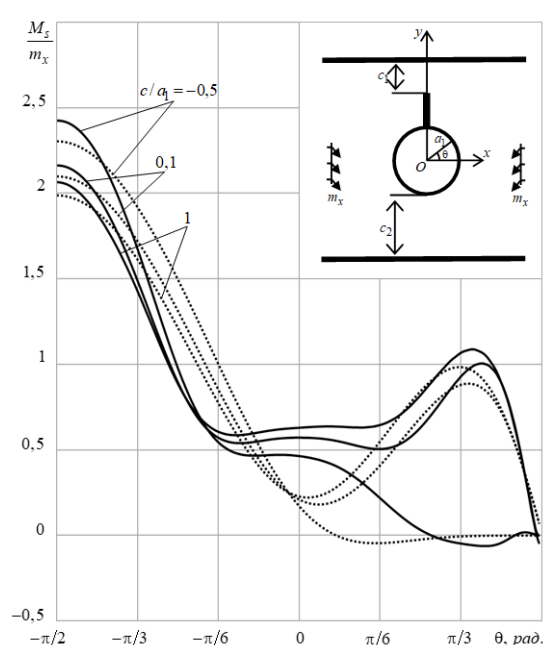


Рис. 3

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

1. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
2. Калоеров С.А. Решение задачи об изгибе многосвязной пьезополуплоскости с приближенным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2024. – № 1. – С. 28–41. – DOI: 10.5281/zenodo.12527097.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

Кириллова И.В., канд. физ.-мат. наук, доц.,

Коссович Л.Ю., д-р физ.-мат. наук, проф.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,

г. Саратов, РФ

iv@sgu.ru

Нестационарное напряжённо-деформированное состояние (НДС) тонкостенных конструкций существенно неоднородно по пространственным координатам и времени в различных участках фазовой плоскости. Такое свойство нестационарных волн определяет возможность и необходимость применения в математическом моделировании рассматриваемых процессов асимптотических методов как при разработке приближённых теорий, так и при решении краевых задач для составляющих НДС.

В случае статических задач асимптотическая теория упругих тонких оболочек разработана А.Л. Гольденвейзером [1]. При этом был определён математический аппарат построения приближенных двумерных теорий, обобщающих классическую теорию оболочек Кирхгофа-Лява, и теории погранслоёв, моделирующих работу принципа Сен-Венана, основанный на понятии показателей изменяемости НДС по пространственным координатам. При анализе колебаний пластин и оболочек было также введено понятие показателя динамичности НДС по времени.

Неоднородность нестационарного НДС тонких оболочек по координатам и времени не позволила использовать асимптотические методы, разработанные для задач статики и стационарной динамики. Поэтому в работе [2] была предложена схема расчленения нестационарного НДС, являющаяся вариантом метода сращиваемых разложений: в различных областях фазовой плоскости применяются различные составляющие. Полнота такой асимптотической теории определяется выводом асимптотически приближённых уравнений для всех составляющих НДС и доказательством существования областей согласования соседних составляющих, где решения совпадают с некоторой асимптотической погрешностью.

В рассматриваемой работе описывается развитие подхода, изложенного в [2]: используются такие компоненты нестационарного НДС, как безмоментная и моментная составляющие Кирхгофа-Лява, эллиптический погранслой в окрестности условного фронта волны Рэлея, симметричное и антисимметричное коротковолновые приближения, а так-

же симметричный и антисимметричный гиперболический погранслои в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.

Отметим, что принцип формирования нестационарного НДС полностью соответствует принципу Сен-Венана в динамике конструкций: способ приложения ударной нагрузки на торец определяет НДС не только в его окрестности (как это имеет место в статике и стационарной динамике), но и в малых окрестностях передних фронтов волн [3].

Асимптотически оптимальные уравнения для всех составляющих получены методом асимптотического интегрирования исходных точных трёхмерных уравнений теории упругости. Однако, можно выделить две группы составляющих по способу указанного интегрирования. К первой группе относятся безмоментная и моментная составляющие теории Кирхгофа-Лява. Здесь, как и в статике, процесс асимптотического интегрирования проводился для каждой составляющей в исходных координатах, масштабированных в соответствии со значениями показателей изменяемости и динамичности.

Для получения асимптотически оптимальных уравнений погранслоёв разработана методика асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений теории упругости в пространствах специальных систем координат, связанных с волновыми фронтами и квазифронтами. В случае погранслоёв гиперболического типа для оболочек вращения произвольной формы при действии распределённой по торцу ударной осесимметричной нагрузки сначала была создана асимптотическая модель, описывающая поведение поверхности передних волновых фронтов расширения и сдвига. В силу свойства тонкостенности эти фронты представлены образующими их повернутыми нормальными к срединной поверхности.

В случае эллиптического погранслоя, имеющего место в малой окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея, специальная переменная определяет отклонение текущей координаты от этого условного фронта. Поведение решения эллиптического погранслоя определяется разрешающими уравнениями эллиптического типа по продольной и нормальной координатам. В случае поверхностного ударного воздействия граничные условия на лицевых поверхностях представляются уравнениями гиперболического типа относительно граничных значений потенциальных функций. В случае ударных торцевых воздействий сначала строится задача для частного решения, удовлетворяющего только торцевому граничному условию и выделяется эквивалентная задача с граничными условиями на лицевых поверхностях.

Схемы расчленения нестационарного НДС определяются типом заданного граничного ударного воздействия. В случае продольных ударных торцевых воздействий тангенциального типа (воздействие типа LT)

нестационарное НДС определяется безмоментной составляющей теории Кирхгофа-Лява, параболическим погранслоем в малой окрестности квазифронта (фронта двумерной волны растяжения-сжатия), симметричной по нормальной координате коротковолновой высокочастотной составляющей и симметричным по нормальной координате гиперболическим погранслоем в малой окрестности фронта волны расширения. Полностью асимптотическая теория нестационарного НДС в оболочках вращения на примере ударного воздействия торцевым продольным усилием представлена в работе [4].

В случае продольных ударных торцевых воздействий изгибающего типа (воздействие типа LM) нестационарное НДС определяется изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява, коротковолновым высокочастотным приближением антисимметричного типа и антисимметричным гиперболическим погранслоем в малой окрестности фронта волны расширения.

В случае ударных воздействий нормального типа (воздействие вида NW) НДС определяется изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява, коротковолновым высокочастотным приближением антисимметричного типа, эллиптическим погранслоем в узкой области условного фронта поверхностных волн Рэлея и гиперболическим погранслоем антисимметричного типа в узкой окрестности фронта волны сдвига. Асимптотический метод решения краевых задач для эллиптического погранслоя описан в работе [5].

Отметим, что асимптотические методы решения краевых задач разработаны для всех основных составляющих нестационарного НДС в оболочках вращения произвольной формы. Основаны они на следующем свойстве: изменяемость по продольной координате моментной составляющей и погранслоев всех видов для рассматриваемого класса оболочек гораздо выше изменяемости геометрических параметров. Поэтому сначала решаются базовые задачи для цилиндрических оболочек с использованием интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по продольной координате с применением различных приближенных асимптотических методов обращения изображений. На втором этапе решаются уже краевые задачи для оболочек произвольной формы, основанные на применении метода экспоненциальных представлений в пространстве преобразования Лапласа. В случае безмоментной составляющей используется простейший метод прифронтной асимптотики.

Универсальность разработанного асимптотического подхода позволяет решать аналогичные задачи для тонкостенных оболочек с разными геометрическими и механическими свойствами при действии ударных нагрузок разных типов.

1. *Гольденвейзер А.Л.* Теория тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
2. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек / Л.Ю. Коссович. – Саратов, 1986. – 176 с.
3. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны / Л.И. Слепян. – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.
4. *Kirillova I. V.* An asymptotic model for the nonstationary waves in the shells of revolution initiated by the LT type edge shock loading / I.V. Kirillova, L.Y. Kossovich // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. – Cham: Springer Nature Switzerland AG. – 2025. – P. 315–342. – (Advanced Structured Materials, Vol. 223).
5. *Кириллова И.В.* Асимптотический метод в задачах об эллиптическом погранслое в оболочках вращения при ударных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова // Изв. РАН. МТТ. – 2025. – № 1. – С. 158–169. – DOI: 10.31857/S1026351925010085

УДК 615.849

УЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОЯ СО СВОБОДНЫМ ТЕПЛООБМЕНЕМ НА ГРАНЯХ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ

Малютина Т.П.^{1,2}, канд. техн. наук, доц.,
Павлыш В.Н.³, д-р техн. наук, проф., **Полянский Д.Д.**²,
Сторожев С.В.^{1,2}, д-р техн. наук, доц.

¹Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

²Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка, РФ

³Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, РФ

t.p.malutina@donnasa.ru

Исследования различных вариантов расчетных моделей определения прочностных характеристик тонких пластин из электропроводящих материалов при их индукционном разогреве обусловлены чрезвычайно широким кругом их востребованности во многих научно-технических отраслях и возрастанием требований к мере адекватности результатов проектных расчетов, в то время как исходные физико-механические параметры материалов пластин и характеристики процессов их индукционного нагрева в реальных ситуациях обладают весьма высокой степенью количественной параметрической неопределенности в виде разбросов данных экспериментальных замеров, технологических допусков в процессах изготовления, а также вариации значений их характеристик, вводимых в расчетные модели на базе субъективных экспертных оценок. В ситуациях отсутствия отвечающей требованиям статистической корректности

исходной информации о разбросах параметров данных моделей, расчетный анализ их параметрической неопределенности может быть реализован путем применения нечетко-множественных методов.

Вариантом модели указанного типа, исследуемым в данной работе, является рассмотренная в детерминистической постановке в работе [1] расчетная модель обусловленного индукционным разогревом термонапряженного состояния тонкой изотропной электропроводящей пластины (слоя) с жестко закрепленными граничными плоскостями, на которых выполняются идеальные условия теплоотдачи, при задании в окрестности одной из граней периодической во времени касательной компоненты вектора напряженности осциллирующего внешнего электрического поля.

Пластина имеет толщину h , занимает в нормированных пространственных декартовых координатах Ox_1x_2z область $V = \{(x_1, x_2) \in R^2\}, \{0 \leq z \leq 1\}$; изготовлена из материала с параметром магнитной проницаемости μ , коэффициентом электропроводности σ , коэффициентом теплопроводности λ , коэффициентом температуропроводности a , коэффициентом линейного теплового расширения α_T , модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν . Характеристиками внешнего электромагнитного воздействия являются амплитуда E_0 и частота ω осциллирующего электрического поля. При исследовании детерминистического варианта рассматриваемой модели для температурного поля в пластине $T(z, \tau)$ получено представление [1]

$$\begin{aligned} T(z, \tau) = \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda, a, E_0, \omega) = & T_* \delta_0^2 (1 - z - 2(ch((1 - z)\delta_0^{-1} - \\ & - \cos((1 - z)\delta_0^{-1}))e^{-\gamma_*} - \\ & - 2\gamma_* \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^2 \pi^2 (n^2 \pi^2 + \gamma_*^2))^{-1} (\sin n^2 \pi^2 (1 - z) - \\ & - 4n^2 \pi^2 e^{-\gamma_*} \sin n^2 \pi^2 z) \cdot \exp(-n^2 \pi^2 \tau)), \end{aligned} \quad (1)$$

в котором

$$T_* = \sigma E_0^2 h^2 (2\lambda)^{-1}, \quad \delta_0 = \delta/h = (2\mu\omega \sigma h^2)^{1/2}, \quad \gamma_* = 1/\delta_0, \quad \tau = ath^{-2}, \quad (2)$$

а поля напряжений соответственно описываются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(z, \tau) = \sigma_{22}(z, \tau) = \Phi_\sigma(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda, a, \alpha_T, E, \nu, E_0, \omega) = \\ = -\alpha_T E (1 - \nu)^{-1} T(z, \tau), \quad \sigma_{zz}(z, \tau) = \sigma_{z1}(z, \tau) = \sigma_{z2}(z, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Сложность полномасштабного изучения меры влияния разбросов значений исходных параметров при анализе моделей рассматриваемого типа

на основе методов вероятностно-стохастического анализа вызвана отсутствием, в большинстве случаев, реальной информации корректной статистической природы об указанных показателях неконтрастности исходных данных в форме однородных частотных выборок большой мощности и природой других указанных выше факторов неопределенности. В этой ситуации одним подходом к решению проблемы учета параметрической неопределенности в моделях термонапряженного состояния тонких пластин при индукционном нагреве может служить применение методов нечетко-множественного количественного анализа [2, 3] на базе концепции перехода к нечетко-множественным аргументам в распространяемых на этот тип переменных функциональных расчетных соотношениях детерминистических версий данных моделей. Исходя из предположения об учете неконтрастности всех исходных физико-механических и геометрических параметров модели $h, \mu, \sigma, a, \alpha_T, E, \nu, E_0, \omega$ вводятся их описания нечетко-множественными величинами $\tilde{h}, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \tilde{a}, \tilde{\alpha}_T, \tilde{E}, \tilde{\nu}, \tilde{E}_0, \tilde{\omega}$ в виде нормальных треугольных нечетких чисел, представляемых разложениями по множествам α – срезов [2, 3]

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \underline{h}_\alpha = (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, \bar{h}_\alpha = \alpha h_2 + (1 - \alpha)h_3; \\ \tilde{\mu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha], \underline{\mu}_\alpha = (1 - \alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2, \bar{\mu}_\alpha = \alpha\mu_2 + (1 - \alpha)\mu_3; \dots; \\ \tilde{\omega} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha], \underline{\omega}_\alpha = (1 - \alpha)\omega_1 + \alpha\omega_2, \bar{\omega}_\alpha = \alpha\omega_2 + (1 - \alpha)\omega_3.\end{aligned}\quad (4)$$

В форме разложений по α – срезам определяются и эндогенные нечетко-множественные параметрические зависимости $\tilde{T}(z, \tau), \tilde{\sigma}_{11}(z, \tau), \tilde{\sigma}_{22}(z, \tau)$:

$$\begin{aligned}\tilde{T}(z, \tau) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_\alpha(z, \tau), \bar{T}_\alpha(z, \tau)], \\ \tilde{\sigma}_{11}(z, \tau) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{11\alpha}(z, \tau), \bar{\sigma}_{11\alpha}(z, \tau)], \\ \tilde{\sigma}_{22}(z, \tau) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{22\alpha}(z, \tau), \bar{\sigma}_{22\alpha}(z, \tau)].\end{aligned}\quad (5)$$

С учетом справедливых во всех областях определения функциональных зависимостей (1), (3) оценок

$$\begin{aligned}\partial\Phi_T/\partial E_0 &\geq 0, \partial\Phi_T/\partial\lambda \leq 0, \\ \partial\Phi_\sigma/\partial E_0 &\geq 0, \partial\Phi_\sigma/\partial\lambda \leq 0, \partial\Phi_\sigma/\partial\alpha_T \leq 0, \partial\Phi_\sigma/\partial E \leq 0, \partial\Phi_\sigma/\partial\nu \leq 0,\end{aligned}\quad (6)$$

нечетко-множественные расчетные соотношения модели могут быть, в конечном счете, получены в виде

$$\begin{aligned} \underline{T}_\alpha(z, \tau) &= \inf_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha]}} \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \overline{\lambda}_\alpha, a, \underline{E}_{0\alpha}, \omega), \\ \overline{T}_\alpha(z, \tau) &= \sup_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha]}} \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \underline{\lambda}_\alpha, a, \overline{E}_{0\alpha}, \omega); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{\alpha jj}(z, \tau) &= \inf_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha]}} \Phi_\sigma(z, \tau, h, \mu, \sigma, \overline{\lambda}_\alpha, a, \overline{\alpha}_{T\alpha}, \overline{E}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha, \underline{E}_{0\alpha}, \omega), \\ \overline{\sigma}_{\alpha jj}(z, \tau) &= \sup_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha]}} \Phi_\sigma(z, \tau, h, \mu, \sigma, \underline{\lambda}_\alpha, a, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, \overline{E}_{0\alpha}, \omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Применение (7) (8) решает задачу описания меры неопределенности эндогенных параметров рассматриваемой модели при задаваемых характеристиках разбросов значений исходных параметров.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Подстригач Я.С.* Термоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская. – Киев: Наукова думка, 1977. – 277 с.
2. *Нгуен Куок Ши.* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
3. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.

КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА С ОТВЕРСТИЯМИ, ТРЕЩИНАМИ И ВЫЕМАМИ

Мироненко А.Б., канд. физ.-мат. наук, **Сошина Е.И.**

Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

andreyandrey80@mail.ru, ye.soshyna.tuvm@yandex.ru

Введение. В качестве элементов современных конструкций часто используются упругие цилиндрические тела с продольными полостями, трещинами и выемами, находящиеся в условиях кручения. Под действием внешних крутящих моментов вблизи отверстий и трещин могут возникать большие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации соответствующих конструкций. Как показывают исследования, наиболее достоверные результаты при определении напряженно-деформированного состояния указанных тел получаются в случае использования в решениях задач комплексного потенциала кручения [1].

Постановка и метод решения задачи.

Рассмотрим в прямоугольной системе координат $Oxyz$ цилиндрическое тело из прямолинейно-анизотропного материала с продольными полостями, образующие которых параллельны оси цилиндра, вдоль которой направлена ось Oz системы координат (рис. 1). В поперечном сечении цилиндра будет многосвязная область S , ограниченная внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l, b_l . Внешняя поверхность цилиндра и поверхности полостей свободны от усилий, один из концов цилиндра жестко закреплен, на другом приложены усилия, приводящие к кручению цилиндра моментом M .

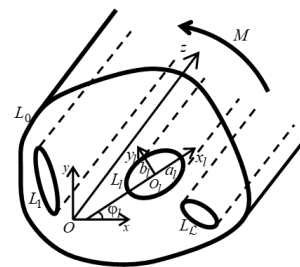


Рис. 1

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l и в основной системе координат $Oxyz$ параметрические уравнения эллипсов L_l имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

где θ – параметр, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; φ_l – угол между

положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки.

Если для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии цилиндра использовать комплексный потенциал кручения, то оно сводится к нахождению функции $\Phi_3(z_3)$ обобщенного комплексного переменного $z_3 = x + \mu_3 y$, где μ_3 – корень известного характеристического уравнения, из соответствующих граничных условий. Причем в данном случае этот комплексный потенциал имеет вид [2]

$$\Phi_3(z_3) = a_{300} + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \quad (3)$$

где

$$\varphi_{30n}(z_3) = z_3^n, \quad \varphi_{3ln}(z_3) = \frac{1}{\zeta_{3l}^n} (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (4)$$

ζ_{3l} – переменные, определяемые из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{3l}| \geq 1$ на внешности контуров L_{3l} ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$), соответствующих контурам L_l при аффинных преобразованиях $z_3 = x + \mu_3 y$, и имеющие вид

$$z_3 = z_{3l} + R_{3l} \left(\zeta_{3l} + \frac{m_{3l}}{\zeta_{3l}} \right), \quad (5)$$

в котором

$$\begin{aligned} z_{3l} &= x_{0l} + \mu_3 y_{0l}, \\ R_{3l} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{3l} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)}{2R_{3l}}; \end{aligned} \quad (6)$$

a_{3ln} – неизвестные постоянные, которые определим из граничных условий на контурах L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$). Удовлетворение этим условиям обобщенным методом наименьших квадратов приводит к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы методом сингулярных разложений постоянные a_{3ln} , а следовательно, и комплексные потенциалы (3) будут известными, и по ним можно вычислить напряжения и перемещения в любой точке цилиндра.

Описание результатов численных исследований. Были проведены многочисленные исследования напряженного состояния цилиндра с различными отверстиями, трещинами и выемами. На рис. 2 для кольцевого цилиндра из различных материалов (различных отношений коэффициентов деформаций a_{44}/a_{55}) с внешним контуром радиуса a_0 , внутренним концентрическим контуром радиуса $a_1 = 0,5a_0$ и центральной

трещиной длины $2a_2$, когда $a_2/a_0 = 0,22$ приведены графики распределения касательных напряжений τ_{sz} .

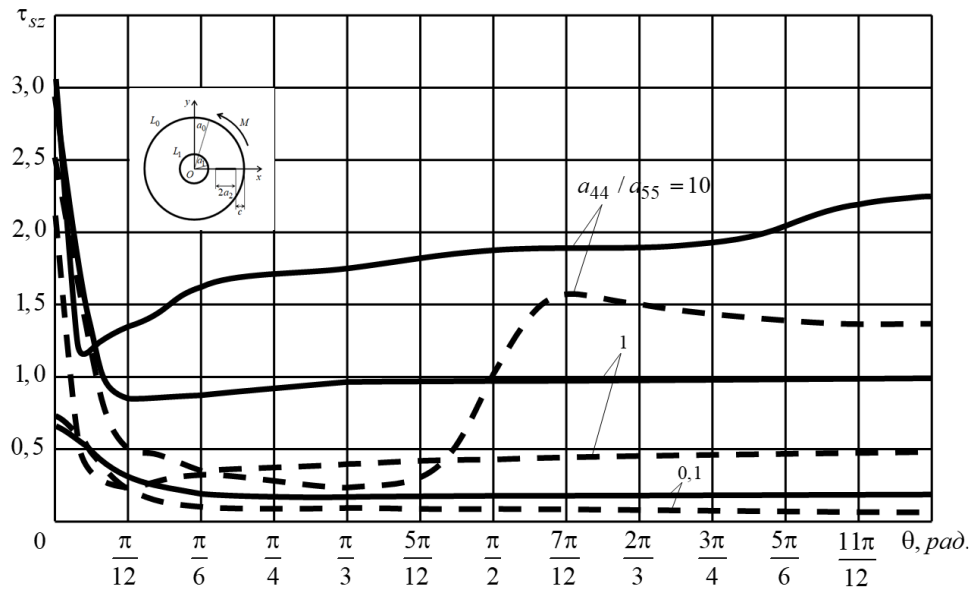


Рис. 2

Как видно из рис. 2 и других полученных результатов, с увеличением длины трещины между контурами концентрического цилиндра значения напряжений в зоне перемычки с трещиной резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах; особенно велики эти напряжения для больших значений a_{44}/a_{55} ; при выходе трещины на контуры кольца значения напряжений в зонах высокой их концентрации резко уменьшаются; при малых длинах трещины ее наличие не нарушает равномерного распределения напряжений около контуров кольца, и напряжения оказываются такими, как в цилиндре с центральной круговой полостью.

1. Горянская Е.С. Кручение анизотропных стержней с полостями и плоскими трещинами / Е.С. Горянская, С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 36–43.
2. Калоеров С.А. Кручение анизотропного цилиндра с продольными полостями и плоскими трещинами / С.А. Калоеров, Е.И. Сошина, А.Б. Мироненко // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2024. – № 3. – С. 108–122.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ПЛИТ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Мирончук А.И., канд. физ.-мат. наук
Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ
a.i.mironchuk@yandex.ru

Введение. Тонкие пластинки, находящиеся в условиях поперечного изгиба и называемые в этом случае тонкими плитами, находят широкое применение в авиастроении, приборостроении и в других областях современной техники. Зачастую эти плиты по технологическим или эксплуатационным причинам имеют отверстия, около которых при изгибе возникают высокие концентрации изгибающих моментов (а, следовательно, и напряжений), которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Для случая стационарного состояния, когда напряженно-деформированное состояние (НДС) многосвязных плит не изменяется со временем, даны решения различных задач инженерной практики. Но в реальных случаях НДС тел после приложения внешних воздействий с течением времени изменяется, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Для изгиба многосвязных плит с эллиптическими отверстиями и трещинами даны решения различных задач. Наиболее часто встречающиеся же случаи плит с криволинейными контурами не рассматривались.

Постановка и метод решения задачи.

Рассмотрим бесконечную тонкую вязкоупругую анизотропную многосвязную плиту с отверстиями произвольной формы и решение задачи вязкоупругости для такой плиты будем проводить, используя решение задачи для плиты с конечным числом эллиптических отверстий. В связи с этим рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy анизотропную тонкую плиту, занимающую бесконечную многосвязную область S (рис. 1), ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l, b_l , причем в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей вдоль осей эллипсов их параметрические уравнения будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат Oxy имеют вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

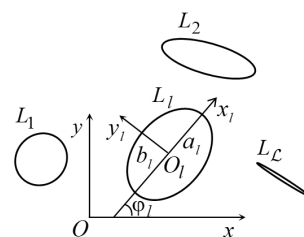


Рис. 1

где θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l} , y_{0l} – координаты начал локальных систем координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки. Будем предполагать, что на бесконечности заданы изгибающие моменты M_x^∞ , M_y^∞ и крутящий момент H_{xy}^∞ .

Рассматриваемую задачу будем решать методом малого параметра с использованием комплексных потенциалов. При таком подходе производные комплексных потенциалов теории изгиба тонких плит разлагаются в ряды по малому параметру вида

$$W'_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j W'_{jk}(z_k), \quad (3)$$

где λ – малый параметр, в качестве которого выбирается изменение во времени коэффициента Пуассона ν_{12} ; $W'_{jk}(z_k)$ – производные комплексных потенциалов приближений, имеющие в данном случае вид [1]

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} W'_{jkl}(z_k); \quad (4)$$

Γ_{jk} – постоянные, определяемые из условий загрузки плиты на бесконечности; $W'_{jkl}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$; μ_k – корни характеристического уравнения.

Для определения общего вида функции $W'_{jkl}(z_k)$ используем методы конформных отображений. Тогда для комплексных потенциалов (4) окончательно получим [2]

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{jkl n}, \quad (5)$$

где

$$\varphi_{kln} = 1/\zeta_{kl}^n \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2, \\ m_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2R_{kl};$$

$|\zeta_{kl}| \geq 1$, $a_{jkl n}$ – неизвестные коэффициенты рядов, которые определяются из известных граничных условий на контурах L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) обобщенным методом наименьших квадратов [2], что приведет к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом

сингулярных разложений. После нахождения неизвестных коэффициентов рядов (5) комплексные потенциалы (4) будут известными и по ним можно найти значения моментов в любой момент времени.

Описание результатов численных исследований. Для случая изгиба плиты с треугольным отверстием ABC моментами $M_y^\infty = m_y$ при $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$ на рис. 2 для некоторых значений угла α при вершине треугольника и для случая разреза изображены графики распределения вдоль стороны AB моментов M_s , соответствующих нормальным напряжениям σ_s на площадках, перпендикулярных этой стороне. Случай $\alpha = 0$ соответствует разрезу длины $2a_1$ вдоль оси Ox .

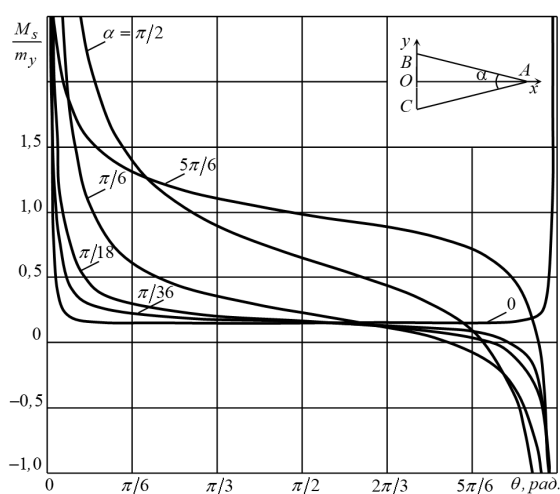


Рис. 2

Из данных рис. 2 и других полученных результатов видно, что при уменьшении угла α значения моментов вблизи вершины треугольника A растут, претерпевая незначительные изменения в других областях, включая даже боковые стороны треугольника за небольшой зоной от вершины угла треугольника. При малых ($\alpha < \pi/18$) значения изгибающих моментов в окрестности вершины треугольника получаются такими же, как в плите с одним прямолинейным разрезом. При переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов претерпевают значительные изменения, причем при $\pi/6 \leq \alpha \leq 2\pi/3$ эти изменения составляют более чем 10%. Так при $\alpha = \pi/6$ значения M_s в окрестности точки A увеличиваются на 10,815%, при $\alpha = \pi/3$ на 13,958%, при $\alpha = \pi/2$ на 16,928%, при $\alpha = 2\pi/3$ на 16,542%.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Калоеров С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 141–151. – EDN: YKVAEZ. – DOI: 10.15372/PMTF20170215
2. Калоеров С.А. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 456–464. – EDN: XHPYJL. – DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464.

СРАВНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ БЕЗ РАЗДЕЛЕНИЯ НА ТИП ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Назаров В.В., канд. техн. наук

НИИ механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, г. Москва, РФ

inmec130@mail.ru

Для описания длительной прочности при сложном напряженном состоянии используют разные эквивалентные напряжения [1], служащими инвариантными характеристиками тензора напряжений. В качестве классических эквивалентных напряжений рассматривают максимальное нормальное напряжение, напряжение Мизеса и удвоенное максимальное касательное напряжение. Из сравнения минимизированных суммарных погрешностей выбирают критериальное эквивалентное напряжение [2], которое приводит к минимальной суммарной погрешности. Кроме классических эквивалентных напряжений могут рассматриваться различные комбинации из классических эквивалентных напряжений [3, 4, 5, 6], а также комбинации из главных напряжений, где присутствует один и более материальных параметров. Среди сложных эквивалентных напряжений наиболее часто используется линейная комбинация от максимального нормального напряжения и напряжения Мизеса с одним материальным параметром. В статье [7] при описании процесса порообразования в условиях равного трехосного растяжения предложена нелинейная комбинация от главных напряжений с двумя материальными параметрами. Вместе с этим, при описании длительной прочности при равном двухосном растяжении автором данной работы предложено эквивалентное напряжение в виде корня n -степени из суммы n -степеней главных напряжений, где в зависимости от знака n возможны две разные ситуации в отношении значений времени в момент разрушения при одноосном и равном двухосном растяжениях.

При сложном напряженном состоянии опытные данные, как правило, получают на трубчатых образцах, где один из двух типов плоского напряженного состояния различают по знакам главных напряжений:

$$\sigma_1 > 0 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 < 0$$

(совместное растяжение с кручением)

$$\sigma_1 > 0 \quad \sigma_2 > 0 \quad \sigma_3 = 0$$

(совместное растяжение с воздействием внутреннего давления)

При обработке [2–6] экспериментальных данных результаты вычислений разделяют по типу плоского напряженного состояния. Как правило, экспериментальные исследования [8] ограничиваются результатами либо при $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ (чистое растяжение) и $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$ (растяжение + кручение), либо при $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ (чистое растяжение) и $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$ (растяжение + внутреннее давление). В работе [9] для жаропрочной стали 12X18H10T при 850°C результаты охватывают как опыты на чистое растяжение и растяжение с кручением, так на растяжение с воздействием внутреннего давления (рис. 1, а–б).

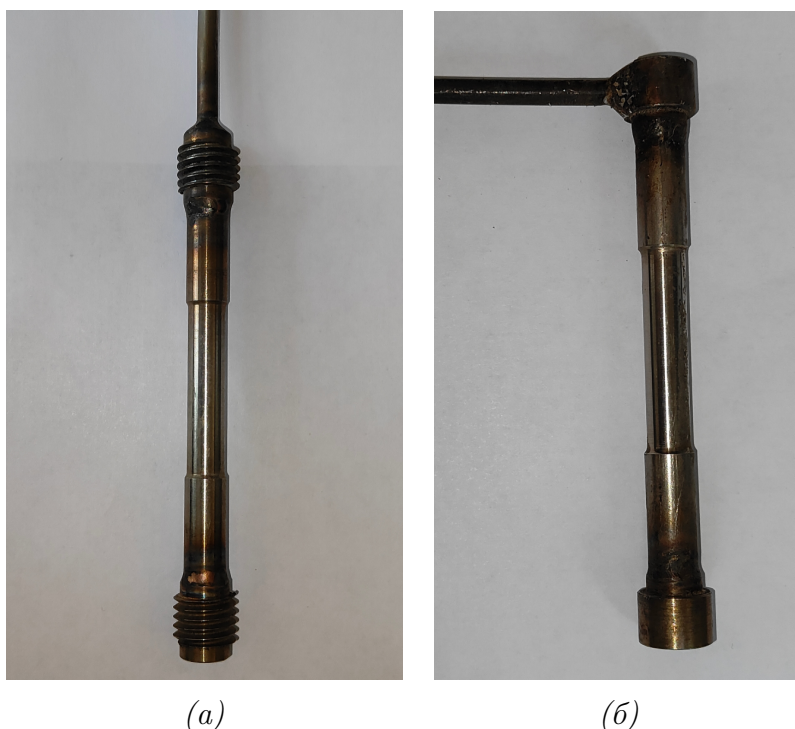


Рис. 1. Трубчатые образцы с разными захватами: а – в виде внешней резьбы; б – в виде гладкого выступа на торце, где подача газа происходит по приваренной трубке

Отличительная особенность данной работы состоит в том, что обработка проводилась по отношению ко всем экспериментальным данным [9] без разделения на тип плоского напряженного состояния.

Для описания длительной прочности использовалась дробно-степенная зависимость с четырьмя материальными параметрами, значения которых определялись из минимизации суммарной погрешности [10] экспериментальных данных, полученных при чистом растяжении. Те параметры, которые относятся к эквивалентным напряжениям, их значения определялись из минимизации суммарной погрешности экспериментальных данных, полученных при сложном напряженном состоянии. Между тем, учет экспериментальных данных, полученных при сложном напряженном состоянии, привел к некоторой корректировке значений параметров дробно-степенной зависимости (рис. 2).

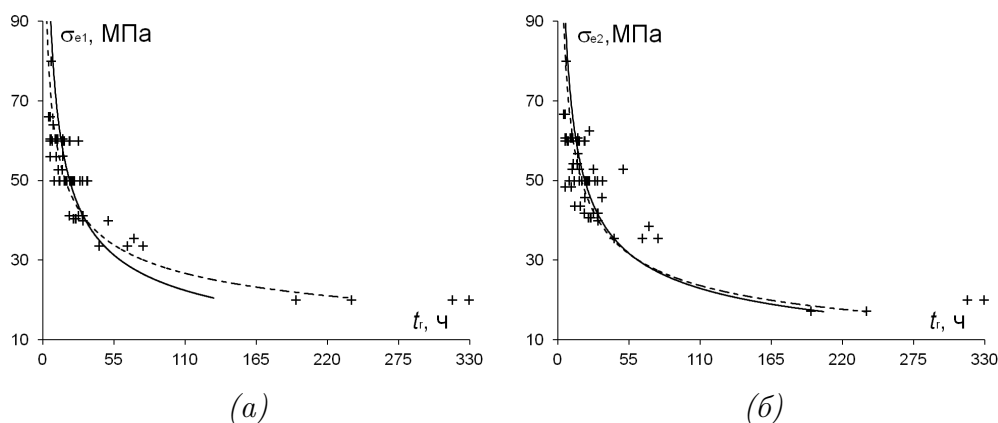


Рис. 2. Значки – экспериментальные данные,
сплошная кривая – дробно-степенная аппроксимация,
штриховая кривая – та же самая аппроксимация
с учетом корректировки материальных параметров:
 σ_{e1} – максимальное нормальное напряжение,
 σ_{e2} – напряжение Мизеса,
 t_r – время в момент разрушения

Из сравнения минимизированных суммарных погрешностей следует заключить, что при аппроксимации экспериментальных данных [10] без разделения на тип плоского напряженного состояния в качестве эквивалентного напряжения нужно использовать максимальное нормальное напряжение, а с выделением экспериментальных данных, полученных при двухосном растяжении, нужно использовать либо нелинейную комбинацию из главных напряжений [7], либо эквивалентное напряжение, предложенное автором данной работы.

Информация о финансовой поддержке. Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

1. Локощенко А.М. Эквивалентные напряжения в расчетах длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) / А.М. Локощенко // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, № 4–2. – С. 128–135.
2. Локощенко А.М., Анализ критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии / А.М. Локощенко, В.В. Назаров, Д.О. Платонов, С.А. Шестериков // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – № 2. – С. 139–150.
3. Локощенко А.М. Выбор критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии / А.М. Локощенко, В.В. Назаров / Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – № 7 (15). – С. 124–127.
4. Локощенко А.М. Оценка эквивалентных напряжений при анализе длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния / А.М. Локощенко // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 164–181.
5. Назаров В.В. Критерий длительной прочности при растяжении и кручении трубчатых образцов / В.В. Назаров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2014. – Т. 80, № 12. – С. 57–59.
6. Назаров В.В. Выбор сложного эквивалентного напряжения для двух различных вариантов плоского напряженного состояния / В.В. Назаров // Diagn. Resour. Mech. Mater. Struct. – 2021. – № 2. – С. 64–72.

7. *Kobayashi, H.* Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel / H. Kobayashi, R. Ohki, T. Itoh, M. Sakane // Eng. Fract. Mech. – 2017. – Vol. 174. – P. 30–43.
8. *Локощенко А.М.* Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) / А.М. Локощенко // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – № 3. – С. 116–136.
9. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность стали X18H10T в условиях сложного напряженного состояния / А.М. Локощенко, Е.А. Мякотин, С.А. Шестериков // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – № 4. – С. 87–94.
10. *Nazarov V.V.* Selecting a dependence for the approximation of experimental data on secondary creep and creep rupture strength / V.V. Nazarov // Diagn. Resour. Mech. Mater. Struct. – 2023. – No. 3. – P. 44–49.

УДК 539.376

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРОГА ПОЛЗУЧЕСТИ И ПРЕДЕЛА КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПРОЧНОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Назаров В.В., канд. техн. наук

НИИ механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, г. Москва, РФ

inmec130@mail.ru

В обзоре [1, 2] представлено современное состояние науки в области экспериментального исследования свойства ползучести металлических материалов, где перечислены публикации, в которых приведены результаты механических испытаний при одноосном растяжении и сложном напряженном состоянии. Отмечено, что появились новые работы, посвященные более детальному изучению механических свойств. Одна из таких работ [3] посвящена определению механических свойств жаропрочной стали 03X18H11 (рис. 1, а–б) в температурном диапазоне 25–1100°C.

Кривые ползучести (рис. 2) получены при условии постоянства растягивающего напряжения во времени, при этом, как правило, зависимости деформации от времени находят при условии постоянства осевой растягивающей силы во времени.

При температуре выше 700°C обнаружено влияние воздуха на ползучесть (рис. 2). Позже автор данной работы нашел и другие работы, которые, к сожалению, не вошли в обзор [1, 2]. В другой работе [4] исследовано влияние среды N₂ на ползучесть титанового сплава BT6 (рис. 2, а) при 500, 600 и 700°C. Установлено, что присутствие азота приводит к заметному увеличению времени в момент разрушения. И наконец, статьи [5, 6] посвящены исследованию ползучести магниевого сплава МА50 (рис. 2, б) в температурном диапазоне 150–225°C. Вместе с обычным магниевым

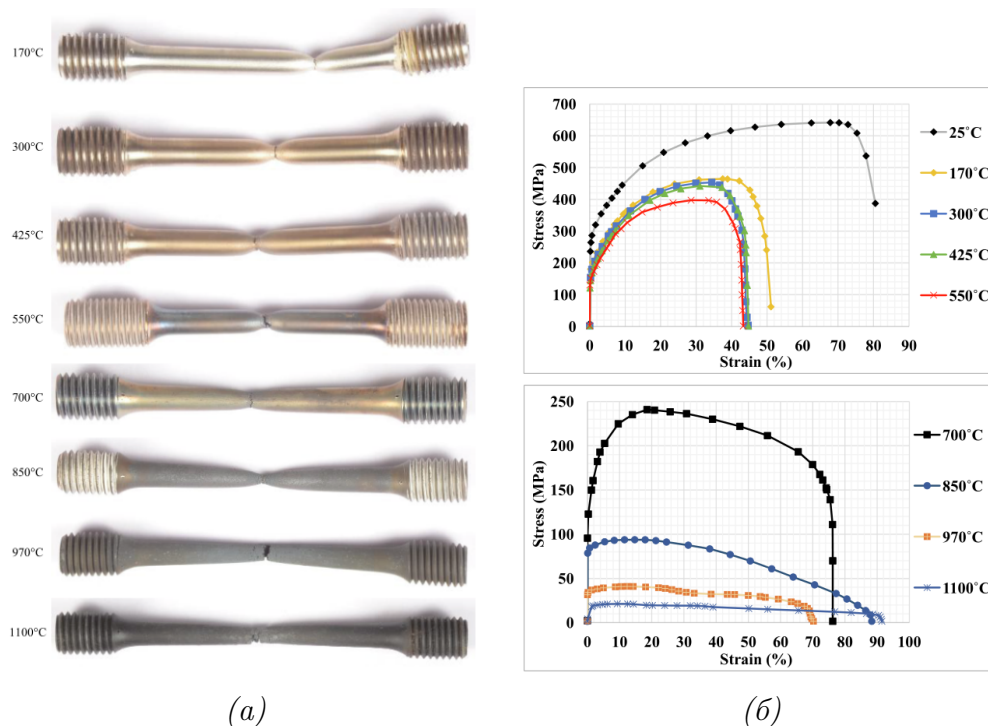


Рис. 1. Результаты испытаний [3] для жаропрочной стали 03X18H11 при разных значениях высокой температуры:
а – разрушенные образцы;
б – инженерные зависимости напряжение – деформация

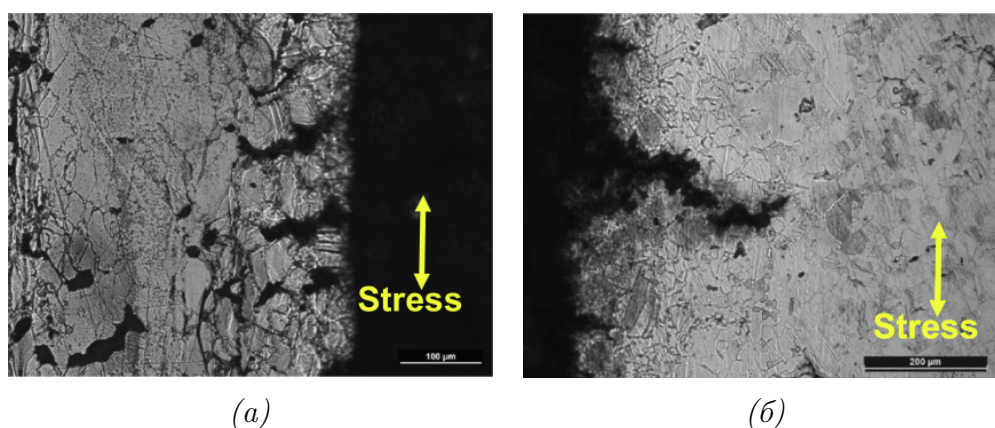


Рис. 2. Поверхностные коррозионные трещины [3] для жаропрочной стали 03X18H11 при больших выдержках во времени: а – при 700°C; б – при 850°C

сплавом рассмотрена ползучесть того же сплава с предварительно внедренным 1.72 мас.% Са. Показано, что внедрение Са в магниевый сплав приводит к увеличению времени в момент разрушения.

Для аппроксимации опытных данных, как правило, используют степенную зависимость с двумя материальными параметрами, которые определяются из минимизации суммарной погрешности. В работе [7] показано, что несмотря на то, что эта зависимость не плохо аппроксимирует опытные данные, еще более точно это делает дробно-степенная зависимость с четырьмя материальными параметрами, два из которых при-

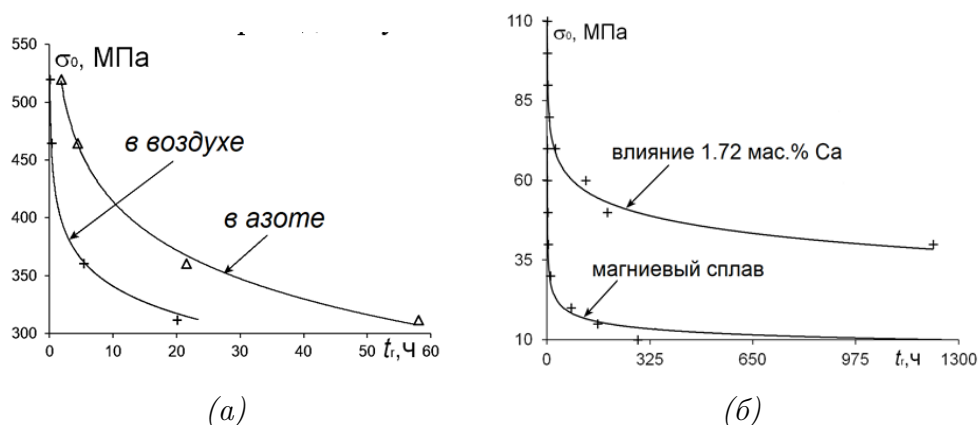


Рис. 3. Экспериментальные зависимости и их аппроксимации:
 а – титановый сплав ВТ6 при 600°C;
 б – магниевый сплав МА50 при 225°C

нимают физический смысл порога ползучести и предела кратковременной прочности, которые ограничивают снизу и сверху ползучесть и длительную прочность. Эта зависимость предполагает, что порог ползучести и предел кратковременной прочности уже измерены в эксперименте. В статье [7] вместо измерения значений этих механических характеристик предложено их рассматривать как материальные параметры, которые следует вычислить из минимизации суммарной погрешности.

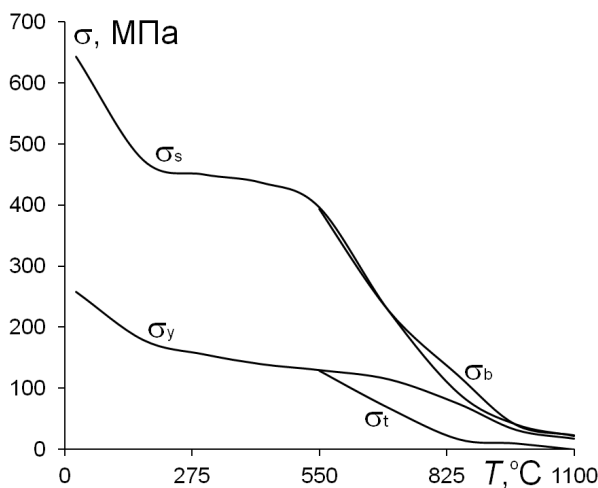


Рис. 4. Вычисленные зависимости порога ползучести и предела кратковременной прочности относительно экспериментальных зависимостей предела текучести и предела прочности для жаропрочной стали 03X18H11

По результатам обработки опытных данных получены зависимости порога ползучести и предела кратковременной прочности от температуры (рис. 3).

Информация о финансовой поддержке. Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

1. Назаров В.В. Результаты экспериментальных исследований ползучести и длительной прочности / В.В. Назаров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. – 2025. – № 1. – С. 75–83.
2. Nazarov V.V. Results of experimental studies of creep and long-term strength / V.V. Nazarov // Moscow Univ. Mech. Bull. – 2025. – Vol. 80, No. 1. – P. 1–10.
3. Mohta K. High temperature deformation behavior of Indian PHWR Calandria material SS 304L / K. Mohta, S.K. Gupta, S. Cathirvolu, S. et al. // Nucl. Eng. Des. – 2020. – Vol. 368. – 110801.
4. Reis D.A.P. Effect of environment on the creep behavior of the Ti-6Al-4V alloy / D.A.P. Reis, C.R.M. Silva, M.C.A. Nono et al. // Mater. Sci. Eng.: A. – 2005. – Vol. 399, No. 1–2. – P. 276–280.
5. Terada Y. Analysis of creep rupture life of Mg-Al-Mn alloy produced by die-casting / Y. Terada, Y. Murata, T. Sato, M. Morinaga // Mater. Chem. Phys. – 2011. – Vol. 128, No. 1–2. – P. 32–34.
6. Terada Y. Creep rupture properties of die-cast Mg-Al-Ca alloys / Y. Terada, D. Itoh, T. Sato // Mater. Chem. Phys. – 2009. – Vol. 113, No 2–3. – P. 503–506.
7. Nazarov V.V. Selecting a dependence for the approximation of experimental data on secondary creep and creep rupture strength / V.V. Nazarov // Diagn. Resour. Mech. Mater. Struct. – 2023. – No. 3. – P. 44–49.

УДК 539.376

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО МАССИВА С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКОЙ

Нескородев Р.Н., д-р физ.-мат. наук, доц.
Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ
nromn72@mail.ru

Введение. При помощи методики преобразования интегральных уравнений состояния вязкоупругих сред к временным уравнениям закона Гука в работе [1] получены соотношения замкнутой теории напряженного состояния анизотропного массива горных пород, учитывающая свойства материала деформироваться во времени. Предложенный подход не требует построения аналитических представлений ядер ползучести и релаксации в специальной форме. С использованием данной методики в работе [2] исследовано вязкоупругое напряженное состояние анизотропного горного массива с протяженной, свободной от загрузения, горизонтальной выработкой эллиптического сечения.

В настоящей работе методика перехода к параметрическим определяющим уравнениям применена для исследования учета влияния вязкоупругих параметров при изучении напряженного состояния анизотропного массива с горизонтальной выработкой.

Основные уравнения теории вязкоупругости горных пород.

В рамках постановки задачи полагается, что рассматриваемый массив горных пород занимает нижнее полупространство, в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, начало системы размещено на глубине H , ось Ox_2 направлена вертикально вверх, а плоскость Ox_1x_3 параллельна плоскости, ограничивающей полупространство. В момент образования выработки (время $t = 0$) упругие постоянные исследуемого материала характеризуются матрицей $\mathbf{A}$ (модулей упругости), либо матрицей $\mathbf{a}$ (коэффициентов деформации), а решение является упругим. Дальнейшая эксплуатация выработки (время $t > 0$) приводит к тому, что материал продолжает деформироваться. Для описания этого процесса и определения напряженно-деформированного состояния в окрестности выработки в работе [1] приведена замкнутая теория механического состояния среды, учитывающая свойство материала деформироваться во времени. Предложенный подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. В упомянутой работе также для изотропных и трансотропных горных пород алевролит и песчаник приведены упругие и реологические постоянные. На основе свойств резольвентных операторов для интегральных уравнений с ядрами произвольного вида, предложены соотношения для построения элементов матрицы уравнений состояния.

В работе [3] показано, что если плоскость изотропии расположена под углом φ к горизонту, а выработка направлена под углом ψ к плоскости изотропии и система координат $Ox_1x_2x_3$ связана с поперечным сечением выработки, то уравнения состояния будут иметь вид уравнений материала, обладающего общей анизотропией.

Напряженное состояние горного массива представим состоящим из: 1) начального поля смещений u_i^0 и напряжений σ_k^0 в нетронутом массиве и 2) дополнительного поля смещений u_i^* и напряжений σ_k^* , возникающего при появлении выработки.

Перемещения и напряжения нетронутого массива определяется из соотношений [3]

$$\begin{aligned} u_i^0 &= -\alpha_i \rho g H \left(x_2 - \frac{x_2^2}{2H} \right) \quad (i = \overline{1, 3}), \\ \sigma_k^0 &= -\tau_k \rho g H (1 - x_2/H) \quad (i = \overline{1, 6}), \end{aligned} \quad (1)$$

где величины α_i , τ_k зависят от упругих постоянных; ρ – плотность породного массива; g – ускорение силы тяжести.

Общие представления для перемещений u_i^* и напряжений σ_k^* выражаются через три аналитические функции $\Phi_j(z_j)$ обобщенных комплекс-

ных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$ и имеют вид [3]

$$u_i^* = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 R_{ij} \Phi_j(z_j), \quad \sigma_i^* = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 P_{ij} \Phi_j'(z_j). \quad (2)$$

Для определения напряженного состояния горного массива с неподкрепленной выработкой за счет сил гравитации нужно удовлетворить граничным условиям на контуре выработки

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = 0, \quad n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = 0, \quad n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 = 0. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_k = \sigma_k^0 + \sigma_k^*$, где σ_k^0 – напряжения от сил гравитации (1), а σ_k^* – компоненты напряжений, которые учитывают влияние выработки на напряженное состояние массива; $n_1 = \cos(n, x_1)$, $n_2 = \cos(n, x_2)$, n – внешняя нормаль к контуру.

Численные исследования. В работе [4] при исследовании эффектов ползучести вблизи выработки для трансверсально-изотропного массива считалось, что во времени изменяется только операторный модуль $\bar{G}_2$, а остальные остаются константами. В этой же работе представлены результаты инструментальных наблюдений за смещением контура круговой выработки радиуса 1,85 м, проведенной на глубине $H = 770$ в горной породе алевролит2 [3]. На 200-ые сутки величины смещений кровли перпендикулярно напластованию (плоскости изотропии) составили 13,5 см, а боков 5,5 см, причем смещения контура носят явно затухающий характер.

Для сравнения были проведены исследования смещений контура для аналогичной выработки при различных случаях учета операторных коэффициентов уравнений состояния:

- А) без учета сдвиговой ползучести, когда $\bar{G}_2 = G_2$;
- Б) учет только сдвиговой ползучести $\bar{G}_2$, когда $\bar{E}_i = E_i$, $\bar{\nu}_i = \nu_i$;
- В) учет всех параметров $\bar{E}_i$, $\bar{\nu}_i$, $\bar{G}_2$.

В таблице 1 приведены значения нормальных контурных смещений в точках кровли и почвы ($\theta = \pm\pi/2$) и в боках ($\theta = 0 = \pi$).

Таблица 1

Учет операторных коэффициентов	$u_n _{\theta=0}$, см		$u_n _{\theta=\pi/2}$, см	
	$t = 0$	сут.	$t = 0$	сут.
А)	–0,45	–1,10	–1,80	–2,56
Б)	–0,45	–3,03	–1,80	–7,42
В)	–0,45	–6,20	–1,80	–11,02

Как видно, результаты, полученные при учете всех операторных параметров, в наибольшей степени соответствуют экспериментальным данным. Таким образом, предложенная методика расчета позволяет по име-

ющимся испытаниям образцов горных пород, вмещающих подземную выработку, предсказать величины смещения его контура.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 27.02.2025 № 075-02-2025-1608).

1. Нескородев Р.Н. Метод преобразования интегральных уравнений состояния к временным уравнениям закона Гука / Р.Н. Нескородев // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – Вып. 3. – С. 10–21.
2. Нескородев Р.Н. Ползучесть анизотропных горных пород с выработками в условиях обобщенной плоской деформации / Р.Н. Нескородев // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – Вып. 4. – С. 50–57.
3. Нескородев Н.М. Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 148 с.
4. Зорин А.Н. Метод расшифровки иррациональной функции интегрального оператора / А.Н. Зорин, М.И. Розовский // Прикл. механика. – 1965. – Т. 1, № 9. – С. 81–88.

УДК 615.849

УЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛИ ИЗГИБА БАЛКИ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ И НЕЙТРОННОМ ОБЛУЧЕНИИ

Номбре С.Б.^{1,2}, канд. физ.-мат. наук, доц.,

Пачева М.Н.¹, канд. физ.-мат. наук,

Сторожев С.В.^{1,2}, д-р техн. наук, доц.,

Чан Ба Ле Хоанг³, канд. техн. наук.

¹Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

²Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
г. Макеевка, РФ

³Университет природных ресурсов и окружающей среды, г. Хошимин, Вьетнам
s.b.nombre@donnasa.ru

В практике прочностных расчетов тепловыделяющих сборок (ТВС), размещаемых в активных зонах ядерных энергетических реакторов с высокими уровнями нейтронного облучения, успешно применяются прикладные механико-математические модели балочных конструкций с различными профилями поперечных сечений [1, 2], характеризующиеся значительной степенью параметрической неопределенности в виде разбросов значений исходных параметров при необходимости учета совокупных эффектов силовых воздействий, объемных термических деформаций и необратимого радиационного распухания [3], обусловленного ростом пор в металле. Поэтому важным направлением развития исследований по

данной проблематике является разработка подходов к учету указанных факторов параметрической неопределенности в предпроектном моделировании. Принимая во внимание, что неконтрастная исходная информация о подлежащих учету для моделей данного типа разбросах не всегда отвечает строгим условиям статистической корректности и во многих случаях имеет субъективную экспертную природу, получение адекватных практически значимых результатов их расчетного анализа может базироваться на применении методов теории нечетких множеств [4, 5], предполагающем введение нечетко-множественных аналогов представления неопределенной информации с использованием методов фазификации и переходе к аргументам нечетко-множественного типа в функциональных расчетных соотношениях детерминистических версий соответствующих моделей на базе применения α – уровневой модификации эвристического принципа обобщения [4–6]. Реализация такого подхода и является целью описываемого исследования.

Используемая для обобщения квазистатическая модель изгиба балки при неравномерном нагреве и нейтронном облучении представлена в работе [2]. Модель базируется на прикладной теории изгиба стержней; полагается, что неизменяющееся по длине с координатной переменной z поперечное сечение стержня имеет в общем случае многосвязную, симметричную относительно вводимых в нем координат x , y форму; плоскостью изгиба рассматриваемой балки является плоскость xz , а нейтральной плоскостью является плоскость $x = 0$. Силовые воздействия прикладываются к верхней граничной поверхности $x = h$ балки. Полагается также, что немеханические нагрузки зависят от текущей координаты x и связанные с ними деформации симметричны относительно нейтральной плоскости. Физико-механическими параметрами модели являются модуль Юнга E и коэффициент линейного расширения α_T материала балки, параметр абсолютной температуры T и параметр $\varepsilon^{(s)}$, представляющий собой одну треть от полного зависящего от времени t объемного распухания, обусловленного ростом пор в металле, а геометрическими – параметры размеров для формы поперечного сечения, по которым вычисляется характеристика момента инерции сечения I . Поскольку рассматривается модель ТВС, вставленной в опорные плиты, то в рассматриваемом случае поперечная сила F приложена на расстоянии L от верхней плиты. Кроме того, предполагается линейное изменение температуры в поперечном сечении стержня $T = \Delta T \cdot x/(2h)$, где ось x ориентирована вдоль отрицательного направления от нейтральной оси, ΔT – разность температур между горячей и холодной сторонами балки, а также, что деформация от распухания также изменяется линейно по сечению $\varepsilon^{(s)} = \Delta \varepsilon^{(s)} \cdot x/(2h)$, где $\Delta \varepsilon^{(s)}$ – разность распухания в точках

бруса ближайшей и наиболее удаленной от нейтральной оси, являющаяся функцией распределения интегрального потока нейтронов Φ (флюенса нейтронов) и перепада температур ΔT по сечению и изменяющаяся во времени, в то время как разность температур ΔT по сечению от времени не зависит (стационарная температура). Пример эффективного введения функции Φ приведен в работе [2]. Рассматривается также случай линейного распределения величин ΔT_0 и $\Delta \varepsilon^{(s)}$ по длине стержня.

При сформулированных предположениях полученная в [2] в рамках детерминистической модели функция прогиба балки ТВС $w(z, t)$ имеет представление

$$w(z, t) = \Phi_w(z, t, E, \alpha_T, I, L, h, F, \Delta T_0, \Delta \varepsilon^{(s)}) = \\ = Fz^2(L - z/3)(2EI)^{-1} + \alpha_T \Delta T_0 z^3(12h)^{-1} + \Delta \varepsilon^{(s)} z^3(12h)^{-1}.$$

Исходя из предположения об учете неконтрастности всех исходных физико-механических и геометрических параметров модели $E, \alpha_T, I, L, h, F, \Delta T_0, \Delta \varepsilon^{(s)}$ вводятся их описания нечетко-множественными величинами $\tilde{E}, \tilde{\alpha}_T, \tilde{I}, \tilde{L}, \tilde{h}, \tilde{F}, \tilde{\Delta T}_0, \tilde{\Delta \varepsilon}^{(s)}$ в виде нормальных треугольных нечетких чисел, представляемых разложениями по множествам α – срезов [3–6]

$$\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha], \quad \underline{E}_\alpha = (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \overline{E}_\alpha = \alpha E_2 + (1 - \alpha)E_3; \\ \tilde{\alpha}_T = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{T\alpha}, \overline{\alpha}_{T\alpha}], \quad \underline{\alpha}_{T\alpha} = (1 - \alpha)\alpha_{T1} + \alpha\alpha_{T2}, \\ \overline{\alpha}_{T\alpha} = \alpha\alpha_{T2} + (1 - \alpha)\alpha_{T3}, \dots; \\ \tilde{\Delta \varepsilon}^{(s)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Delta \varepsilon}_\alpha^{(s)}, \overline{\Delta \varepsilon}_\alpha^{(s)}], \quad \underline{\Delta \varepsilon}_\alpha^{(s)} = (1 - \alpha)\Delta \varepsilon_1^{(s)} + \alpha\Delta \varepsilon_2^{(s)}, \\ \overline{\Delta \varepsilon}_\alpha^{(s)} = \alpha\Delta \varepsilon_2^{(s)} + (1 - \alpha)\Delta \varepsilon_3^{(s)}.$$

В форме разложений по α – срезам на основе предварительно устанавливаемых свойств

$$\partial \Phi_w / \partial \Delta \varepsilon^{(s)} \geq 0, \quad \partial \Phi_w / \partial h \leq 0, \quad \partial \Phi_w / \partial \alpha_T \geq 0, \\ \partial \Phi_w / \partial \Delta T_0 \geq 0, \quad \partial \Phi_w / \partial L \geq 0,$$

и применения модифицированного α – уровневого варианта эвристического принципа обобщения [3–6] определяется и эндогенная нечетко-множественная параметрическая характеристика рассматриваемой модели

$$\tilde{w}(z, t) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{w}_\alpha(z, t), \overline{w}_\alpha(z, t)]$$

$$\underline{w}_\alpha(z, t) = \inf_{\substack{F \in [\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha] \\ I \in [\underline{I}_\alpha, \overline{I}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha]} \Phi_w(z, t, E, \underline{\alpha}_{T\alpha}, I, \underline{L}_\alpha, \overline{h}_\alpha, F, \underline{\Delta T}_{0\alpha}, \underline{\Delta \varepsilon}_\alpha^{(s)}),$$

$$\overline{w}_\alpha(z, t) = \sup_{\substack{F \in [\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha] \\ I \in [\underline{I}_\alpha, \overline{I}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha]} \Phi_w(z, t, E, \overline{\alpha}_{T\alpha}, I, \overline{L}_\alpha, \underline{h}_\alpha, F, \overline{\Delta T}_{0\alpha}, \overline{\Delta \varepsilon}_\alpha^{(s)}).$$

Значения параметра α для характеристик $\underline{w}_\alpha(z, t)$, $\overline{w}_\alpha(z, t)$ в рамках реализуемого подхода отвечают показателям возможности того, вариации расчетных величин $w(z, t)$ при учитываемых разбросах экзогенных параметров модели лежат в интервале $[\underline{w}_\alpha(z, t), \overline{w}_\alpha(z, t)]$.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Куликов И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / И.С. Куликов, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1984. – 104 с.
2. Кулешов Р.А. Изгиб балки в условиях неравномерного нагрева и нейтронного облучения / Р.А. Кулешов, Н.М. Сабиров, П.И. Ширвель // Теорет. и прикладная механика. Вып. 28: междунар. науч.-техн. сб. / под ред. А.В. Чigareва. – Минск: БНТУ, 2013. – С. 237–243.
3. Изменение механических свойств стали ОХ16Н15МЗБ в температурном интервале радиационного распухания / В.С. Неустроев, В.Н. Голованов, А.В. Поветянко и др. – М.: ЦНИИАтоминформ, 1986. – 14 с.
4. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
5. Нгуен Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
6. Номбре С.Б. Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара / С.Б. Номбре, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 56–66. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-56-66. – EDN: TVWFZT.

О ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ И СПЕКТРАХ СЕТОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ СХЕМ МКЭ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Титова Е.Б., Чекумарев Д.Т., д-р физ.-мат. наук, доц.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, РФ
elena.titova@itmm.unn.ru

Рассматривается вопрос о групповых свойствах операторов численного дифференцирования в схемах МКЭ решения задач теории упругости. Обсуждается их связь со спектральными свойствами схем МКЭ и проблемой объемного записывания [1].

Применяя к системе уравнений Ламе для однородной изотропной упругой среды при отсутствии внешних сил

$$\frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + \mu \Delta \bar{u} \right] = \ddot{\bar{u}} \quad (1)$$

оператор дивергенции, получим в качестве следствия волновое уравнение

$$\frac{1}{\rho} (\lambda + 2\mu) \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где $p = \operatorname{div} u$. Аналогично, применяя к этой же системе уравнений оператор ротора, получим три скалярных волновых уравнения

$$\frac{1}{\rho} \mu \Delta q_i = \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где $q = (q_1, q_2, q_3) = \operatorname{rot} u$. Уравнения (2, 3) описывают распространение волн сжатия и сдвига в изотропной упругой среде. Выполним аналогичные операции с разностной схемой, записанной в форме, аналогичной (1):

$$\frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \begin{bmatrix} D_{11} u_1 + D_{12} u_2 + D_{13} u_3 \\ D_{21} u_1 + D_{22} u_2 + D_{23} u_3 \\ D_{31} u_1 + D_{32} u_2 + D_{33} u_3 \end{bmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right] = D_{tt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Операторы D_{jk} аппроксимируют тождественный оператор I и дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}$: $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$;

$$D_{00} \approx I; \left\{ D_{j0}, D_{0j} \approx \frac{\partial}{\partial x^j} \right\}; \left\{ D_{jk}, D_{kj} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} \right\}; D_{tt} \approx \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Применяя к разностной схеме (4) разностный оператор дивергенции, получим сеточный аналог уравнения (2):

$$\frac{1}{\rho} (\lambda + 2\mu) D_{\Delta} p = D_{tt} p, \quad (5)$$

где $p = D_{01} u_1 + D_{02} u_2 + D_{03} u_3$ — сеточный аналог дивергенции. Аналогично получаются скалярные сеточные уравнения для компонент ротора:

$$\frac{1}{\rho} \mu D_{\Delta} q_i = D_{tt} q_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

где $q = (q_1, q_2, q_3) = (D_{30}u_2 - D_{20}u_2, D_{10}u_3 - D_{30}u_1, D_{20}u_1 - D_{10}u_2)$.

Данные преобразования разностной схемы возможны, если справедливы разностные аналоги дифференциальных тождеств

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^l} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \right), \end{aligned}$$

которые записываются в виде [2]:

$$D_{ij} D_{kl} = D_{kj} D_{il} = D_{il} D_{kj} \quad (i, j, k, l = 0, \dots, 3). \quad (7)$$

Эти групповые свойства состоят в том, что можно менять местами индексы у операторов: пары левых индексов или пары правых индексов. Перестановки индексов внутри одного оператора не допускаются, так как, вообще говоря, $D_{ij} \neq D_{ji}$.

Получение следствий (5, 6) из (4) свидетельствует о сохранении разностной схемой свойственной системе уравнений Ламе независимости волн растяжения-сжатия и сдвига или (в том числе в задачах статики) независимости объемных и сдвиговых деформаций. Выполнение свойств (7) гарантирует это. При их невыполнении становятся проблематичными аналогичные преобразования и исследования вопроса о зависимости или независимости объемных и сдвиговых деформаций.

Для исследования данного вопроса рассмотрим задачу о спектрах сеточных операторов системы уравнений Ламе. Подставляя в (1) решение в виде монохроматической плоской волны

$$\bar{u} = \bar{C} e^{i(\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \omega t)}$$

получим задачу о собственных значениях вида $A\bar{u} = \Lambda\bar{u}$, где $\Lambda = \omega^2$. Её решениями будут собственные числа $\Lambda_1 = (\lambda + 2\mu)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)/\rho$,

$\Lambda_2 = \Lambda_3 = \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) / \rho$, собственный вектор $\bar{u}_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ и двумерное подпространство собственных векторов $\bar{u}_2, \bar{u}_3$, ортогональных вектору $\bar{u}_1$.

Поступим аналогично с разностной схемой (4). Анализ проведем на равномерных ортогональных сетках с двумерными квадратными или трехмерными кубическими ячейками линейного размера h :

$$x_j^1 = hj, \quad x_k^2 = hk, \quad x_l^3 = hl.$$

Перепишем схему (4) в виде

$$\frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \begin{bmatrix} D_{11} u_1 + D_{12} u_2 + D_{13} u_3 \\ D_{21} u_1 + D_{22} u_2 + D_{23} u_3 \\ D_{31} u_1 + D_{32} u_2 + D_{33} u_3 \end{bmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right] = \Lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

куда подставим решение в виде

$$\bar{u}^h(x_j^1, x_k^2, x_l^3) = \bar{u}_{jkl}^h = \bar{C} e^{i(\alpha hj + \beta hk + \gamma hl)}.$$

В итоге получим задачу о собственных значениях

$$A_h \bar{u}^h = \Lambda \bar{u}^h. \quad (9)$$

Рассмотрим решение задачи (9) для ряда двумерных схем МКЭ. Приведение схем МКЭ к виду (4) или (8) на равномерных сетках описано в [3]. Результаты в виде относительных погрешностей спектров КЭ операторов по сравнению с аналитическими представим в виде таблицы:

Схема МКЭ (конечный элемент)	Относительные погрешности спектра сдвиговых деформаций $\delta \Lambda_2$
Линейный треугольный	$\delta \Lambda = h^2 \left[\frac{(\alpha^4 + \beta^4)}{12(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{(\lambda + \mu)\alpha^2 \beta^2 (\alpha - \beta)^2}{4\mu(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right]$
Треугольный ажурная схема [2]	$\delta \Lambda = \frac{h^2(\alpha^4 + \beta^4)}{12(\alpha^2 + \beta^2)}$
Билинейный четырехугольный	$\delta \Lambda = \frac{h^2}{12} \left \frac{(\lambda + 3\mu)\alpha^2 \beta^2}{\mu(\alpha^2 + \beta^2)} - \frac{(\alpha^4 + 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4)}{(\alpha^2 + \beta^2)} \right $
Билинейный четырехугольный с сокращенным интегрированием	$\delta \Lambda = \frac{h^2(\alpha^4 + 6\alpha^2 \beta^2 + \beta^4)}{12(\alpha^2 + \beta^2)}$

Погрешности классических элементов (линейного треугольного и билинейного четырехугольного) зависят от параметра Ламе λ , что свидетельствует о влиянии объемных деформаций на сдвиговые и может

приводить к эффекту запираания [1]. В остальных схемах, удовлетворяющих условию (7), такое влияние отсутствует. Аналогичные результаты справедливы и для ряда трехмерных схем.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились при финансовой поддержке РНФ (проект 24-29-00422).

1. *Telikicherlaa R.M.* Treatment of near-incompressibility and volumetric locking in higher order material point methods / R.M. Telikicherlaa, G. Moutsanidis // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2022. – Vol. 395 (1–2). – 114985.
2. *Баженов В.Г.* Об индексной коммутативности численного дифференцирования / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* – 1989. – Т. 29. № 5. – С. 662–674.
3. *Баженов В.Г.* Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. Учебное пособие / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. – 118 с.

УДК 519.6:539.3

О МОМЕНТНОМ КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Чекмарев Д.Т., д-р физ.-мат. наук, доц., **Трофимов В.В.**

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, РФ

dekmt@mm.unn.ru

Описана реализация нового 4-узлового конечного элемента решения плоских задач теории упругости. Данный конечный элемент обладает следующими особенностями: одна точка интегрирования, постоянные в пределах элемента моментные составляющие тензоров деформаций и напряжений, улучшенные спектральные свойства и отсутствие нежелательных эффектов запираания и «песочных часов». Аналогичный по методу построения и свойствам 8-узловой конечный элемент для решения трехмерных задач описан в [1].

Идея построения данного конечного элемента описана в [2]. Он строится путем проецирования трехмерной ажурной схемы МКЭ [3] на двумерную сетку, сохраняя положительные особенности ажурной схемы, описанные выше. В трехмерной ажурной схеме 4-узловые конечные элементы располагаются с регулярными промежутками по одному в центрах гексаэдрической сетки. После проецирования её на двумерную сетку размер элемента h_3 по третьей координате превращается в параметр новой двумерной схемы. Тензор деформаций в элементе имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} (d_i^+ u_j + d_j^+ u_i) & j \leq 2 \\ \frac{1}{2} d_j^+ u_i & j = 3 \end{cases}.$$

$$\text{При } i \neq j \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij},$$

а тензор напряжений, соответственно,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \end{bmatrix}.$$

Последний столбец соответствует изгибающим моментам конечного элемента.

Для формирования численной схемы МКЭ будем использовать векторно-матричную форму записи. Векторы узловых перемещений конечного элемента, деформаций и напряжений запишем соответственно в виде

$$(u)^T = (u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2, u_3^1, u_3^2, u_4^1, u_4^2), \quad (\varepsilon)^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}),$$

$$(\sigma)^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}).$$

В матричной форме соотношения Коши, закон Гука и полная потенциальная энергия конечного элемента имеют вид

$$\varepsilon = Bu, \quad \sigma = C\varepsilon = CBu, \quad \Pi = \frac{1}{2}u^T Ku - u^T q.$$

Матрица жесткости конечного элемента записывается в виде: $K = B^T C B \Delta S$, где B – матрица деформаций, связывающая компоненты тензора деформаций с узловыми перемещениями, C – матрица упругих постоянных, ΔS – площадь четырехугольного элемента. Отметим, что построение матриц жесткости конечных элементов производится непосредственно для текущей геометрии (см. [4]) и не используется техника отображения на элемент стандартной формы и размера. Ненулевые элементы матрицы B являются коэффициентами сеточных операторов, аппроксимирующих первые частные производные в элементе. Данные операторы могут быть представлены в виде

$$d_i^+ f = \sum_{j=1}^4 \beta_j^i f_j = \frac{\partial f}{\partial x^i} + O(h). \quad (1)$$

Здесь f_j – значения функции в узлах элемента, β_j^i – коэффициенты разностных операторов. Таким образом, элементами матрицы B являются коэффициенты β_j^i и задача построения матрицы жесткости фактически сводится к определению этих коэффициентов. Приведем без обоснования матрицы упругих постоянных и деформаций (с учетом симметрии

тензоров напряжений и деформаций):

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & 0 & \beta_2^1 & 0 & \beta_3^1 & 0 & \beta_4^1 & 0 \\ 0 & \beta_1^2 & 0 & \beta_2^2 & 0 & \beta_3^2 & 0 & \beta_4^2 \\ \beta_1^2 & \beta_1^1 & \beta_2^2 & \beta_2^1 & \beta_3^2 & \beta_3^1 & \beta_4^2 & \beta_4^1 \\ \beta_1^3 & 0 & \beta_2^3 & 0 & \beta_3^3 & 0 & \beta_4^3 & 0 \\ 0 & \beta_1^3 & 0 & \beta_2^3 & 0 & \beta_3^3 & 0 & \beta_4^3 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что в данной схеме для аппроксимации производных используются формулы

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\det V_j}{\det V}. \quad (2)$$

где

$$V = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} f_1 - f_4 & x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ f_2 - f_4 & x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ f_3 - f_4 & x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & f_1 - f_4 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & f_2 - f_4 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & f_3 - f_4 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 & f_1 - f_4 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 & f_2 - f_4 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 & f_3 - f_4 \end{bmatrix},$$

коэффициенты операторов (1) d_1^+, d_2^+, d_3^+ выражаются через миноры матрицы V :

$$\beta_1^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad \beta_2^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \\ x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V},$$

$$\beta_3^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad (5)$$

$$\beta_4^1 = -\beta_1^1 - \beta_2^1 - \beta_3^1$$

и т.п.

Двумерная моментная схема получается путем проецирования трехмерной ажурной схемы на двумерную сетку. При этом по третьей координате сетка предполагается равномерной с шагом h_3 . Для шага h_3 рекомендуется ввести безразмерный параметр: $h_3 = \xi h$, где h – характерный размер двумерного элемента, например, для прямоугольного элемента $h = \min(h_1, h_2)$ (минимальная высота прямоугольника). Параметр ξ рекомендуется брать в пределах от 1 до 1,5 (оптимальное значение пока не

исследовано). Третья координата узла в элементе должна выбираться из соображения, чтобы знаменатель в формуле (5) не равнялся нулю. Поэтому рекомендуется при обходе узлов элемента против часовой стрелки выбирать значения $x_1^3 = x_3^3 = 0$, $x_2^3 = x_4^3 = h_3$. В этом случае формулы (5) для производных по x^1, x^2 преобразуются к виду

$$\beta_1^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_2^2 - x_4^2 & 0 \\ x_3^2 - x_4^2 & -h_3 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad \beta_2^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3^2 - x_4^2 & -h_3 \\ x_1^2 - x_4^2 & -h_3 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad \beta_3^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 - x_4^2 & -h_3 \\ x_2^2 - x_4^2 & 0 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad (6)$$

$$\beta_4^1 = -\beta_1^1 - \beta_2^1 - \beta_3^1.$$

Здесь описан вариант реализации двумерного моментного конечного элемента для физически линейной изотропной упругой среды. Другие варианты могут быть реализованы путем изменения матрицы упругих постоянных.

Приводятся результаты решения модельных задач и сравнение с решениями на базе других схем МКЭ.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились при финансовой поддержке РНФ (проект 24-29-00422).

1. *Абу Даввас Я.* Моментный конечный элемент для решения трехмерных задач теории упругости / Я. Абу Даввас, И.А. Модин, Д.Т. Чекмарев // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – Т. 85, № 2. – С. 164–177.
2. *Чекмарев Д.Т.* Об одном способе построения двумерных 4-узловых и трехмерных 8-узловых конечных элементов решения задач теории упругости / Д.Т. Чекмарев // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 150–158.
3. *Жидков А.В.* Численное решение трехмерных динамических упругопластических задач с использованием ажурной схемы метода конечных элементов / А.В. Жидков, К.А. Крутова, А.А. Миронов, Д.Т. Чекмарев // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 3. – С. 327–337.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОМОЩЬЮ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Чернышов А.Д.¹, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Горьайнов В.В.², канд. физ.-мат. наук, доц.

¹Воронежский государственный университет инженерных технологий,
г. Воронеж, РФ

²Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж, РФ
gorvit77@mail.ru

Математическую модель термоупругой пластины представим следующей системой дифференциальных уравнений относительно поперечного перемещения $w(x, y)$ и температуры $T(x, y)$

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \kappa_0 w = \\ = q(y) - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \alpha_2 (T - T_0), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + E_0 + E_1 (T - T_0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega([0, a] \times [0, b]), \quad (2)$$

где α_1, α_2 – параметры, характеризующие температурное расширение, T_0 – начальная температура, κ_0 – коэффициент упругой постели, S – удельное усилие растяжения пластины по контуру, $q(y)$ – интенсивность равномерно распределенной нагрузки, выражение $E_0 + E_1 (T - T_0)$ определяет внутренний источник саморазогревания, D – цилиндрическая жесткость пластины, вычисляемая по формуле $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$, где h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Запишем граничные условия для уравнения (1):

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = w|_{x=a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = \\ = w|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = w|_{y=b} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия для уравнения (2) имеют вид

$$T|_{x=0} = T|_{x=a} = T_0. \quad (4)$$

Если граничное условие при $y = 0, y = b$ записать постоянными $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$, то приходим к противоречию с дифференциальным уравнением теплопроводности в угловых точках прямоугольника, которое называют рассогласовкой. Это означает, что для нахождения гладкого решения из класса $T(x, y) \in L_2^{(2)}$ необходимо изменить либо граничные условия (4), либо $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$, либо оба условия одновременно. Наиболее простой вариант, если изменить только условия $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$. Для этого стороны прямоугольной области Ω вдоль оси x при $y = 0, y = b$ разобьем на три участка с помощью искусственно введенной малой величины ε

$$0 \leq x \leq \varepsilon \cup \varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon \cup a - \varepsilon \leq x \leq a.$$

Впоследствии при получении решения задачи будем переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Опуская промежуточные преобразования, приведем один из простейших вариантов согласованного граничного условия

$$T|_{y=0}=T|_{y=b}=T_0x=\begin{cases} T_0 + \frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon}(x - \varepsilon)^3 \right], \text{ при } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ T_0, \text{ при } \varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon, \\ T_0 + \frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon)^3 \right], \text{ при } a - \varepsilon \leq x \leq a. \end{cases} \quad (5)$$

Краевая задача (1)–(5) является несвязанной задачей термоупругости и поэтому она распадается на две независимые задачи: механики сплошной среды и теплопроводности. Для решения этих двух задач используем метод быстрых разложений [1]. Аналитический вид решения задачи теплопроводности (2), (4), (5) получен в [2].

Для решения задач термоупругости чаще всего используют численные методы, например, в [3] применен метод конечных разностей с привлечением двухшагового метода последовательного возмущения параметров. В данной работе для решения задачи (1), (3) применим аналитический метод быстрых разложений [1].

Нагрузку $q(y)$ зададим одной из простейших зависимостей следую-

щим образом

$$q(y) = \begin{cases} q_1(y) = q_0 + (q_0 + \alpha_1 E_0) \frac{3(y - \varepsilon)^5}{\varepsilon^5} + (q_0 + \alpha_1 E_0) \frac{2(y - \varepsilon)^6}{\varepsilon^6}, \\ \text{при } 0 \leq y \leq \varepsilon, \\ q_2(y) = q_0, \\ \text{при } \varepsilon \leq y \leq 1 - \varepsilon, \\ q_3(y) = q_0 - (q_0 + \alpha_1 E_0) \frac{3(y - 1 + \varepsilon)^5}{\varepsilon^5} + (q_0 + \alpha_1 E_0) \frac{2(y - 1 + \varepsilon)^6}{\varepsilon^6} \\ \text{при } 1 - \varepsilon \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Предложенный вид $q(y)$ удовлетворяет условиям согласования граничных условий (3) и дифференциального уравнения (1). В результате использования метода быстрых разложений имеем приближенное аналитическое решение задачи (1), (3)

$$w(x, y) = \begin{cases} (q_1(y) + \alpha_1 E_0) \left(\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3x}{24} \right) + \sum_{m=1}^N W_m(y) \sin \left(m\pi \frac{x}{a} \right), \\ \text{при } 0 \leq y \leq \varepsilon, \\ (q_2(y) + \alpha_1 E_0) \left(\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3x}{24} \right) + \sum_{m=1}^N W_m(y) \sin \left(m\pi \frac{x}{a} \right), \\ \text{при } \varepsilon \leq y \leq 1 - \varepsilon, \\ (q_3(y) + \alpha_1 E_0) \left(\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3x}{24} \right) + \sum_{m=1}^N W_m(y) \sin \left(m\pi \frac{x}{a} \right), \\ \text{при } 1 - \varepsilon \leq y \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} W_m(y) = & W_m^{(4)}(0) \left(\frac{y^4}{24} - \frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{18} + \frac{b^3y}{45} \right) + \\ & + W_m^{(4)}(b) \left(\frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{36} + \frac{7b^3y}{360} \right) + \\ & + \sum_{l=1}^N W_{m,l} \sin \left(l\pi \frac{y}{b} \right), \quad m = 1 \dots N. \end{aligned}$$

$$W_m^{(4)}(0) = \left(\int_0^a (\alpha_1 E_1 + \alpha_2) (T - T_0) \sin \left(m\pi \frac{x}{a} \right) dx \right) \Big|_{y=0} - \\ - Dq^{(4)}(0) (1 - (-1)^m) \left(\frac{a}{\pi m} \right)^5,$$

$$W_m^{(4)}(b) = \left(\int_0^a (\alpha_1 E_1 + \alpha_2) (T - T_0) \sin \left(m\pi \frac{x}{a} \right) dx \right) \Big|_{y=b} - \\ - Dq^{(4)}(b) (1 - (-1)^m) \left(\frac{a}{\pi m} \right)^5.$$

Коэффициенты Фурье $W_{m,l}$, $m = 1, \dots, N$, $l = 1, \dots, N$, определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, имеющей не большой размер [1, 2].

Таким образом, полученные аналитические зависимости (6) позволяют определить прогибы прямоугольной пластины в любой ее точке и, как следствие, напряжения, которые в ней возникают под действием нагрузки $q(y)$.

1. Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А.Д. Чернышов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 13-24. – DOI: 10.7868/S0044466914010062
2. Чернышов А.Д. Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А.Д. Чернышов, А.Н. Марченко, В.В. Горяйнов // Тепл. процессы в технике. – 2012. – Т. 4, №11. – С. 482–486.
3. Трещев А.А. Решение задачи термоупругости для цилиндрической оболочки из анизотропного разнсопротивляющегося материала / А.А. Трещев, М.В. Спаская // Изв. Тул. гос. ун-та. Техн. науки. – 2014. – Вып. 11, ч. 2. – С. 567–575.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМАЛИЗМА ГИБРИДНОГО АВТОМАТА

Чехов В.В., канд. техн. наук

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, РФ

chekhovvv@cfuv.ru

При построении математических моделей гибридных динамических систем (то есть систем, проявляющих свойства как непрерывного, так и дискретного поведения во времени) различной природы достаточно широко используется модель гибридного автомата [1]. Эта модель (также известная как формализм Харела или карты состояний) совмещает в себе аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающий непрерывное поведение, и аппарат конечных автоматов для описания элементов дискретного во времени поведения. Данный формализм используется в системах имитационного моделирования, он также входит в унифицированный язык моделирования UML, применяемый при разработке сложных информационных систем. Этот аппарат, в частности, позволяет достаточно просто и наглядно моделировать нелинейные эффекты, например, гистерезис либо мгновенное изменение характера поведения системы, что может быть использовано в области механики деформируемого твёрдого тела не только в динамике, но и для статических расчётов. В данной работе приводятся два примера применения модели гибридного автомата при компьютерном моделировании различных видов нелинейностей при статическом нагружении.

Методология построения гибридного автомата. При статическом нагружении непрерывное поведение деформируемого тела задаётся уравнениями состояния, которые могут иметь различный вид на разных участках диаграммы нагружения. Эти участки удобно формализовать различными состояниями гибридного автомата. Наряду с определением состояний следует также указать допустимые переходы между ними, условия их срабатывания, а также (при необходимости) дискретные разовые действия, выполняемые при срабатывании перехода. Этот аппарат может быть расширен использованием составных состояний/подсостояний, объектно-ориентированным представлением системы в виде совокупности компонентов, и др. [1]. Рассмотрим примеры реализации этого подхода.

Физическая нелинейность (пластичность при циклическом нагружении) иллюстрируется на примере модели идеальной пластич-

ности. Диаграмму нагружения можно рассматривать (с учётом её симметрии) как имеющую два участка: зону действия закона Гука и зону текучести, на каждой из которых действует своё (линейное) уравнение состояния. Соответствующий гибридный автомат показан на рис. 1. Он имеет два состояния, соответствующих участкам диаграммы, кото-

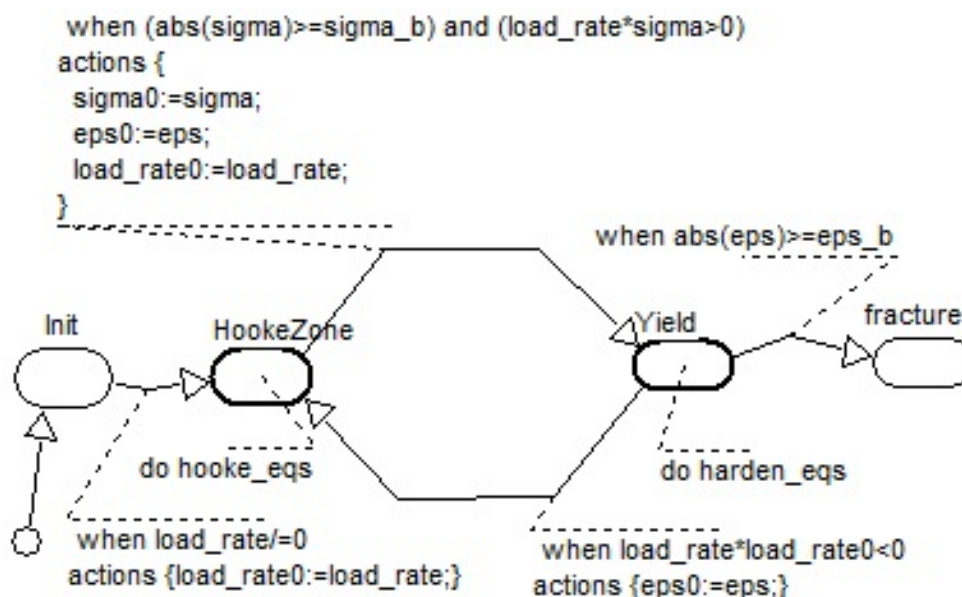


Рис. 1. Гибридный автомат для модели идеальной пластичности

рые дополнены ещё третьим — состоянием разрушения, переход в которое срабатывает при превышении допустимого уровня деформации. На рис. 2 слева можно видеть работу имитационной модели этой системы, демонстрирующую явление гистерезиса. Справа показана аналогичная

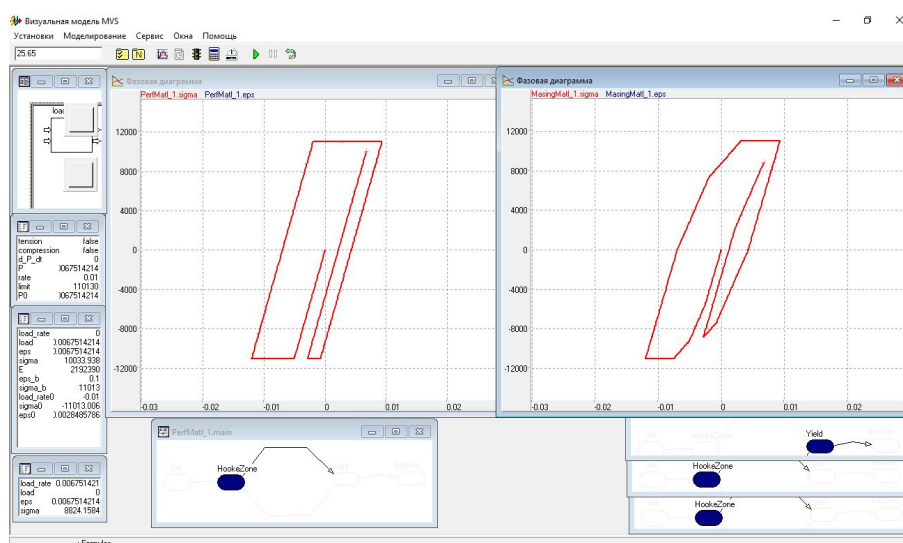


Рис. 2. Моделирование нагружения для моделей идеальной пластичности и Мазинга

работа более реалистичной модели Мазинга [2], основанной на совместной работе нескольких идеально пластических моделей.

Геометрическая нелинейность (эффект прощёлкивания) иллюстрируется на примере работы фермы Мизеса в своём простейшем симметричном варианте с линейно-упругими стержнями [3]. Для обеспечения возможности прощёлкиваний нагружение полагается имеющим вид толкающей нагрузки («жёсткое» нагружение с контролем перемещения со стороны приложения силы и «мягкое» без контроля перемещений по направлению вектора силы). Диаграмма равновесных состояний данной фермы описывается одним нелинейным соотношением, однако с точки зрения возможных перескоков её можно разделить на четыре участка (два равновесных и два неравновесных) [4]. Соответствующий гибридный автомат показан на рис. 3. Неравновесные состояния выполнены составными, с целью моделирования их реалистичного прохождения с возможным появлением перескоков.

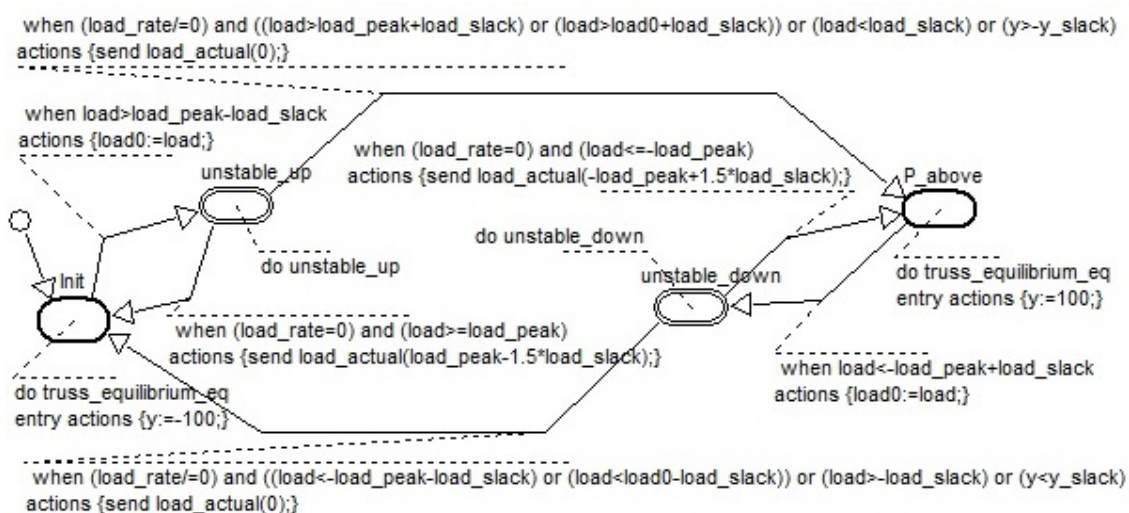


Рис. 3. Гибридный автомат, описывающий поведение фермы Мизеса

Работа имитационной модели фермы показана на рис. 4 в момент прохождения неравновесного участка после двух прощёлкиваний.

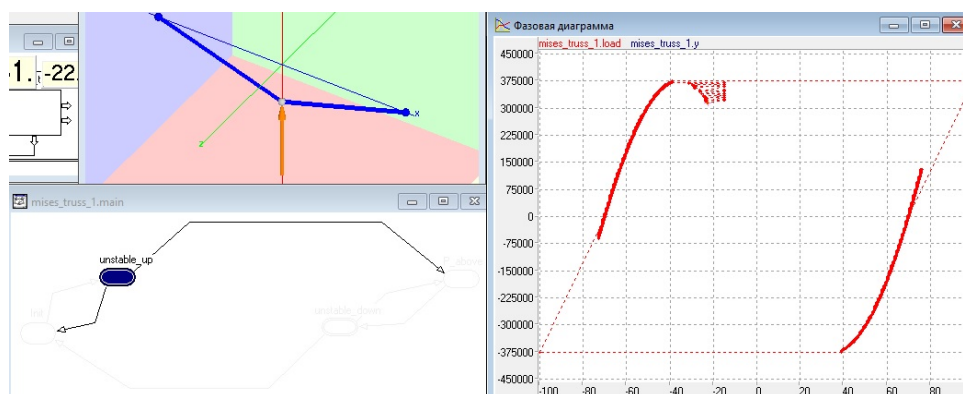


Рис. 4. Моделирование работы фермы Мизеса при толкающей нагрузке

Приведенные примеры иллюстрируют простоту использования формализма гибридного автомата при статическом нагружении для реали-

зации и исследования нелинейных эффектов различного вида.

1. Колесов Ю.Б. Математическое моделирование гибридных динамических систем / Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2014. – 236 с.
2. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях / В.В. Москвитин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. – 264 с.
3. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
4. Чехов В.В. Моделирование динамики фермы Мизеса с использованием модели гибридного автомата / В.В. Чехов, А. И. Шевченко // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование (МИКМО-2025) : Сб. науч. тр. Всерос. науч.-практ. конф., Симферополь, 16–19 апреля 2025 года. – Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2025. – С. 437–444.

УДК 539.3

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НА ОСНОВЕ ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Юров В.О., канд. физ.-мат. наук

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, РФ

vyurov@sfedu.ru

Предложен новый подход к определению переменных упругих свойств для упругих тел в плоской постановке. Рассмотрена обратная задача по реконструкции одного или двух переменных упругих модулей Ламе в плоской задаче для прямоугольной области. Левая граница области закреплена, а на правой границе прикладывается статическая касательная зондирующая нагрузка, что приводит к изгибу. На верхней границе происходит съём дополнительной информации о продольных и поперечных смещениях. Предварительно проведена серия расчетов по решению прямой задачи и выявлению структуры поля смещений. КЭ-реализация осуществлена на основе слабой постановки задачи в пакете FreeFem++. Проведено сравнение с методом Ритца с необходимым количеством координатных функций. При помощи метода Канторовича построены прикладные модели первого и второго порядка. Расчеты показали, что модель первого порядка имеет погрешность решения прямой задачи около 15%, а модель второго порядка показала погрешность не более 1% по полям смещений. При помощи упрощенных моделей решена обратная задача. Модель первого порядка закономерно показала довольно большую погрешность реконструкции. Модель второго порядка описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трех функций осевой координаты, где два уравнения удастся проинтегрировать в общем виде. Составлено дифференциальное

уравнение первого порядка относительно модуля сдвига, коэффициенты которого выражаются через измеренные на верхней границе поля смещений (две функции). Погрешность реконструкции не превышает 1% в случае, когда дополнительная информация берется из решения по модели второго порядка. Используя дополнительную информацию о полях смещений из КЭ, отметим, что наблюдается более высокая погрешность реконструкции в окрестности торцов прямоугольника.

Информация о финансовой поддержке. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265-П/> в Южном федеральном университете.

1. Канторович Л.В. Приближённые методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 560 с.

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Явруян О.В.^{1,2}, д-р физ.-мат. наук

¹Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, РФ

²Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ, РФ

yavruyan@mail.ru

Задачи оптимального проектирования элементов конструкций являются предметом исследования уже не один десяток лет. Определение оптимальных параметров простейших элементов (балок, пластин) позволяет на этапе проектирования повысить эксплуатационные способности объекта при сохранении/уменьшении веса конструкции. Правильный подбор и оптимизация свойств элементов конструкции (например, прочности, жесткости/податливости, устойчивости) обеспечивают надежность и продолжительный срок эксплуатации изделий, что особенно важно для конструкций ответственного назначения.

На первых этапах решения оптимизационных задач в качестве управляющих параметров выступали геометрические характеристики объектов исследования (толщина, площадь поперечного сечения и др.) В дальнейшем, с появлением возможности проектирования свойств неоднородных материалов, с использованием новых современных материалов и технологий создания композитных и функционально-градиентных материалов приобретает актуальность задача оптимального проектирования механических свойств объектов. Например, оптимизация механических

свойств балок и пластин с целью максимизации первой собственной частоты или повышения устойчивости при максимизации внешней силы.

При этом характер неоднородности должен иметь достаточно простой закон изменения по координатам, обеспечивающий эффективное управление технологическими процессами при изготовлении соответствующих элементов конструкций. Это приводит к новым формулировкам задач оптимального проектирования свойств материалов на конечномерных множествах простой структуры, например, среди полиномиальных, экспоненциальных, кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций.

В рамках проведения исследования рассмотрены несколько постановок оптимизационных задач для неоднородных ФГ балок и пластин.

Рассмотрена модельная задача максимизации силы P , приложенной к концу стержня, при которой возникает потеря устойчивости. В качестве управляющей функции выступает функция, характеризующая изменение модуля Юнга.

Краевая задача изогнутой оси стержня с закрепленным нижним концом и свободным верхним концом имеет вид [1]:

$$\left(E(x) I w'' \right)'' + P w'' = 0,$$

$$w(0) = w'(0) = 0,$$

$$M(l) = 0, \quad P w'(l) - M'(l) = 0,$$

где $w = w(x)$ – функция прогиба сечения (отклонение от вертикали), I – момент инерции поперечного сечения стержня, $M(x) = -E(x) I w''(x)$ – изгибающий момент.

Основные соотношения задачи оптимизации имеют вид

$$\int_0^l E(x) dx = E_0, \quad P \rightarrow \max_E.$$

Построен оптимизационный функционал для определения силы поте-

ри устойчивости $P = \frac{I \int_0^l E w''^2 w dx}{\int_0^l w'^2 dx}$, из вариационного принципа найде-

но оптимальное распределение модуля Юнга $E_* = 3E_0 l^{-3} (l^2 - x^2)$, при этом оптимальное значение силы $P_* = 3E_0 l^{-2}$. Отметим, что в случае постоянного распределения модуля Юнга $P_* = 2.46 E_0 l^{-2}$, $E_* = E_0$, таким образом, выигрыш составляет 21%.

Проведено также исследование спектральной оптимизационной задачи о максимизации первой собственной частоты неоднородной функционально-градиентной по длине консольной балки с переменной площадью поперечного сечения. Проведена одновременная оптимизация по двум управляющим функциям – переменному радиусу и переменному модулю Юнга. Краевая задача о собственных колебаниях консольной балки длины l (круглого поперечного сечения радиуса $r(x)$) имеет вид

$$(Eh^2w'')'' - k^2hw = 0, \quad x \in [0, l], \quad k^2 = A\rho\omega^2, \quad h = r^2,$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad (Eh^2w'')(l) = (Eh^2w'')'(l) = 0.$$

Постановку оптимизационной задачи замыкают дополнительные условия на среднее распределение соответствующих управляющих функций:

$$\int_0^l E(x) dx = E_0, \quad \int_0^l h(x) dx = h_0.$$

Построено соотношение Релея для первой собственной частоты

$$k^2 = \frac{\int_0^l Eh^2w''^2 dx}{\int_0^l hw^2 dx} \rightarrow \max_{E, h}.$$

Из вариационного принципа получены условия оптимальности вида:

$$h^2w'' = a^2, \quad a = \text{const},$$

$$2hEw''^2 - k^2w^2 = b^2, \quad b = \text{const}, \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{h_0}{E_0},$$

$$(Eh^2w'')'' - k^2hw = 0.$$

Решение поставленной задачи может быть решено несколькими способами. Одним из самых универсальных является подход, в котором предлагается разыскивать решение в классе полиномов с последующим определением оптимальных полиномиальных коэффициентов с использованием генетических алгоритмов или полуаналитических методов, например, проекционного метода Галеркина.

Так, например, в случае балки постоянной толщины, оптимальное решение поставленной задачи может быть получено аналитически и имеет вид $E_* = 20E_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right)$ [2]. В случае, когда функция $h(x)$ разыскивается в классе линейных функций ($l = 1$), имеем $h_* = 2(1 - x)$,

$\omega_* = 10,733$, при этом вид оптимального распределения модуля Юнга приведен на рис.1. Выигрыш за счет оптимального распределения модуля Юнга составляет порядка 10%.

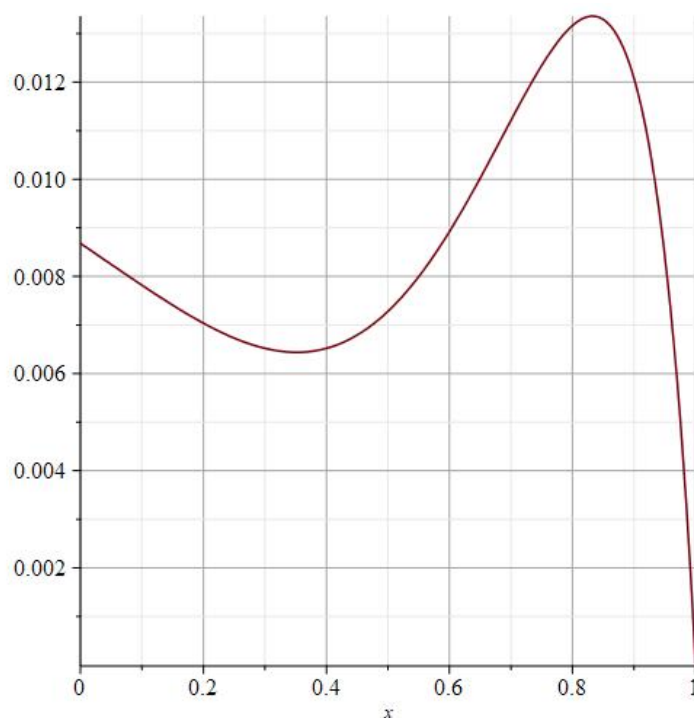


Рис. 1. Оптимальное распределение модуля Юнга для неоднородной консольной балки переменной толщины

Информация о финансовой поддержке. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Ватульян А.О. Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций / А.О. Ватульян, О.В. Явруян // Изв. Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 4. – С. 552–566.
2. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.

Научное издание

АКТУАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА : Материалы VIII Всероссийской с международным участием научной конференции, посвященной 60-летию создания Донецкого научного центра, Донецкого государственного университета и научной школы академика Александра Сергеевича Космодамианского (Донецк–Севастополь, 18–21 сентября 2025 г.).

Электронное издание

Компьютерная вёрстка: Е.С. Глушанков, Н.Ю. Мельничук

Подписано к использованию 12.09.2025 г.

Объём издания: 8,0 МБ

Издательство Донецкого государственного университета

ISBN 978-5-00262-014-2



9 785002 620142 >