

ISSN 2415-7058

# **Вестник Донецкого национального университета**



НАУЧНЫЙ  
ЖУРНАЛ  
*Основан  
в 1997 году*

---

*Серия А*  
**Естественные  
науки**

---

**1/2022**

---

**Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»**

**Главный редактор** – д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**.

**Зам. главного редактора** – д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**.

**Ответственный секретарь** – канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**.

**Члены редколлегии:** д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; канд. хим. наук, доц. **А.В. Белый**; доктор философии, профессор **С.В. Белый** (Тройский университет, США); д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**; д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**; д-р биол. наук, проф. **В.И. Соболев** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University.  
Series A: Natural Sciences”**

**The Editor-in-Chief** – Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**.

**The Deputy of the Editor-in-Chief** – Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**.

**Executive Secretary** – Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**.

**The Members of the Editorial Board:** Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Cand. of chem., docent **A.V. Belyj**; Dr of Philosophy, prof. **S.V. Belyi** (Troy University, USA); Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., docent **A.V. Zyza**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** ( Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**; Dr. of biol., prof. **V.I. Sobolev** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**.

**Адрес редакции:** ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, 83001

**Тел:** (062) 302-92-56, 302-09-92.

**E-mail:** [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru) **URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 – Математика; 01.02.00 – Механика; 01.04.00 – Физика; 02.00.00 – Химические науки; 03.02.00 – Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Протокол № 5 от 31.05.2022 г.*

© ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2022

# Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 1

Донецк 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Механика*

- Бондаренко Н.С., Гольцев А.С.* Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом при одностороннем теплообмене 5
- Горр Г.В., Мазнев А.В., Горбунова Ю.С.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом 13
- Калоеров С.А.* Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитопругих плит 22
- Калоеров С.А., Глушанков Е.С., Мироненко А.Б.* Общее решение задачи теории упругости для многосвязной полуплоскости и его приложение к решению частных задач 41

### *Физика*

- Абрамова О.П.* Поведение поля деформации структуры, состоящей из двух круговых цилиндров со сдвинутыми центрами при наличии модуляции фрактальных индексов 53
- Абрамов В.С.* Активные наночастицы, агрегаты и бозон Хиггса в кварк-глюонной модели 66
- Покинтелица Е.А.* Термический гистерезис макрообъектов при фазовых превращениях первого рода 80
- Фролова С.А., Щебетовская Н.В., Соболев О.В., Соболев А.Ю.* Нуклеационный механизм взрывной кристаллизации 86

### *Химические науки*

- Лозинский Н.С., Мороз Я.А., Лопанов А.Н.* Роль кристаллических фаз в формировании электрофизических свойств толсто пленочных рутениевых резисторов 95
- Рокурн А.Н., Лозинский Н.С.* Экстракционное извлечение и определение металлов в автомобильном топливе методом атомно-абсорбционной спектрофотометрии 104
- Стецки В.В., Матвиенко О.А., Цыбулько В.А.* Методический подход к расчету ионного равновесия в смеси большого числа кислот или оснований 109
- Тюрина Т.Г., Крюк Т.В., Завязкина Т.И., Кудрявцева Т.А.* Изучение зависимости параметров сшивки гидрогелей на основе синтетических и природных полимеров от их состава 115
- Хилько С.Л., Макарова Р.А., Семенова Р.Г., Невечеря О.И., Шелест В.С., Пехтерева Т.М.* Этоксילирование нитропроизводных бензойной кислоты в условиях механохимической активации 123

### ***Биологические науки***

|                                                                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Копылов М.А.</i> Изменчивость бархатницы <i>Minois dryas</i> (Scopoli, 1763) (Lepidoptera, Satyridae) в географическом пространстве                                             | 129 |
| <i>Сафонов А.И.</i> Структурные аспекты оптимизации и фитоиндикации ландшафтов Донбасса (к 100-летию профессора М.Л. Ревы)                                                         | 135 |
| <i>Сыщиков Д.В., Агурова И.В.</i> Содержание органического вещества в эдафотопках антропогенно трансформированных экосистем как один из показателей их успешного самовозобновления | 141 |

## CONTENTS

### *Mechanics*

- Bondarenko N.S., Goltsev A.S.* Investigation of the influence of the environment on the thermoelastic state of an isotropic plate with a heat-permeable cut in the one-sided heat exchange 5
- Gorr G.V., Maznev A.V., Gorbunova Y.S.* Semi-regular precessions of the first type in the problem of gyrostat motion with a variable gyrostatic momentum 13
- Kaloerov S.A.* The main relations for the applied theory of thin electromagnetoelastic plates bending 22
- Kaloerov S.A., Glushankov E.S., Mironenko A.B.* Stress concentration in a multiply connected anisotropic plate 41

### *Physics*

- Abramova O.P.* Behavior of the deformation field of the structure consisting of two circular cylinders with shifted centers in the presence of fractal index modulation 53
- Abramov V.S.* Active nanoparticles, aggregates and Higgs boson in the quark-gluon model 66
- Pokyntelytsia O.A.* Thermal hysteresis of macroobjects during first-kind phase transformations 80
- Frolova S.A., Shchebetovskaya N.V., Sobol O.V., Sobolev A.Yu.* Nucleation mechanism of explosive crystallization 86

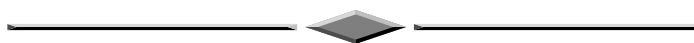
### *Chemical sciences*

- Lozinskii N.S., Moroz Y.A., Lopanov A.N.* The role of crystal phases in the formation of the electro-physical properties of thick film ruthenium resistors 95
- Rokun A.N., Lozinsky N.S.* Extraction extraction and determination of metals in automotive fuel by atomic absorption spectroscopy 104
- Stetsik V.V., Matvienko O.A., Tsybulko V.A.* A methodical approach to the calculation of ionic equilibrium in a mixture of a large number of acids or bases 109
- Tyurina T.G., Kryuk T.V., Zavyazkina T.I., Kudryavtseva T.A.* Study of the dependence of the hydrogel's networks parameters on their composition for the materials on the basis of synthetic and natural polymers 115
- Khil'ko S.L., Makarova R.A., Semenova R.G., Nevecherya O.I., Shelest V.S., Pekhtereva T.M.* Etoxylation of nitroderivatives of benzoic acid under the conditions of mechanochemical activation 123

### ***Biological sciences***

|                                                                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Kopylov M.A.</i> Variability of the marigold <i>Minois dryas</i> (Scopoli, 1763) (Lepidoptera, Satyridae) in geographical space                                           | 129 |
| <i>Safonov A.I.</i> Structural aspects of optimization and phytoindication of Donbass landscape (on the 100th anniversary of professor M.L. Reva)                            | 135 |
| <i>Syshchykov D.V., Agurova I.V.</i> Organic matter content in edaphotopes of anthropogenically transformed ecosystems as one of indicators of their successful self-renewal | 141 |

## М Е Х А Н И К А



УДК 539.3

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫМ РАЗРЕЗОМ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ТЕПЛООБМЕНЕ

© 2022. *Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев*

---

На базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации решена задача термоупругости для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом в случае верхнего одностороннего теплообмена при действии однородного теплового потока. Исследовано влияние интенсивности теплообмена с внешней средой и параметра теплопроницаемости разреза на величину коэффициентов интенсивности напряжений.

*Ключевые слова:*  $\{1,0\}$ -аппроксимация; изотропная пластина; теплопроницаемый разрез; односторонний теплообмен; параметр теплопроницаемости разреза; коэффициенты интенсивности напряжений.

---

**Введение.** Широкое использование тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из композитных материалов, в авиации, автомобилестроении, судостроении и других отраслях промышленности, стимулировало интерес к точному прогнозированию поведения таких элементов конструкций при температурных нагрузках. Обеспечение надёжности их работы требует использования уточнённых теорий, учитывающих эффекты, обусловленные поперечными сдвигами и обжатием.

Решение задач теории упругости и термоупругости в трёхмерной постановке сопряжено со значительными математическими трудностями. Поэтому выполняется редукция трёхмерных задач к двумерным либо с использованием различных физико-геометрических гипотез, либо путём разложения решений по некоторой полной системе функций. Классические теории, основанные на физико-геометрических гипотезах, не всегда могут корректно описать напряжённо-деформированное состояние пластин.

Применение разложений искомых и заданных функций в ряды Ж. Фурье по некоторой полной системе функций позволяет построить уравнения пластин в различных приближениях. Используются разложения решений как в степенные [1], так и в тригонометрические ряды [2]. Однако наибольшее распространение при построении уточнённых теорий пластин и оболочек получил метод разложения искомых и заданных функций в ряды Ж. Фурье по толщинной координате [3, 4]. Обзор уточнённых теорий пластин и их анализ содержится в статье [5].

Наличие дефектов типа трещин в тонкостенных элементах конструкций, подверженных тепловым воздействиям, вызывает локальное возрастание в окрестности таких дефектов температурных градиентов и напряжений, что может привести к разрушению всей конструкции. Решение задач термомеханики разрушения в настоящее время является весьма актуальным. Так, в статьях А. А. Валишина [6, 7] дано решение задачи о распределении температуры в образце, содержащем трещину. В публикации В. Е. Петровой [8] рассмотрены различные аспекты термомеханического разрушения функционально-градиентных материалов, в том числе задачи взаимодействия трещин в

функционально-градиентном покрытии на однородной подложке. Статья В. М. Зеленьяка [9] посвящена определению двумерного термоупругого состояния в полубесконечном твёрдом теле (полуплоскости), ослабленном системой периодических внутренних трещин в условиях локального нагрева на краю полуплоскости.

Целью данной статьи является выявление влияния величины теплообмена при его одностороннем характере и параметра теплопроницаемости разреза на величину коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для поперечного и продольного сдвига. При этом предполагается действие однородного теплового потока. Рассматривается обобщённая теория в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации, основанная на методе И. Н. Векуа разложения искомых функций в ряды Ж. Фурье по полиномам А. М. Лежандра от толщинной координаты [10].

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Пластина содержит теплопроницаемый разрез  $L$ . На лицевых поверхностях пластины осуществляется конвективный теплообмен по закону И. Ньютона с внешней средой нулевой температуры. Предполагается, что теплообмен является верхним односторонним.

Компоненты термоупругого состояния в пластине с разрезом представим в виде суммы компонент основного термоупругого состояния (термоупругого состояния в сплошной пластине, которое будем считать известным) и компонент возмущённого термоупругого состояния, вызванного наличием разреза.

Для определения компонент возмущённого термоупругого состояния используем систему уравнений термоупругости, полученную на базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации [10, 11]. Разрешающая система дифференциальных уравнений в частных производных, записанная в безразмерной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , определённой с точностью до полутолщины пластины  $h$ , включает в себя:

- приближение порядка  $N = 1$  трёхмерного уравнения теплопроводности

$$\Delta T_k + A_{k0}T_0 + A_{k1}T_1 = 0 \quad (k = 0, 1), \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad A_{00} = -\frac{2Bi}{Bi+4}; \quad 3A_{01} = A_{10} = -\frac{5Bi}{Bi+4}; \quad A_{11} = -\frac{10}{3} \frac{2Bi+3}{Bi+4},$$

$Bi = Bi^+$ ;  $Bi^- = 0$ ;  $Bi^\pm$  – критерий Ж.-Б. Био на лицевых поверхностях пластины  $x_3 = \pm 1$ ;  $T_0$  – средняя температура;  $T_1$  – температурный момент;

- уравнения Д. Дюамеля-Ф. Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1+\nu)T_0 \right\}; \quad N_2 = B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1+\nu)T_0 \right\}; \\ S &= \frac{1-\nu}{2} B_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \quad M_1 = D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} - \alpha(1+\nu)T_1 \right\}; \\ M_2 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} - \alpha(1+\nu)T_1 \right\}; \quad H = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right); \\ Q_{i0} &= \Lambda_0 \left( \gamma_i + \frac{\partial w_0}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w_0$  – аналоги перемещений точек срединной поверхности;  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  – аналоги углов поворота нормали;  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S$  – аналоги мембранных усилий;  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H$  – аналоги изгибающих и крутящего моментов;  $Q_{10}$ ,  $Q_{20}$  – аналоги перерезывающих сил;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}; \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1+\nu)};$$

$\nu$  – коэффициент С. Д. Пуассона;  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения;

– уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_{20} = 0; \quad \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в соотношениях (2), (3) определены с точностью до значения  $Eh$  ( $E$  – модуль Т. Юнга), а моменты – с точностью до  $Eh^2$ .

Граничные условия на линии  $L$  соответствуют случаю теплопроницаемого разреза, для которого тепло распространяется только поперёк линии разреза [12]:

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L - \beta [T_k] = - \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k=0,1), \quad (4)$$

где  $T_k^o$  – компоненты температуры в сплошной пластине;  $[T_k] = T_k^+ - T_k^-$  – скачки компонент температуры при переходе через линию разреза  $L$ , причём  $T_k^+$  и  $T_k^-$  – граничные значения функции  $T_k$  в соответствии с выбранным направлением нормали  $\vec{n} = (n_1, n_2)$ ;  $\beta = \lambda^* / \delta^*$  – параметр теплопроницаемости разреза, характеризующий его тепловые свойства в поперечном направлении;  $\lambda^* = \lambda_c / \lambda$  – относительная теплопроводность промежуточного слоя;  $\lambda_c$  – теплопроводность материала промежуточного слоя, расположенного между берегами трещины;  $\lambda$  – теплопроводность материала пластины;  $\delta^* = \delta / l$  – относительное раскрытие разреза, где  $l$  – половина длины разреза;  $\delta$  – раскрытие трещины.

Граничные условия для задачи термоупругости, отвечающие свободной поверхности берегов разреза, имеют вид [13]:

$$\begin{aligned} N_n|_L = -N_n^o|_L; \quad S_{nt}|_L = -S_{nt}^o|_L; \\ M_n|_L = -M_n^o|_L; \quad H_{nt}|_L = -H_{nt}^o|_L; \quad Q_{n0}|_L = -Q_{n0}^o|_L, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $N_n$ ,  $S_{nt}$  – нормальное и касательное усилие;  $M_n$ ,  $H_{nt}$  – изгибающий и крутящий момент;  $Q_{n0}$  – перерезывающая сила;  $\vec{t}$  – касательная к линии разреза.

Верхним индексом «о» в формулах (5) помечены компоненты основного термоупругого состояния.

Предполагаем, что линия внешней границы пластины находится на значительном удалении от линии разреза  $L$ , а возмущённое температурное поле на внешнем граничном контуре равно нулю.

**Методика решения задачи.** Статья [14] посвящена решению задачи теплопроводности для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом в случае произвольного теплообмена с внешней средой. При этом в качестве исходного берётся приближение порядка  $N$  трёхмерного уравнения теплопроводности. Если в результатах, приведённых в [14], положить  $N=1$  и взять параметры теплообмена, соответствующие его верхнему одностороннему характеру, то получим решение задачи теплопроводности (1), (4).

Рассмотрим прямолинейный теплопроницаемый разрез длиной  $2l$ , расположенный вдоль оси абсцисс симметрично начала координат

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (6)$$

Методика решения задачи термоупругости (2), (3), (5) основана на применении к разрешающим дифференциальным уравнениям в частных производных двумерного интегрального преобразования Ж. Фурье [15], учитывающего разрывный характер искомых функций на линии разреза  $L$ . В результате система уравнений термоупругости (2), (3) сводится в пространстве трансформант к системе линейных алгебраических уравнений, после решения которой находятся интегральные представления трансформант внутренних силовых факторов. При обращении данных трансформант используется методика, основанная на свойствах специальной  $G$ -функции [13, 16].

В пространстве оригиналов интегральные представления компонент возмущённого термоупругого состояния имеют вид:

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^{\kappa} \int_{-1}^1 K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q(s) ds, \quad (7)$$

где  $P_1^0, P_2^0, P_3^0$  – мембранные усилия  $N_1, N_2, S$  ( $\kappa=4$ );  $P_1^1, P_2^1, P_3^1$  – изгибающие и крутящий моменты  $M_1, M_2, H$  ( $\kappa=7$ );  $P_4^1, P_5^1$  – перерезывающие силы  $Q_{10}, Q_{20}$  ( $\kappa=5$ );  $\psi_k^q = \psi_k^q(s)$  – искомые функции, зависящие от  $s$  – координаты точки на линии разреза  $L$ :

$$\begin{aligned} \psi_1^0 &= \frac{d[u]}{ds}; \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}; \quad \psi_1^1 = \frac{d[\gamma_1]}{ds}; \quad \psi_2^1 = \frac{d[\gamma_2]}{ds}; \quad \psi_3^1 = \frac{d[w_0]}{ds}; \\ \psi_4^1 &= [\gamma_1]; \quad \psi_5^1 = [\gamma_2]; \quad \psi_3^0 = \psi_6^1 = [T_0]; \quad \psi_4^0 = \psi_7^1 = [T_1]. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции  $\psi_3^0, \psi_4^0, \psi_6^1, \psi_7^1$  находятся при решении задачи теплопроводности (1), (4).

Ядра интегральных представлений (7) содержат линейные комбинации специальных  $G$ -функций, например,

$$K_{33}^0(x_1 - ls, x_2) = -\frac{\alpha \cos \varphi \cos 2\varphi}{r} + \frac{\alpha r}{4} \left\{ \cos 3\varphi g_{21}^0(r) - \cos \varphi g_{10}^0(r) \right\},$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x_1 - ls}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{r};$$

$$g_{jk}^0(r) = C_0 G_{j,k}(\rho_0 r) + C_1 G_{j,k}(\rho_1 r); \quad \rho_{0,1}^2 = \frac{1}{3} \frac{13Bi + 15 \mp \sqrt{75Bi^2 + (7Bi + 15)^2}}{Bi + 4};$$

коэффициенты  $C_m$  зависят от теплофизических параметров пластины;

$G_{n,v}(z)$  – специальная  $G$ -функция:

$$G_{n,v}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{v-n} K_{n+v}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(v+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k} \quad (n > 0, \operatorname{Re} v > -1),$$

$K_v(z)$  – функция Я. Г. Макдональда порядка  $v$ ;  $\Gamma(v)$  – гамма-функция.

Подставим интегральные представления внутренних силовых факторов (7) в граничные условия (5), полагая при этом, что компоненты обобщённых усилий и моментов основного термоупругого состояния на линии разреза (6) равны нулю. В результате получим две независимых системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) типа А. Л. Коши, описывающие

– безмоментное термоупругое состояние

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s)}{s - \zeta} ds = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2; |\zeta| \leq 1); \quad (9)$$

– состояние термоупругого изгиба

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s)}{s - \zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta - s) \psi_k^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j = \overline{1, 3}; |\zeta| \leq 1), \quad (10)$$

где разностные ядра зависят от специальной  $G$ -функции, например,

$$E_{13}^1(\zeta - s) = 3\Lambda_0 l G_{1,1}(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|).$$

Правые части систем СИУ (9), (10) содержат интегралы от скачков компонент температуры с разностными ядрами, представляющими собой линейные комбинации специальных  $G$ -функций.

Системы СИУ (9), (10) решены численно методом механических квадратур [17] с учётом дополнительных ограничений на искомые функции, которые следуют из требования непрерывности обобщённых перемещений в вершинах разреза  $L$ :

$$\int_{-1}^1 \psi_j^q(s) ds = 0.$$

В результате решения систем (9), (10) с учётом представлений (8) находятся скачки обобщённых перемещений и углов поворота нормали на линии разреза  $L$ . После этого компоненты возмущённого термоупругого состояния пластины определяются по формулам (7). Путём сравнения коэффициентов в ненулевых компонентах тензора напряжений с известными асимптотическими представлениями напряжений при особенности  $r^{-1/2}$  в окрестностях концов разреза, получены выражения для КИН.

Максимальные по модулю значения КИН для поперечного ( $K_{II}^{\max}$ ) и продольного ( $K_{III}^{\max}$ ) сдвига определены с учётом свойств полиномов А. М. Лежандра:

$$K_{II}^{\max} = 0,25\sqrt{\pi l h} E \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \sum_{q=0}^1 |\psi_1^q(s)| \sqrt{1-s^2} \right\};$$

$$K_{III}^{\max} = 0,375\sqrt{\pi l h} E \Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}. \quad (11)$$

**Анализ численных результатов.** Численные исследования посвящены оценке влияния интенсивности теплообмена с внешней средой ( $Bi$ ) и теплофизических свойств разреза ( $\beta_n = l\lambda_n / \lambda$ ) на КИН температурных напряжений (11) для поперечного и продольного сдвига. Расчёты проведены для разреза (6) единичной полудлины ( $l=1$ ). Для анализа поведения температурных КИН предполагалось отсутствие внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния. Оценивалась составляющая КИН, обусловленная возмущённым температурным полем, вызванным наличием разреза. На линии разреза ( $|x_1| \leq l$ ) предполагалось действие однородного теплового потока:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_0 = \text{const} \neq 0; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0.$$

Рассмотрен случай верхнего одностороннего теплообмена ( $Bi^+ = Bi$ ;  $Bi^- = 0$ ) с окружающей средой. Значение коэффициента С. Д. Пуассона бралось равным  $\nu = 0,3$ .

Результаты численных исследований представлены на рис. 1 и рис. 2 в виде графиков зависимостей максимальных относительных значений КИН от уровня теплообмена с окружающей средой ( $\lg Bi$ ) при различных значениях параметра теплопроницаемости разреза  $\beta_n$ .

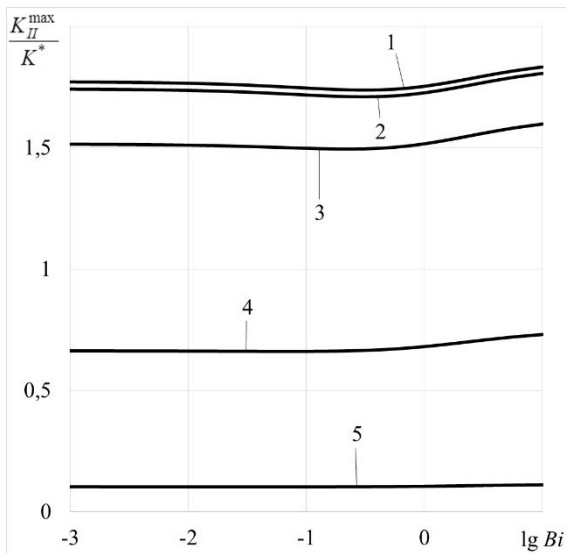


Рис. 1

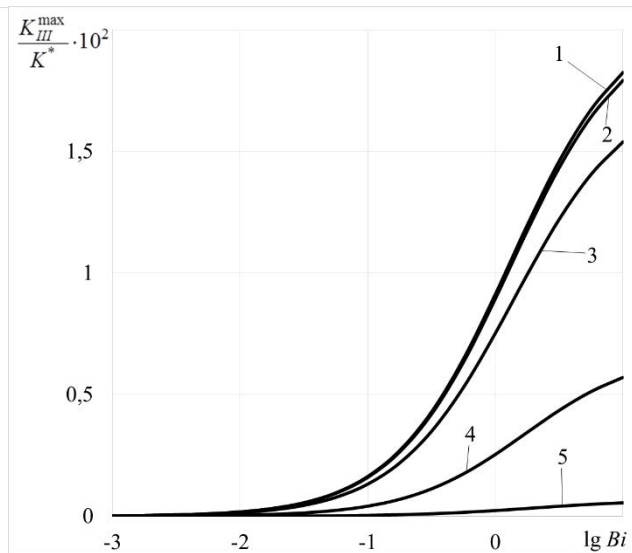


Рис. 2

На рис. 1 представлены графики максимальных относительных значений КИН для поперечного сдвига  $K_{II}^{\max}$ , а на рис. 2 — для продольного сдвига  $K_{III}^{\max}$ . Значения КИН

даны с точностью до величины  $K^* = \alpha q_0 E \sqrt{lh} / 4$ , которая соответствует значению КИН в пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла интенсивности  $q_0$  перпендикулярно линии разреза [17]. Кривые 1 – 5 на рис. 1 и рис. 2 отвечают таким значениям параметра теплопроницаемости разреза  $\beta_n$ : 0 (теплоизолированный разрез); 0,01; 0,1; 1; 10 соответственно.

Из графиков на рис. 1, 2 следует, что максимальные относительные значения КИН поперечного сдвига возрастают, начиная с уровня среднего теплообмена ( $\lg Bi = -0,5$ ), а максимальные относительные значения КИН продольного сдвига возрастают, начиная с уровня слабого теплообмена ( $\lg Bi = -2$ ). В отличие от случая симметричного теплообмена ( $Bi^+ = Bi^- = Bi$ ) [18] увеличение уровня теплообмена при термоизоляции одной из лицевых поверхностей приводит только к возрастанию максимальных значений КИН.

Анализ графиков на рис. 1, 2 позволяет заключить, что увеличение параметра теплопроницаемости разреза  $\beta_n$  приводит только к уменьшению температурных КИН для поперечного и продольного сдвига. Такая зависимость полностью согласуется с общими представлениями механики разрушения. Параметр теплопроницаемости разреза, исходя из своего определения, прямо пропорционален коэффициенту теплопроводности материала промежуточного слоя и обратно пропорционален раскрытию разреза ( $\beta_n = l\lambda_c / (\lambda\delta)$ ). Поэтому увеличение первой составляющей и стремление к нулю второй составляющей приводит к уменьшению возмущения температурного поля и, следовательно, к уменьшению температурных КИН. Если раскрытие разреза будет равно нулю, то есть разрез исчезнет, то и температурных КИН не будет.

Следует заметить, что для рассматриваемого случая малых длин разрезов ( $l = 1$ ) абсолютные значения КИН для продольного сдвига ( $K_{III}$ ) на два порядка меньше, чем для поперечного сдвига ( $K_{II}$ ).

**Выводы.** При обосновании надёжности работы тонкостенных элементов конструкций при температурных нагрузках в случае одностороннего теплообмена актуальной является оценка возможных значений КИН только для поперечного сдвига.

Исходя из проведённого анализа можно также заключить, что учёт теплофизических свойств трещин в поперечном направлении не приводит к увеличению температурных КИН для поперечного и продольного сдвига.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чан Н. Д. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных пластин на основе уточнённой теории / Н. Д. Чан, В. В. Фирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – Т. 14, № 1. – С. 23–32.
2. Goloskokov D. P. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack / D. P. Goloskokov, A. V. Matrosov // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – Vol. 36, No. 1. – P. 137–141.
3. Волчков Ю. М. Модифицированные уравнения слоистых пластин конечных размеров из ортотропного материала. Сравнение результатов численных расчётов с аналитическими решениями / Ю. М. Волчков // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 5. – С. 167–177.
4. Зеленський А. Г. Фундаментальні розв'язки визначальної системи диференціальних рівнянь математичної теорії пластин / А. Г. Зеленський // Вісник Запорізького національного університету. – 2018. – № 1. – С. 13–29.
5. Ghugal Y. M. A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates / Y. M. Ghugal, R. P. Shimpi // Journal of reinforced plastics and composites. – 2002. – Vol. 21, No. 9. – P. 775–813.

6. Валишин А. А. Возмущение температурного поля трещиной в полимерных материалах / А. А. Валишин // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2017. – № 11 (71). – С. 1–22.
7. Valishin A. A. Management and modeling of the influence of cracks on the temperature distribution in polymers and composites / A. A. Valishin // Espacios. – 2017. – Vol. 38, No. 48. – P. 38–52.
8. Petrova V. E. Modeling of thermomechanical fracture of functionally graded materials with respect to multiple cracks interaction / V. E. Petrova, S. Schmauder // Fizicheskaya Mezomekhanika. – 2017. – Vol. 20, No. 3. – P. 5–12.
9. Zelenyak V. M. Mathematical modeling of stationary thermoelastic state in a half plane containing an inclusion and a crack due to local heating by a heat flux / V. M. Zelenyak // Mathematical Modeling and Computing. – 2020. – Vol. 7, No. 1. – P. 88–95.
10. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – Киев : Наукова думка, 1982. – 296 с.
11. Пелех Б. Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский. – Киев : Наукова думка, 1980. – 216 с.
12. Кит Г. С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. – Киев : Наукова думка, 1984. – 280 с.
13. Шевченко В. П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами : учебное пособие / В. П. Шевченко, А. С. Гольцев. – Киев : УМК ВО, 1988. – 84 с.
14. Бондаренко Н. С. Исследование температурного поля в изотропной пластине с теплопроницаемым разрезом на базе обобщенной теории / Н. С. Бондаренко // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2014. – № 2. – С. 41–48.
15. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.
16. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие // В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк : ДонГУ, 1980. – 128 с.
17. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 444 с.
18. Бондаренко Н. С. Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 9 (55). – С. 42–52.

*Поступила в редакцию 05.04.2022 г.*

# INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF THE ENVIRONMENT ON THE THERMOELASTIC STATE OF AN ISOTROPIC PLATE WITH A HEAT-PERMEABLE CUT IN THE ONE-SIDED HEAT EXCHANGE

*N. S. Bondarenko, A. S. Goltsev*

On the basis of the generalized theory in the version of the  $\{1,0\}$ -approximation, the problem of thermoelasticity for an isotropic plate with a heat-permeable cut in the case of upper one-sided heat exchange under the action of a uniform heat flow is solved. The influence of the intensity of heat exchange with the external environment and the heat-permeability parameter of the cut on the value of the stress intensity factors is investigated.

**Keywords:**  $\{1,0\}$ -approximation; isotropic plate; heat-permeable cut; one-sided heat exchange; heat-permeability parameter of the cut; stress intensity factors.

**Бондаренко Наталья Сергеевна**

кандидат физико-математических наук, доцент;  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк, ДНР.  
E-mail: n.bondarenko@donnu.ru

**Bondarenko Natalya Sergeevna**

Candidate of Phisico-Mathematical Sciences, Docent;  
Donetsk National University, Donetsk, DPR.

**Гольцев Аркадий Сергеевич**

доктор физико-математических наук, профессор;  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк, ДНР.  
E-mail: a.goltsev@donnu.ru

**Goltsev Arkady Sergeevich**

Doctor of Phisico-Mathematical Sciences, Professor;  
Donetsk National University, Donetsk, DPR.

УДК 531.38; 531.39

# ПОЛУРЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ПЕРВОГО ТИПА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

© 2022. Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Ю.С. Горбунова

В статье рассмотрены полурегулярные прецессии первого типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получено два дифференциальных уравнения на функцию, определяющую скорость собственного вращения гиростата. При некоторых условиях на параметры задачи построены два решения исходных уравнений, которые характеризуются либо линейной структурой скорости собственного вращения от независимой переменной, либо квадратичной функцией квадрата скорости собственного вращения от данной переменной.

**Ключевые слова:** прецессии, переменный гиростатический момент, потенциальные и гироскопические силы.

**Введение.** В динамике твердого тела, имеющего неподвижную точку, известны многочисленные случаи прецессий под действием силы тяжести и под действием потенциальных и гироскопических сил [1, 2]. Наиболее известными являются регулярные прецессии гироскопа Лагранжа относительно вертикали и гироскопа Д. Гриоли [3] относительно наклонной оси. Ф. Кляйном и А. Зоммерфельдом [4] исследованы прикладные задачи, связанные с движением гироскопа Лагранжа с учетом сил сопротивления, возникающих в результате движения этого гироскопа по шероховатой поверхности. Важность изучения прецессий тела в задачах посвященных прикладной теории гироскопических систем отмечена А.Ю. Ишлинским [5]. В последнее время интенсивно рассматриваются условия существования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом [6] в силовых полях сложной структуры. В этой монографии приведены результаты по изучению не только регулярных прецессий гиростата, но и полурегулярных прецессий первого и второго типов, а также прецессий общего вида и прецессионно-изоконических движений гиростата. Как и в монографии [6], так и в данной статье применяется модель гиростата, предложенная В.В. Румянцевым [7] и П.В. Харламовым [8]. В данных моделях ротор может быть не геометрически симметричным (распределение масс гиростата не изменяется с течением времени), а динамически симметричным (распределение масс гиростата может меняться с течением времени).

Данная статья посвящена изучению полурегулярных прецессий первого типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с учетом переменности гиростатического момента. Установлены два класса решений уравнений движения гиростата, которые описывают рассматриваемые движения и представляют собой элементарные функции от вспомогательной переменной. Зависимость данной переменной от времени находится обращением рациональной функции.

**1. Постановка задачи.** Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [9–13]

$$A\dot{\omega} + \dot{\lambda}(t) = (A\omega + \lambda(t)) \times \omega + \omega \times Bv + v \times (Cv - s) = 0, \quad (1)$$

$$\dot{v} = v \times \omega. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости гиростата;  $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  – вектор гиросtatического момента;  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции;  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$  – матрица, характеризующая гироскопические силы;  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  матрица, определяющая квадратичные члены по компонентам единичного вектора оси симметрии силовых полей  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ;  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор обобщенного центра масс гиростата; точка над переменными  $\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{v}(t)$  обозначает дифференцирование по времени  $t$ . Уравнения (1),(2) имеют первые интегралы

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k, \quad (3)$$

где  $k$  – произвольная постоянная. Все указанные выше переменные и параметры заданы в главной системе координат  $Oxyz$  единичными векторами  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  ( $O$  – неподвижная точка гиростата).

Отметим, что в механической постановке уравнения (1), (2) описывают движение гиростата в силовом поле, которое является суперпозицией ньютоновского кулоновского, магнитного полей в предположении, что только тело-носитель  $S_0$  намагничено и заряжено, а роторы  $S_1, S_2, S_3$ , не намагничены и не несут электрических зарядов. Следовательно, в постановке (1), (2) токи Фуко не возникают.

Ссылки на статьи [11, 12] связаны с тем, что в силу аналогии, указанной в [10–13] уравнения (1),(2) линейным преобразованием приводятся к уравнениям движения тела в идеальной жидкости. В дальнейшем полагаем, что тело-носитель содержит один ротор  $S_3$ , который является динамически симметричным [7, 8] и вращается с угловой скоростью  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$  относительно оси  $Oz$ . То есть уравнения (1), (2) должны изучаться совместно с уравнениями [8]:

$$\dot{\lambda}_3(t) = L(t), \quad \lambda_3(t) = D_3(\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{i}_3 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)), \quad (4)$$

где  $D_3$  – момент инерции ротора  $S_3$  относительно оси  $Oz$ ,  $L(t)$  – проекция моментов и сил, действующих со стороны тела-носителя на ротор  $S_3$ . Как показано П.В. Харламовым [8] уравнения (4) можно рассматривать совместно с (1), (2) на основании двух подходов: первый подход состоит в том, что в случае задания  $L(t)$  уравнения (4) служат для определения угловой скорости  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$  ротора  $S_3$ ; второй подход используется для нахождения функции  $L(t)$  тогда, когда проинтегрированы уравнения (1), (2) и задана скорость  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ .

Полурегулярные прецессии гиростата первого типа [1, 2] зададим векторным инвариантным соотношением (ИС) [1, 2, 10]

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon_0 \mathbf{v} + g(v_3) \boldsymbol{\beta}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_0$  – скорость прецессии;  $g(v_3)$  – дифференцируемая функция переменной  $v_3$ , определяющая скорость собственного вращения гиростата;  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  – постоянный единичный вектор ( $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$ ). Отметим, что случай  $g(v_3) = g_0 = \text{const}$  рассмотрен в [14].

Подставим  $\boldsymbol{\omega}$  из (5) в уравнение Пуассона (2)

$$\dot{\mathbf{v}} = g(v_3)(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\beta}). \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует ИС:  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} = c_0$ , где  $c_0$  – постоянная. В скалярном виде это ИС и уравнение (5) запишем так

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = c_0, \quad (7)$$

$$\omega_i = \varepsilon_0 v_i + g(v_3) \beta_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (8)$$

Для производных  $\dot{v}_i$  из (6) получим

$$\dot{v}_1 = g(v_3)(\beta_3 v_2 - \beta_2 v_3), \quad \dot{v}_2 = g(v_3)(\beta_1 v_3 - \beta_3 v_1), \quad \dot{v}_3 = g(v_3)(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2), \quad (9)$$

Постановка задачи заключается в исследовании у уравнений (1), (2) ИС (7), (8), то есть в нахождении функций  $g(v_3)$ , параметров  $\varepsilon_0, \beta_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) и параметров уравнения (1).

**2. Интегрирование уравнений (1), (2) на ИС (7), (8).** Интерес представления аналитической формы прецессий первого типа в форме (7), (8), как показано в статьях [15, 16], состоит в том, что уравнения (9) интегрируются в виде квадратур. Запишем результат, представленный в [15]:

$$v_1(v_3) = \frac{1}{\varepsilon_0^2} [\beta_1(c_0 - \beta_3 v_3) + \beta_2 \sqrt{F(v_3)}], \quad (10)$$

$$v_2(v_3) = \frac{1}{\varepsilon_0^2} [\beta_2(c_0 - \beta_3 v_3) - \beta_1 \sqrt{F(v_3)}], \quad (11)$$

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{g(v_3)\sqrt{F(v_3)}} = t - t_0, \quad (12)$$

где  $\varepsilon_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$ , а  $F(v_3)$  имеет вид

$$F(v_3) = -v_3^2 + 2c_0\beta_3 v_3 + (\varepsilon_0^2 - c_0^2). \quad (13)$$

Для интегрирования уравнения (1) запишем скалярные уравнения, которые следуют из (1) при условиях:  $\lambda_1(t) = 0, \lambda_2(t) = 0$

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - \lambda_3(t)\omega_2 + B_3\omega_2 v_3 - B_2\omega_3 v_2 + s_2 v_3 - s_3 v_2 + (C_3 - C_2)v_2 v_3, \quad (14)$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \lambda_3(t)\omega_1 + B_1\omega_3 v_1 - B_3\omega_1 v_3 + s_3 v_1 - s_1 v_3 + (C_1 - C_3)v_3 v_1, \quad (15)$$

$$(A_3\omega_3 + \lambda_3(t))^\bullet = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + B_2\omega_1 v_2 - B_1\omega_2 v_1 + s_1 v_2 - s_2 v_1 + (C_2 - C_1)v_1 v_2. \quad (16)$$

Подставим  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) из (8) во второй интеграл системы (3)

$$(A_3\omega_3 + \lambda_3(t)) = \frac{1}{v_3} \left[ k_0 + \frac{1}{2}(B_1 - B_3 - 2\varepsilon_0 A_1)v_1^2 + \frac{1}{2}(B_2 - B_3 - 2\varepsilon_0 A_2)v_2^2 - g(v_3)(\beta_1 A_1 v_1 + \beta_2 A_2 v_2) \right], \quad (17)$$

где  $k_0 = k + \frac{1}{2}B_3$ .

Исключим из уравнений (14),(15) функцию  $\lambda_3(t)$ . Полученное уравнение представим так

$$\left[ \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2) - s_3 v_3 + \frac{1}{2}C_3 v_3^2 \right]^\bullet = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_3(B_1 v_1\omega_2 - B_2 v_2\omega_1) + v_3(s_2\omega_1 - s_1\omega_2) + v_3(C_1 v_1\omega_2 - C_2 v_2\omega_1). \quad (18)$$

Рассмотрим частный случай, который характеризуется условиями

$$A_2 = A_1, B_2 = B_1, C_2 = C_1, s_2 = 0, s_1 = 0, \beta_3 = 0. \quad (19)$$

При выполнении равенств (19) из уравнения (16) в силу третьего уравнения системы (9) имеем

$$\lambda_3(v_3) = l_1 - (B_1 + \varepsilon_0 A_3)v_3, \quad (20)$$

а уравнение (18) позволяет указать первый интеграл

$$A_1(g^2(v_3) + 2\varepsilon_0 c_0 g(v_3)) - [\varepsilon_0^2 A_1 + \varepsilon_0 B_1 + (C_1 - C_3)]v_3^2 - 2s_3 v_3 = l_2. \quad (21)$$

В (20),(21)  $l_1, l_2$  – произвольные постоянные. Внесем  $\lambda_3(v_3)$  из (20) в уравнение (17)

$$c_0 A_1 g(v_3) = \tilde{p}_0 + \frac{1}{2}(B_1 + B_3 + 2\varepsilon_0 A_1)v_3^2 - l_1 v_3, \quad \tilde{p}_0 = k + \frac{1}{2}(B_1 - \varepsilon_0 A_1). \quad (22)$$

Рассмотрим уравнения (21),(22) при условии их совместимости. В первом случае положим  $c_0 = 0$ . Тогда из (22) следует  $l_1 = 0$ ,  $\tilde{p}_0 = 0$  и условие на параметры

$$B_1 + B_3 + 2\varepsilon_0 A_1 = 0. \quad (23)$$

Из равенств (20) и (21) находим функции  $\lambda_3(v_3)$  и  $g^2(v_3)$

$$\lambda_3(v_3) = -(B_1 + \varepsilon_0 A_3)v_3, \quad g^2(v_3) = \frac{1}{A_1}[(\varepsilon_0^2 A_1 + \varepsilon_0 B_1 + C_1 - C_3)v_3^2 + 2s_3 v_3 + l_2]. \quad (24)$$

Пусть теперь  $c_0 \neq 0$ . Подставим функцию  $g(v_3)$ , найденную из (22) в равенство (21) и потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по переменной  $v_3$ . Тогда найдем такие ограничения на параметры задачи: условие(23) и равенства

$$l_1^2 = c_0 A_1 (\varepsilon_0^2 A_1 + \varepsilon_0 B_1 + C_1 - C_3),$$

$$\tilde{p}_0 = -\frac{c_0^2 A_1}{l_1^2} (s_3 + \varepsilon_0 l_1), \quad (25)$$

$$l_2 = \frac{\tilde{p}_0}{c_0^2 A_1} (\tilde{p}_0 + \varepsilon_0 c_0^2 A_1).$$

Система (25) указывает на последовательность нахождения произвольных постоянные  $l_1, l_2, \tilde{p}_0$ . Учтем равенство (23) в формуле (22). Тогда значение  $g(v_3)$  таково

$$g(v_3) = \frac{1}{c_0 A_1} (\tilde{p}_0 - l_1 v_3). \quad (26)$$

Следовательно, в случае (19) функция  $g(v_3)$  может принимать значения (24) (при  $c_0 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = 0$ ) и (26). Первый вариант характеризуется тем, что  $g^2(v_3)$  является квадратичной функцией по  $v_3$ , а второй вариант – функция  $g(v_3)$  является линейной функцией по этой переменной. В обоих вариантах функция  $\lambda_3(v_3)$  имеет одинаковый вид, указанный в (24).

Перейдем к общему анализу системы уравнений (16)–(18), которая очевидно эквивалентна системе (14)–(16), поскольку равенство (17) служит первым интегралом этой системы. Подставим значения  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) из (8) в уравнение (18), значение  $A_3 \omega_3 + \lambda_3(t)$  из (17) в уравнение (16). Получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & g(v_3)g'(v_3)(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2)[g(v_3)(A_1 \beta_1^2 + A_2 \beta_2^2) + \varepsilon_0(A_1 \beta_1 v_1 + A_2 \beta_2 v_2)] + \\ & + \beta_1 \beta_2 \beta_3 (A_1 - A_2)g^3(v_3) + \beta_3 g^2(v_3)[\beta_1 \varepsilon_0 v_2 (2A_1 - A_2) + \beta_2 \varepsilon_0 v_1 (A_1 - 2A_2) + \\ & + \beta_1 B_2 v_2 - \beta_2 B_1 v_1] + g(v_3)\{\beta_3 \varepsilon_0 v_1 [2\varepsilon_0(A_1 - A_2) + B_2 - B_1] + \\ & + \beta_2 v_1 v_3 (C_3 - C_1 - \varepsilon_0 B_1 - \varepsilon_0^2 A_2) + \beta_1 v_2 v_3 (C_2 - C_3 + \varepsilon_0 B_2 + \varepsilon_0^2 A_1) - \\ & - s_3(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2) - v_3(\beta_1 s_2 - \beta_2 s_1)\} - \varepsilon_0 v_1 v_2 v_3 [\varepsilon_0^2 (A_2 - A_1) + \varepsilon_0 (B_1 - B_2) + \\ & + C_1 - C_2] + \varepsilon_0 v_3 (s_1 v_2 - s_2 v_1) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & -g(v_3)g'(v_3)v_3(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2)(A_1 \beta_1 v_1 + A_2 \beta_2 v_2) + g^2(v_3)[\beta_3 v_3 (A_2 \beta_2 v_1 - A_1 \beta_1 v_2) + \\ & + (\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2)(A_1 \beta_1 v_1 + A_2 \beta_2 v_2)] + g(v_3)\{v_3^2(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2)[B_3 + \varepsilon_0(A_1 + A_2)] + \\ & + \beta_3 v_1 v_2 v_3 [B_1 - B_2 + 2\varepsilon_0(A_2 - A_1)] - (\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2) \left[ k_0 + \frac{1}{2}(B_1 - B_3 - 2\varepsilon_0 A_1)v_1^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(B_2 - B_3 - 2\varepsilon_0 A_2)v_2^2 \right] + v_3^2 \{v_1 v_2 [\varepsilon_0^2 (A_2 - A_1) + \varepsilon_0 (B_1 - B_2) + C_1 - C_2] + \\ & \left. + s_1 v_2 - s_2 v_1 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Если внести значения  $v_1(v_3), v_2(v_3)$  из соотношений (10), (11) в уравнения (27), (28), то найдем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений на функцию  $g(v_3)$ , которая будет содержать многочлены по переменной  $v_3$  и радикалы  $\sqrt{F(v_3)}$ . Из этих

уравнений, исключая функцию  $g'(v_3)$ , получим уравнение на  $g(v_3)$ . После подстановки ее в одно из уравнений (27), (28) имеем в силу (10), (11) иррациональное уравнение следующего вида  $\Phi(v_3, \sqrt{F(v_3)}) = 0$ . Данное уравнение можно привести к многочлену по  $v_3$ , но это уравнение будет настолько сложным, что его общее исследование весьма затруднительно. Поэтому для нахождения наглядного результата требуются дополнительные условия на параметры задачи. В данной статье положим, что выполняются следующие равенства

$$A_2 = A_1, B_2 = B_1, C_2 = C_1, s_2 = d_0\beta_1, s_1 = d_0\beta_2, \beta_3 = 0, \quad (29)$$

где  $d_0$  – постоянный параметр, подлежащий определению. Как следует из условий (19), условия (29) являются более общими. Ограничения на параметры, указанные в (29) позволяют не только существенно упростить уравнения (28), (29), но и воспользоваться ИС (7), которое в данном случае упрощается

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = c_0, \quad (30)$$

где  $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ . Введем обозначения

$$p_0 = \varepsilon_0 A_1 - k - \frac{1}{2} B_1, \quad p_2 = \frac{1}{2} (B_1 + B_3 + 2\varepsilon_0 A_1), \quad P_0 = p_0 + \varepsilon_0 c_0^2 A_1, \\ d_2 = \frac{1}{2} [\varepsilon_0 (B_3 - B_1) + 2(C_3 - C_1)], \quad D_2 = d_0 + c_0 d_2, \quad d_1 = d_2 - \varepsilon_0 p_0. \quad (31)$$

На основании (29)–(31) уравнения (27), (28) приведем к виду

$$-A_1 c_0 g(v_3) g'(v_3) + A_1 c_0 g^2(v_3) + g(v_3) (p_2 v_3^2 + p_0) + d_0 v_3^2 = 0, \quad (32)$$

$$A_1 g(v_3) g'(v_3) (g(v_3) + c_0 \varepsilon_0) + g(v_3) (d_1 v_3 - s_3) - \varepsilon_0 d_0 v_3 = 0, \quad (33)$$

Вместо уравнения (33) рассмотрим линейную комбинацию уравнений (32), (33), умножив левую часть уравнения (32) на  $\varepsilon_0$ , а левую часть уравнения (33) на  $v_3$  и сложив полученные уравнения. Тогда найдем более простое уравнение по сравнению с (33):

$$A_1 v_3 g(v_3) g'(v_3) + c_0 \varepsilon_0 A_1 g^2(v_3) + d_2 v_3^2 - s_3 v_3 + \varepsilon_0 p_0 = 0. \quad (34)$$

Исключим из уравнений (32), (34) производную  $g'(v_3)$ :

$$A_1 c_0 g^2(v_3) + g(v_3) (p_2 v_3^2 + P_0) + D_2 v_3^2 - c_0 s_3 v_3 + \varepsilon_0 c_0 p_0 = 0. \quad (35)$$

Заметим, что при условии  $c_0 = 0$  из уравнения (32) следует несуществование решения  $g(v_3) = g_0 + g_1 v_3$  в предположении  $d_0 \neq 0$ . Если в (32) полагать, что  $c_0 \neq 0$ , то опять приходим к заключению, что при  $d_0 \neq 0$  уравнение (32) не допускает линейного по  $v_3$  решения.

**3. Исследование условий существования у дифференциального уравнения (32) ИС (35).** Для нахождения указанных в названии данного пункта условий необходимо применить метод ИС Т. Леви-Чивиты. То есть следует исследовать ИС (35) и его производную в силу уравнения (32). Вначале изучим вариант  $c_0 = 0$  для уравнений (32), (33), так как уравнение (35) получено в предположении  $c_0 \neq 0$ . При наличии условия  $c_0 = 0$  из уравнения (32) имеем (случай  $p_2 = 0, p_0 = 0$  приводит к условию  $d_0 = 0$ , что исключено из рассмотрения)

$$g(v_3) = -\frac{d_0 v_3^2}{p_2 v_3^2 + P_0}. \quad (36)$$

Подстановка значения  $g(v_3)$  из формулы (36) в уравнение (33) и требование того, чтобы оно допускало решение (36) приводит к случаю  $p_2 = 0, p_0 = 0$ . То есть из (36) следует, что  $d_0 = 0$ . И так в дальнейших преобразованиях полагаем  $c_0 \neq 0$ .

Вычислим производную от ИС (35) в силу уравнения (34) и в полученном равенстве учтем ИС (35). Тогда для функции  $g(v_3)$  найдем следующее значение

$$g(v_3) = \frac{G_1(v_3)}{G_2(v_3)}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} G_1(v_3) &= p_2(2d_0 + 3c_0d_2)v_3^4 - 3p_2c_0s_3v_3^3 + R_2v_3^2 + R_1v_3 + R_0, \\ G_2(v_3) &= -2p_2^2v_3^4 + Q_2v_3^2 + Q_1v_3 + Q_0. \end{aligned} \quad (38)$$

В формулах (38) введены обозначения

$$\begin{aligned} R_0 &= \varepsilon_0c_0p_0(p_0 - \varepsilon_0c_0^2A_1), \quad R_1 = -c_0s_3(p_0 - \varepsilon_0c_0^2A_1), \\ R_2 &= c_0[p_0(3\varepsilon_0p_2 + d_2) - \varepsilon_0c_0d_0A_1], \quad Q_0 = -\varepsilon_0c_0^2A_1(p_0 - \varepsilon_0c_0^2A_1), \\ Q_1 &= c_0^2s_3A_1, \quad Q_2 = 2c_0d_0A_1 - p_2(2p_0 + \varepsilon_0c_0^2A_1). \end{aligned} \quad (39)$$

Внесем значение (37) в уравнение (35)

$$A_1c_0G_1^2(v_3) + (p_2v_3^2 + P_0)G_1(v_3)G_2(v_3) + G_2^2(v_3)(D_2v_3^2 - c_0s_3v_3 + \varepsilon_0c_0p_0) = 0. \quad (40)$$

Потребуем, чтобы равенство (40) было тождеством по переменной  $v_3$ . В силу вида обозначений (38) вначале представим его так

$$\begin{aligned} &M_{10}v_3^{10} + M_9v_3^9 + M_8v_3^8 + M_7v_3^7 + M_6v_3^6 + \\ &+ M_5v_3^5 + M_4v_3^4 + M_3v_3^3 + M_2v_3^2 + M_1v_3 + M_0 = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Из уравнения (41) следует, что должны выполняться равенства  $M_i = 0$  ( $i = \overline{0, 10}$ ). Поскольку получение (41) представляется достаточно трудоемкой задачей, то на первом этапе рассмотрим равенство  $M_0 = 0$  и  $M_{10} = 0$ ,  $M_9 = 0$ .

Условие  $M_0 = 0$  не дает ограничений на параметры задачи, так как в силу обозначений (39) равенство  $M_0 = 0$  выполняется для всех значений коэффициентов  $Q_0$ ,  $R_0$  многочленов из (38).

Равенство  $M_{10} = 0$  на основании введенных ранее обозначений запишем так

$$p_2d_2 = 0, \quad (43)$$

а из условия  $M_9 = 0$  получим

$$p_2s_3 = 0. \quad (44)$$

Рассмотрим случай  $p_2 = 0$ . Уравнения (43), (44) выполняются тождественно. Из формул (38) следует

$$G_1(v_3) = R_2v_3^2 + R_1v_3 + R_0, \quad G_2(v_3) = Q_2v_3^2 + Q_1v_3 + Q_0. \quad (45)$$

В силу (45) из равенства (37) получим

$$g(v_3) = \frac{R_2v_3^2 + R_1v_3 + R_0}{Q_2v_3^2 + Q_1v_3 + Q_0}, \quad (46)$$

где  $R_2 = c_0(p_0d_2 - \varepsilon_0c_0d_0A_1)$ ,  $Q_2 = 2c_0d_0A_1$ .

Уравнение (40) при  $p_2 = 0$  упрощается

$$\begin{aligned} &A_1c_0(R_2v_3^2 + R_1v_3 + R_0)^2 + P_0(R_2v_3^2 + R_1v_3 + R_0)(Q_2v_3^2 + Q_1v_3 + Q_0) + \\ &+ (Q_2v_3^2 + Q_1v_3 + Q_0)^2(D_2v_3^2 - c_0s_3v_3 + \varepsilon_0c_0p_0) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Приравняем к нулю коэффициент при  $v_3^6$  и в силу (31) имеем

$$Q_2(d_0 + c_0d_2) = 0, \quad (48)$$

так как  $Q_2 \neq 0$ , то из (48) следует

$$d_0 = -c_0d_2, \quad (49)$$

где по предположению  $d_2 \neq 0$ . Тогда значение параметра  $D_2$  равно нулю. Это свойство позволяет из равенства (47) получить условие

$$s_3 = 0. \quad (50)$$

Найдем значение  $R_2$  при условии (49):

$$R_2 = c_0d_2P_0. \quad (51)$$

При выполнении условия (50) в силу (39) получим

$$Q_1 = 0, R_1 = 0. \quad (52)$$

Рассмотрим равенство нулю коэффициента при  $v_3^4$  в уравнении (47)

$$A_1 c_0 R_2^2 + P_0 R_2 Q_2 + Q_2^2 = 0. \quad (53)$$

Принимая во внимание условия (49), а также обозначения (31),(39),(51) из равенства (53) найдем

$$d_2(p_0 - \varepsilon_0 c_0^2 A_1) = 0. \quad (54)$$

В силу предположения  $d_2 \neq 0$  из равенства (54) устанавливаем условие:  $p_0 = \varepsilon_0 c_0^2 A_1$ . Тогда из соотношений (39) следует, что  $R_0 = 0, Q_0 = 0$ . Учитывая равенства (52) из формулы (46) имеем для  $g(v_3)$  постоянное значение. Следовательно при  $d_0 \neq 0$  случай  $p_2 = 0$  невозможен.

**4. Анализ случая  $d_2 = 0$ .** В силу данного условия из значения  $D_2$ , указанного в системе (31), получим  $D_2 = d_0$  и условие на параметры

$$\varepsilon_0(B_3 - B_1) + 2(C_3 - C_1) = 0. \quad (55)$$

Введем обозначения

$$G_3(v_3) = p_2 v_3^2 + P_0, \quad G_4(v_3) = d_0 v_3^2 + \varepsilon_0 c_0 p_0. \quad (56)$$

Запишем равенство (40) при условии  $d_2 = 0$  и учтем (50),(56)

$$A_1 c_0 G_1^2(v_3) + G_1(v_3)G_2(v_3)G_3(v_3) + G_4(v_3)G_2^2(v_3) = 0, \quad (57)$$

где

$$G_1(v_3) = 2p_2 d_0 v_3^4 + R_2 v_3^2 + R_0, \quad G_2(v_3) = -2p_2^2 v_3^4 + Q_2 v_3^2 + Q_0. \quad (58)$$

Исследование уравнения (57), как показано ниже, имеет определенные преимущества по сравнению с изучением уравнения (41). Действительно, из уравнения (57) вытекает, что корни уравнения  $G_1(v_3) = 0$  должны совпадать с корнями уравнения

$$G_4(v_3)G_2(v_3) = 0. \quad (59)$$

В первом варианте положим, что все корни уравнений  $G_1(v_3) = 0$ ,  $G_2(v_3) = 0$  совпадают. Но тогда функция (37) принимает постоянное значение и прецессия гиростата является регулярной прецессией. Поэтому необходимо считать, что один корень по  $v_3^2$  уравнения  $G_1(v_3) = 0$  совпадает с корнем уравнения  $G_2(v_3) = 0$ , а другой корень совпадает с корнем уравнения  $G_4(v_3) = 0$ .

Следуя данному подходу подставим значение  $v_3^2 = -\frac{\varepsilon_0 c_0 p_0}{d_0}$  в уравнение  $G_1(v_3) = 0$ . Тогда найдем значение  $d_0$ :

$$d_0 = \varepsilon_0 c_0 p_2, \quad (60)$$

где  $d_0 \neq 0$ . Запишем значение корня, который имеют многочлены  $G_1(v_3) = 0$ ,  $G_2(v_3) = 0$ :

$$v_3^2 = -\frac{1}{p_0 p_2}(p_0 - \varepsilon_0 c_0^2 A_1). \quad (61)$$

Если этот корень обращается в нуль, то функция  $g(v_3)$  из (37), в силу равенств  $R_0 = 0$ ,  $R_1 = 0$ ,  $Q_0 = 0$ ,  $Q_1 = 0$  обращается в константу. Поэтому подставим значение (61) в уравнение  $G_1(v_3) = 0$ . В результате установим уравнение на параметр  $p_0$ :

$$2p_0^2 - 5p_0 \varepsilon_0 c_0^2 A_1 + 2\varepsilon_0^2 c_0^4 A_1^2 = 0. \quad (62)$$

Уравнение (62) имеет следующие корни

$$p_0^{(1)} = 2\varepsilon_0 c_0^2 A_1, \quad p_0^{(2)} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0^2 A_1. \quad (63)$$

В вариантах (63) дальнейшие преобразования очевидны. Преобразуем уравнение (57) с учетом одного из значений (63). Сокращая на общие множители слагаемые полученных уравнений, требуем, чтобы они были тождествами по  $v_3$ . Тогда найдем общее условие для (63), которое определяется равенством  $p_2 = 0$ . Следовательно, в случае  $d_2 = 0$  опять приходим к рассмотрению ранее варианту, что означает, что необходимо в

равенствах для значений  $s_1$  и  $s_2$  из системы (29) положить  $d_2 = 0$ . То есть условия (19) и (29) совпадают.

**5. Исследование уравнений (4).** Для анализа системы (4) перейдем к дифференцированию по переменной  $v_3$ , используя интегральное уравнение (12):

$$\dot{v}_3 = g(v_3)\sqrt{F(v_3)}, \quad (64)$$

а функцию  $L(t)$  преобразуем к функции  $L_*(v_3) = L(t(v_3))$ . В силу (20), (64) получим

$$\dot{\lambda}_3(t) = \lambda'_3(v_3)g(v_3)\sqrt{F(v_3)}, \quad \dot{\alpha}(t) = \alpha(v_3)g(v_3)\sqrt{F(v_3)}, \quad (65)$$

где  $\lambda'_3(v_3) = -(B_1 + \varepsilon_0 A_3)$ . Тогда из уравнений (4) следует

$$L_*(v_3) = -(B_1 + \varepsilon_0 A_3)g(v_3)\sqrt{F(v_3)},$$

$$\alpha(v_3) = \frac{1}{D_3} \int \frac{[l_1 - (B_1 + \varepsilon_0(A_3 + D_3))]dv_3}{g(v_3)\sqrt{F(v_3)}}, \quad (66)$$

где функция  $F(v_3)$  имеет вид (13), а функция  $g(v_3)$  в зависимости от значения параметра  $c_0$  принимает значения, указанные в (24), (26). Таким образом, построено два решения уравнений (1), (2), которые описывают полурегулярные прецессии первого типа.

**Выводы.** Изучена задача об условиях существования полурегулярных прецессий первого типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены два дифференциальных уравнения относительно скорости собственного вращения гиростата, которые содержат полиномиальные и иррациональные выражения от переменной  $v_3$ . В силу весьма сложной структуры этих уравнений рассмотрен частный случай ИС, задающего прецессию гиростата, а также при наличии ограничений на параметры уравнений движения гиростата. Данный подход в изучении прецессий первого типа позволил построить два новых решения уравнений класса Кирхгофа-Пуассона с переменным гиростатическим моментом. Общая структура редуцированных уравнений позволяет продолжить их изучение, например, при  $\beta_2 = 0$ ,  $s_2 = 0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 4. – С. 573–587.
2. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр., А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина – Донецк: ДонНУ. – 2009. – 222 с.
3. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl / G.Grioli – 1947. – S. 4. – Vol. 26, f. 3–4. – P. 271–281.
4. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld. – New York e. a. Johnson reprint corp., 1965. – 966 S.
5. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука. – 1976. – 672 с.
6. Горр Г. В. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г. В. Горр, А. В. Мазнев, Г.А. Котов. – Донецк: ГУ "ИПММ", 2017. – 265 с.
7. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В.В. Румянцев // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
8. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
9. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев – Донецк: ДонНУ. – 2010. – 364 с.
10. Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости / В.А. Стеклов – Харьков. – 1893. – 234 с.
11. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П.В. Харламов // Журнал прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
12. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, No 5. – P. 747–754.
13. Борисов А.В. Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.

14. Горп Г.В. О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горп, Т.В. Белокоп // Прикл. математика и механика. – 2021. – Т. 66, вып. 3. – С. 139-151.
15. Горп Г.В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горп // Прикл. математика и механика. – 2019. – Т. 83, №2. – С. 202–214.
16. Gorr G.V. On three Invariant of the Equations of Motion of a Body in a Potential Field of Force / G.V. Gorr // Mechanics of Solid. – 2019. – Vol. 54, suppl. 2. – P. S104–S114.

*Поступила в редакцию 17.05.2022 г.*

## SEMI-REGULAR PRECESSIONS OF THE FIRST TYPE IN THE PROBLEM OF GYROSTAT MOTION WITH A VARIABLE GYROSTATIC MOMENTUM

**G.V. Gorr, A.V. Maznev, Y.S. Gorbunova**

The paper considers semiregular precessions of the first type of gyrost at under the action of potential and gyroscopic forces. Two differential equations on the function determining the velocity of the gyrost at's own rotation are obtained. Under some conditions on the parameters of the problem, two solutions of the original equations are constructed which are characterized either by the linear structure of the eigen-rotation velocity from an independent variable or by the quadratic function of the square of the eigen-rotation velocity from a given variable.

**Keywords:** precessions, variable gyrostatic momentum, potential and gyroscopic forces.

### **Горп Геннадий Викторович**

доктор физ.-мат. наук, профессор;  
главный научный сотрудник ГУ "Институт  
прикладной математики и механики",  
г. Донецк, ДНР.  
E-mail: gvgorr@gmail.com.

### **Gorr Gennadiy Viktorovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full  
Professor,  
Chief Resercher of the Department of Applied  
Mechanics at the Institute of Applied Mathematics and  
Mechanics, Donetsk, DPR.

### **Мазнев Александр Владимирович**

доктор физико-математических наук,  
доцент; профессор кафедры высшей  
математики и методики преподавания  
математики ГОУ ВПО "Донецкий  
национальный университет", г. Донецк, ДНР.  
E-mail: aleksandr\_maznev@rambler.ru

### **Maznev Oleksandr Vladimirovich**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences,  
Docent, professor at the Department of higher  
mathematics and methods of teaching mathematics  
Donetsk National University, Donetsk, DPR.

### **Горбунова Юлия Сергеевна**

Старший преподаватель кафедры  
аварийно-спасательных работ и техники  
факультета техносферной безопасности  
ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты» МЧС  
ДНР, г. Донецк, ДНР.  
E-mail: yulya\_gorbunova\_1993@mail.ru

### **Yulia Gorbunova**

Senior Lecturer of the Department  
rescue works and equipment  
of the faculty «Techno-sphere safety»  
State Educational Institution of Higher Professional  
Education «The Civil Defence Academy» of  
EMERCOM of DPR, Donetsk, DPR.

## ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ПЛИТ

© 2022. С. А. Калоеров

Прикладная теория изгиба тонких плит Кирхгоффа распространена на случай плит из пьезоматериалов. При этом известные гипотезы Кирхгоффа дополнены условиями на электрический и магнитный потенциалы электромагнитного поля. Показана математическая идентичность новых соотношений с соотношениями, полученными ранее при выполнении аналогичных условий на индукции. Систематизированы основные соотношения для комплексных потенциалов электромагнитоупругого изгиба тонких плит.

**Ключевые слова:** прикладная теория изгиба тонких плит, пьезоматериалы, комплексные потенциалы, многосвязные плиты.

В различных областях современной науки и техники широкое распространение в качестве элементов конструкций получили тонкие пластинки с отверстиями и включениями, находящиеся в условиях поперечного изгиба. В процессе эксплуатации таких конструкций около отверстий и включений, которые в частном случае могут переходить в трещины и линейные включения, возникают большие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. В связи с этим необходимо иметь методы решения таких задач и решения важных классов задач инженерной практики. Но, несмотря на большую практическую потребность изучения напряженно-деформированного состояния многосвязных пластин, находящихся в условиях изгиба, до сих пор исследований в этом направлении выполнено недостаточно.

Хотя еще в XVIII веке были предложены различные подходы описания напряженно-деформированного состояния тонких изотропных плит. Но наиболее приемлемое решение было дано лишь в середине XIX века Кирхгоффом [1, 2], предложившим так называемую прикладную теорию изгиба тонких плит. Несколько позже были разработаны первые методы решения задач в работах Геринга [3] и Буссенеска [4], а позже Губером [5–7] были предложены другие приближенные теории изгиба. Для анизотропных плит фундаментальные результаты по разработке теории и решению задач были получены лишь в 30-е годы XX века Лехницким С. Г. [8, 9]. Для многосвязных плит различные подходы решения задач были предложены в работах Космодамианского А. С., Иванова Г. М. [10], Меглинского В. В. [11]. При этом широко использовались комплексные потенциалы Колосова-Мухелишвили (для изотропных плит) или Лехницкого (для анизотропных плит). В наших работах [12–14] были получены общие представления комплексных потенциалов для произвольных однородных и кусочно-однородных многосвязных изотропных и анизотропных плит для случаев произвольных их загрузок, решен ряд важных задач упругого и вязкоупругого их состояния.

Однако многие элементы современных конструкций, работающих в условиях изгиба плит, изготавливаются из материалов, обладающих пьезоэффектом. Для сплошных плит простейшей микроструктуры некоторые методы решения таких задач предложены в работах [15–17]. Но более актуальны проблемы исследования напряженно-деформированного состояния плит с концентраторами напряжений типа отверстий и включений. Методы решения таких задач разработаны в работах [18–20]. В работе [18] распространением гипотез прикладной теории изгиба плит Кирхгоффа на задачи электромагнитоупругости (с дополнением гипотезами на индукции) сформулированы крае-

вые задачи теории изгиба плит, в [19] для их решения введены и исследованы комплексные потенциалы электромагнитоупругого изгиба плит, в [20] показано, как из общего решения следуют решения для случаев электроупругости, магнитоупругости и классической задачи теории упругости об изгибе плиты.

В данной статье предложенные в работе [18] гипотезы на индукции заменены более естественными гипотезами на потенциалы электромагнитного поля, показано, что при этом основные соотношения не изменяются; систематизированы основные соотношения для комплексных потенциалов.

### 1. Гипотезы прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит.

Рассмотрим тонкую пластинку из пьезоматериала постоянной толщины  $2h$ , отнесенную к прямоугольной системе координат  $Oxyz$  с плоскостью  $Oxy$ , совпадающей со срединной плоскостью плиты (рис. 1), и находящуюся под действием нормальных усилий  $\sigma_z = q(x, y)$  по верхнему основанию и других внешних воздействий по боковой поверхности так, что ее срединная плоскость искривляется. Такую пластинку принято называть тонкой плитой. Будем предполагать, что имеют место условия Кирхгофа [1, 2]:

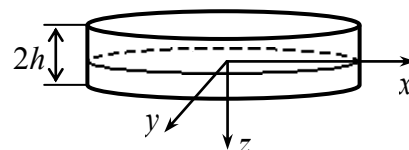


Рис. 1

1. Прямолinéйные отрезки, нормальные к срединной плоскости до деформации, при изгибе плиты остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности и не меняют своей длины.

2. Срединная поверхность плиты является нерастяжимой, т. е. при  $z = 0$  перемещения  $u$  и  $v$  равны нулю;

3. Влияние взаимодействия продольных слоев плиты на удлинения и сдвиги материальных волокон, лежащих в этих слоях, малы и ими можно пренебречь, в связи с чем напряжениями  $\sigma_z$  можно пренебречь.

Кроме того, имеют место условия:

4. В каждой точке плиты имеется плоскость материальной симметрии, параллельная срединной плоскости.

5. Скалярные потенциалы действующих на плиту электрического и магнитного полей линейно зависят от толщины координаты, т. е.

$$\varphi(x, y) = z\varphi_0(x, y), \quad \psi(x, y) = z\psi_0(x, y), \quad (1.1)$$

где  $\varphi_0(x, y)$ ,  $\psi_0(x, y)$  – плотности по толщине плиты потенциалов электрического и магнитного полей.

В силу того, что плита считается тонкой, перемещения ее точек по оси  $Oz$  (прогиб плиты)  $w$  мало изменяются по толщине и можно принять независимыми от  $z$   $w = w(x, y)$ , а для перемещений по осям  $Ox$  и  $Oy$  на основании 1-й гипотезы имеем [10]

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Учитывая эти выражения и независимость прогиба  $w$  и его производных по  $x$  и  $y$  от координаты  $z$ , для точек срединной плоскости ( $z = 0$ ) имеем

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (1.2)$$

а для остальных деформаций находим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Кроме того, на основе (1.1), для компонент векторов напряженностей находим

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -z \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -z \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y}, \\ E_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\Phi_0(x, y), \quad H_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -z \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial x}, \\ H_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -z \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial y}, \quad H_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\Psi_0(x, y),\end{aligned}\quad (1.4)$$

т. е. компоненты  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  являются нечетными функциями толщиной координаты  $z$ , а компоненты  $E_z$ ,  $H_z$  не зависят от этой координаты. На основании уравнений состояния такие же связи получаются для компонент векторов индукций:

$$\begin{aligned}D_x &= z D_x(x, y), \quad D_y = z D_y(x, y), \quad D_z = D_z(x, y), \\ B_x &= z B_x(x, y), \quad B_y = z B_y(x, y), \quad B_z = B_z(x, y).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Под действием внешних сил и электромагнитных воздействий в пьезоэлектрических пластинке возникают напряжения, деформации и электромагнитные поля. В связи с тем, что деформации в пластинке малы и материал пластинки обладает прямолинейной анизотропией и в каждой точке пластинки имеется плоскость материальной симметрии, возникающие в ней напряжения и деформации удовлетворяют системе уравнений электромагнитоупругости, состоящей из уравнений равновесия [21]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0;\end{aligned}\quad (1.6)$$

уравнений вынужденной электромагнитостатики [22–24]

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0,\quad (1.7)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0;\quad (1.8)$$

уравнений электромагнитоупругого состояния [25, 26, 27]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + p_{11}B_x + p_{21}B_y, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + p_{12}B_x + p_{22}B_y, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + p_{16}B_x + p_{26}B_y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + v_{11}B_x + v_{12}B_y, \\
E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + v_{12}B_x + v_{22}B_y, \\
H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + v_{11}D_x + v_{12}D_y + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y, \\
H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + v_{12}D_x + v_{22}D_y + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y.
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $s_{ij}$  – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей,  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях,  $\beta_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$ ,  $v_{ij}$  – соответственно коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях;  $\varphi$ , и  $\psi$  – потенциалы электрического и магнитного полей.

Разрешив систему (1.9) относительно напряжений и индукций, получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y + b_{16}\gamma_{xy} + c_{g11}E_x + c_{g21}E_y + c_{p11}H_x + c_{p21}H_y, \\
\sigma_y &= b_{12}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y + b_{26}\gamma_{xy} + c_{g12}E_x + c_{g22}E_y + c_{p12}H_x + c_{p22}H_y, \\
\tau_{xy} &= b_{16}\varepsilon_x + b_{26}\varepsilon_y + b_{66}\gamma_{xy} + c_{g16}E_x + c_{g26}E_y + c_{p16}H_x + c_{p26}H_y, \\
D_x &= -c_{g11}\varepsilon_x - c_{g12}\varepsilon_y - c_{g16}\gamma_{xy} + d_{g11}E_x + d_{g12}E_y + d_{p11}H_x + d_{p12}H_y, \\
D_y &= -c_{g21}\varepsilon_x - c_{g22}\varepsilon_y - c_{g26}\gamma_{xy} + d_{g12}E_x + d_{g22}E_y + d_{p12}H_x + d_{p22}H_y, \\
B_x &= -c_{p11}\varepsilon_x - c_{p12}\varepsilon_y - c_{p16}\gamma_{xy} + d_{p11}E_x + d_{p12}E_y + e_{p11}H_x + e_{p12}H_y, \\
B_y &= -c_{p21}\varepsilon_x - c_{p22}\varepsilon_y - c_{p26}\gamma_{xy} + d_{p12}E_x + d_{p22}E_y + e_{p12}H_x + e_{p22}H_y,
\end{aligned} \quad (1.10)$$

где коэффициенты связи получаются как элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & d_{g11} & d_{g12} & d_{p11} & d_{p12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & d_{g12} & d_{g22} & d_{p12} & d_{p22} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & d_{p11} & d_{p12} & e_{p11} & e_{p12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & d_{p12} & d_{p22} & e_{p12} & e_{p22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & v_{11} & v_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & v_{12} & v_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & v_{11} & v_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & v_{12} & v_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1.11)$$

Учитывая выражения (1.3), (1.4), из формул (1.10) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -z\tilde{\sigma}_x, \quad \sigma_y = -z\tilde{\sigma}_y, \quad \tau_{xy} = -z\tilde{\tau}_{xy}, \\
D_x &= -z\tilde{D}_x, \quad D_y = -z\tilde{D}_y, \\
B_x &= -z\tilde{B}_x, \quad B_y = -z\tilde{B}_y,
\end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_x &= b_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + b_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - c_{g21}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} - c_{p11}\frac{\partial\psi_0}{\partial x} - c_{p21}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}, \\
\tilde{\sigma}_y &= b_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + b_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - c_{g22}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} - c_{p12}\frac{\partial\psi_0}{\partial x} - c_{p22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tau}_{xy} &= b_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{g26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - c_{p16} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{p26} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 \tilde{D}_x &= -c_{g11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{g16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{g12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - d_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - d_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - d_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 \tilde{D}_y &= -c_{g21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{g26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{g22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - d_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - d_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - d_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 \tilde{B}_x &= -c_{p11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{p16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{p12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_{p11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - d_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - e_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - e_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 \tilde{B}_y &= -c_{p21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{p26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{p22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - d_{p22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - e_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - e_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}. \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

Учитывая выражения (1.12), из первых двух уравнений (1.6) найдем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= z \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= z \left( \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав эти равенства по  $z$ , получим

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} &= \frac{1}{2} z^2 \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} \right) + A_1(x, y), \\
 \tau_{yz} &= \frac{1}{2} z^2 \left( \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} \right) + A_2(x, y). \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

Учитывая, что напряжения (1.14) на основаниях плиты должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= -q(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = -h, \\
 \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = h, \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

для функций  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  найдем выражения

$$\begin{aligned}
 A_1(x, y) &= -\frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} \right), \\
 A_2(x, y) &= -\frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

Тогда из формул (1.14) с учетом (1.13) получим равенства

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} &= \frac{z^2 - h^2}{2} \left[ b_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3b_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + b_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - c_{g11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \right. \\
 &\quad \left. - (c_{g21} + c_{g16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - c_{g26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - c_{p11} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \right. \\
 &\quad \left. - (c_{p21} + c_{p16}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - c_{p26} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right],
 \end{aligned}$$

$$\tau_{yz} = \frac{z^2 - h^2}{2} \left[ b_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3b_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + b_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - c_{g16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - (c_{g12} + c_{g26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - c_{g22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - c_{p16} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - (c_{p12} + c_{p26}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - c_{p22} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right], \quad (1.16)$$

из которых видно, что напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  по толщине плиты изменяются по закону квадратичной параболы, принимая наибольшие значения в точках ее срединной плоскости и обращаясь в нуль на основаниях плиты.

Проинтегрировав по толщине плиты выражения (1.13) и (1.16), для силовых и индукционных моментов, создаваемых напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и индукциями  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ , поперечных сил, создаваемых касательными напряжениями  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ , а также получим

$$M_x = \int_{-h}^h z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h}^h z \sigma_y dz, \quad H_{xy} = \int_{-h}^h z \tau_{xy} dz, \\ N_x = \int_{-h}^h \tau_{xz} dz, \quad N_y = \int_{-h}^h \tau_{yz} dz. \quad (1.17)$$

$$M_{dx} = \int_{-h}^h z D_x dz, \quad M_{dy} = \int_{-h}^h z D_y dz, \\ M_{bx} = \int_{-h}^h z B_x dz, \quad M_{by} = \int_{-h}^h z B_y dz. \quad (1.18)$$

Подставив в равенства (1.1), (1.17) и (1.18) выражения (1.13) и проинтегрировав по толщине плиты, для моментов напряжений и индукций, а также перерезывающих сил найдем выражения

$$M_x = \int_{-h}^h z \sigma_x dz = \frac{2}{3} h^3 \tilde{\sigma}_x = - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - C_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p21} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ M_y = - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - C_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)$$

$$H_{xy} = - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p16} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p26} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right); \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} M_{dx} &= C_{g11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ &+ D_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ M_{dy} &= C_{g21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ &+ D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ M_{bx} &= C_{p11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ &+ D_{p11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + E_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ M_{by} &= C_{p21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ &+ D_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{p22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} N_x &= - \left[ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ &- C_{g11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g21} + C_{g16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \\ &- C_{p11} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p21} + C_{p16}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p26} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \left. \right], \\ N_y &= - \left[ D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ &- C_{g16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g12} + C_{g26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \\ &- C_{p16} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p12} + C_{p26}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p22} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \left. \right], \end{aligned} \quad (1.21)$$

где  $D_{ij} = b_{ij}D_0$  – упругие жесткости плиты;  $C_{gij} = c_{gij}D_0$ ,  $C_{pij} = c_{pij}D_0$ ,  $D_{gij} = d_{gij}D_0$ ,  $D_{pij} = d_{pij}D_0$ ,  $E_{pij} = e_{pij}D_0$  – электромагнитные жесткости плиты;  $D_0 = \frac{2}{3}h^3$  – постоянная, зависящая от толщины плиты.

Сравнивая соотношения (1.12), (1.19), (1.21) и (1.20), найдем выражения напряжений и индукций через моменты и перерезывающие силы:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3M_x}{2h^3}z, \quad \sigma_y = \frac{3M_y}{2h^3}z, \quad \tau_{xy} = \frac{3H_{xy}}{2h^3}z, \\ \tau_{xz} &= \frac{3N_x}{4h^3}(h^2 - z^2), \quad \tau_{yz} = \frac{3N_y}{4h^3}(h^2 - z^2), \\ D_x &= \frac{3M_{dx}}{2h^3}z, \quad D_y = \frac{3M_{dy}}{2h^3}z, \\ B_x &= \frac{3M_{bx}}{2h^3}z, \quad B_y = \frac{3M_{by}}{2h^3}z.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Для напряжений и индукций на произвольных площадках с нормалью  $n$  и касательной  $s$  имеют место формулы [21]

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 nx + \sigma_y \cos^2 ny + 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny, \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos nx \cos ny + \tau_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny), \\ \tau_{nz} &= \tau_{xz} \cos nx + \tau_{yz} \cos ny, \\ D_n &= D_x \cos nx + D_y \cos ny, \\ B_n &= B_x \cos nx + B_y \cos ny,\end{aligned}\quad (1.23)$$

на основании которых введем изгибающие силовые и индукционные моменты, крутящий силовой момент и перерезывающую силу на площадке с нормалью  $n$

$$\begin{aligned}M_n &= \int_{-h}^h z \sigma_n dz, \quad H_{ns} = \int_{-h}^h z \tau_{ns} dz, \quad N_n = \int_{-h}^h \tau_{nz} dz, \\ M_{dn} &= \int_{-h}^h z D_n dz, \quad M_{bn} = \int_{-h}^h z B_n dz,\end{aligned}\quad (1.24)$$

и для них на основании выражений (1.23), (1.24) найдем

$$\begin{aligned}M_n &= M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny, \\ H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos nx \cos ny + H_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny);\end{aligned}\quad (1.25)$$

$$N_n = N_x \cos nx + N_y \cos ny;\quad (1.26)$$

$$\begin{aligned}M_{dn} &= M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny, \\ M_{bn} &= M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Таким образом, если известны функции прогиба  $w$  и плотности потенциалов электрического поля  $\varphi_0$  и магнитного поля  $\psi_0$  по толщине плиты, то можно в любой точке плиты найти потенциалы (1.1), моменты напряжений (1.19), перерезывающие силы (1.21) и моменты индукций (1.20) на основных площадках, а по ним и моменты (1.25), (1.27) и перерезывающие силы (1.26) на любых площадках с нормалью  $n$ . По известным моментам и перерезывающим силам можно по формулам (1.22) найти напряжения и индукции в любой точке плиты.

**2. Краевые задачи для определения функций прогиба и плотностей потенциалов электрического и магнитного полей.** В процессе преобразований в предыдущем пункте были использованы первые два уравнения системы уравнений равновесия (1.6).

Оставшееся третье уравнение этой системы и уравнения (1.7) запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Используя зависимости (1.22), первое уравнение системы (2.1) запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{3}{4h^3} (z^2 - h^2) \Phi(x, y), \quad (2.2)$$

где  $\Phi(x, y) = \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y}$ . Проинтегрировав соотношения (2.2) по переменной  $z$ , получим

$$\sigma_z = \frac{3}{4h^3} \left[ \frac{z^3}{3} - h^2 z \right] \Phi(x, y) + A_1(x, y). \quad (2.3)$$

Из равенства (2.3) и условия на нижнем основании плиты ( $\sigma_z = 0$  при  $z = h$ ) найдем, что

$$A_1(x, y) = \frac{1}{2} \Phi(x, y).$$

Подставив это значение снова в (2.3), из условия на верхнем основании плиты ( $\sigma_z = -q(x, y)$  при  $z = -h$ ), найдем

$$q(x, y) = -\Phi(x, y) = -\left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right).$$

Подставляя во второе уравнение системы (2.1) значения  $D_x$ ,  $D_y$  с учетом формул (1.12) и (1.13) или все равно что (1.22), найдем равенство

$$z \left( \frac{\partial M_{dx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{dy}}{\partial y} \right) \frac{3}{2h^3} = 0,$$

которое должно выполняться при любых значениях координаты  $z$ . Следовательно

$\frac{\partial M_{dx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{dy}}{\partial y} = 0$ . Таким же образом преобразуем третье уравнение системы (2.1).

Окончательно систему уравнений (2.1) запишем так [18]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= -q(x, y), \\ \frac{\partial M_{dx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{dy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial M_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{by}}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Подставив в эти уравнения выражения (1.21) и (1.20), найдем

$$\begin{aligned} L_{4s}w + L_{3g}\varphi_0 + L_{3p}\psi_0 &= -q(x, y), \\ L_{3g}w + L_{2gg}\varphi_0 + L_{2pp}\psi_0 &= 0 \\ L_{3p}w + L_{2pp}\varphi_0 + E_{2pp}\psi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} L_{4s} &= -\left( D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\ L_{3g} &= C_{g11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{g21} + 2C_{g16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{g12} + 2C_{g26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{g22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{3p} &= C_{p11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{p21} + 2C_{p16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{p12} + 2C_{p26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{p22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2gg} &= D_{g11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{g12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{g22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{2pp} &= D_{p11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{p12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{p22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ E_{2pp} &= E_{p11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2E_{p12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + E_{p22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Систему дифференциальных уравнений (2.5) нужно решать при определенных краевых условиях на боковой поверхности плиты. Все возможные случаи этих условий описаны в работе [18].

**3. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит.** Решение системы уравнений (2.5) представим в виде суммы частного и общего решения этой системы. Частное решение системы зависит от вида правой части  $q(x, y)$ , легко выбирается для различных заданий этой функции и в общем случае не представляет интереса. Поэтому остановимся на нахождении общего решения системы (2.5).

Операторными преобразованиями, аналогичными решению системы 3-х линейных алгебраических уравнений, решение системы (2.5) приведем к решению следующих 3-х уравнений в частных производных 8-го порядка относительно функций  $w(x, y)$ ,  $\varphi_0(x, y)$  и  $\psi_0(x, y)$

$$\begin{vmatrix} L_{4s} & L_{3g} & L_{3p} \\ L_{3g} & L_{2gg} & L_{2pp} \\ L_{3p} & L_{2pp} & E_{2pp} \end{vmatrix} (w, \varphi_0, \psi_0) = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}), \\ l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\ l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_{2gg}(\mu) &= D_{g22}\mu^2 + 2D_{g12}\mu + D_{g11}, \\
 l_{2pp}(\mu) &= D_{p22}\mu^2 + 2D_{p12}\mu + D_{p11}, \\
 e_{2pp}(\mu) &= E_{p22}\mu^2 + 2E_{p12}\mu + E_{p11}.
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решения каждого из уравнений (3.1) будем искать в виде некоторых функций от линейной формы  $x + \mu y$ , т. е. в виде  $w(x, y) = W(x + \mu y)$ ,  $\varphi_0(x, y) = \Phi(x, y)$ ,  $\psi_0(x, y) = \Psi(x, y)$ . Подставляя эти функции в уравнения (3.1) и учитывая, что в силу произвольности этих функций возникающие при дифференцировании получившиеся их частные производные 8-го порядка не могут равняться нулю во всех толчках области, приходим к выводу, что равен нулю коэффициент при этой производной:

$$\begin{vmatrix} l_{4s} & l_{3g} & l_{3p} \\ l_{3g} & l_{2gg} & l_{2pp} \\ l_{3p} & l_{2pp} & e_{2pp} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

Как в классической плоской задаче теории упругости анизотропного тела [8, 9], можно показать, что корни этого уравнения с вещественными коэффициентами являются комплексно сопряженными. Кроме того, подставив функции в уравнения системы (2.5), можно установить связи между функциями вида  $w(x, y) = W(x + \mu y)$ ,  $\Phi(x, y) = \lambda_k W'(x + \mu y)$ ,  $\Psi(x, y) = \nu_k W'(x + \mu y)$ , где  $\lambda_k$ ,  $\nu_k$  – постоянные. Окончательно с учетом частного решения системы уравнений (2.5) для прогиба и плотностей потенциалов по толщине плиты получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= w_0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W_k(z_k); \\
 \varphi_0(x, y) &= \varphi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k W'_k(z_k), \\
 \psi_0(x, y) &= \psi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \nu_k W'_k(z_k),
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $w_0(x, y)$ ,  $\varphi_{00}(x, y)$  и  $\psi_{00}(x, y)$  – частное решение системы (2.5);  $W_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – аналитические функции обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y; \quad (3.5)$$

$$\lambda_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \nu_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}; \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{0k} &= \begin{vmatrix} l_{2gg}(\mu_k) & l_{2pp}(\mu_k) \\ l_{2pp}(\mu_k) & e_{2pp}(\mu_k) \end{vmatrix}, \\
 \Delta_{1k} &= \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2pp}(\mu_k) \\ -l_{2p}(\mu_k) & e_{2pp}(\mu_k) \end{vmatrix}, \\
 \Delta_{2k} &= \begin{vmatrix} l_{2gg}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2pp}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставив функции (3.4) в выражения основных характеристик (1.19) – (1.21), получим для них следующие выражения:

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, H_{xy}) &= (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k), \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)\lambda_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k)\nu_k, \\ q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)\lambda_k - (C_{p12} + C_{p22}\mu_k)\nu_k, \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k)\lambda_k - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k)\nu_k; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} (M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) &= (M_{0dx}, M_{0dy}, M_{0bx}, M_{0by}) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) W_k''(z_k), \\ d_{xk} &= C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - (D_{g11} + D_{g12}\mu_k)\lambda_k - (D_{p11} + D_{p12}\mu_k)\nu_k, \\ d_{yk} &= C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (D_{g12} + D_{g22}\mu_k)\lambda_k - (D_{p12} + D_{p22}\mu_k)\nu_k, \\ b_{xk} &= C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - (D_{p11} + D_{p12}\mu_k)\lambda_k - (E_{p11} + E_{p12}\mu_k)\nu_k, \\ b_{yk} &= C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (D_{p12} + D_{p22}\mu_k)\lambda_k - (E_{p12} + E_{p22}\mu_k)\nu_k; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} (N_x, N_y) &= (N_{0x}, N_{0y}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (l_k, -s_k) W_k'''(z_k), \\ s_k &= -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 + (C_{g16} + (C_{g12} + C_{g26})\mu_k + \\ &\quad + C_{g22}\mu_k^2)\lambda_k + (C_{p16} + (C_{p12} + C_{p26})\mu_k + C_{p22}\mu_k^2)\nu_k, \\ l_k &= D_{11} + 3D_{16}\mu_k + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3 + (C_{g11} + (C_{g21} + C_{g16})\mu_k + \\ &\quad + C_{g26}\mu_k^2)\lambda_k - (C_{p11} + (C_{p21} + C_{p16})\mu_k + C_{p26}\mu_k^2)\nu_k. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь величины со значком 0 в индексах относятся к частному решению и вычисляются по формулам (1.19) – (1.21), если в них вместо  $w(x, y)$ ,  $\varphi_0(x, y)$ ,  $\psi_0(x, y)$  брать  $w_0(x, y)$ ,  $\varphi_{00}(x, y)$ ,  $\psi_{00}(x, y)$ . При этом можно показать, что

$$l_k - \mu_k s_k = d_{xk} + \mu_k d_{yk} = b_{xk} + \mu_k b_{yk} = 0,$$

откуда следуют равенства

$$l_k = \mu_k s_k, \quad d_{xk} = -\mu_k d_{yk}, \quad b_{xk} = -\mu_k b_{yk}. \quad (3.11)$$

Имеют место и связи

$$s_k + r_k = -p_k / \mu_k \quad s_k - r_k = q_k \mu_k. \quad (3.12)$$

Кроме основных характеристик, дифференцируя первую функцию по  $x$  и  $y$ , также найдем выражения для компонент углов поворотов

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k) W_k'(z_k). \quad (3.13)$$

**Граничные условия для определения комплексных потенциалов.** Комплексные потенциалы  $W_k(z_k)$  на краю плиты должны удовлетворять определенным граничным условиям. Пусть плита занимает многосвязную область (рис. 2), ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ). В частном случае, если  $L_0$  отсутствует, то будем иметь бесконечную плиту с отверстиями. В последнем случае на бесконечности задаются значения моментов  $M_x^\infty$ ,  $M_y^\infty$ ,  $H_{xy}^\infty$ ,  $M_{dx}^\infty$ ,  $M_{dy}^\infty$ ,  $M_{bx}^\infty$ ,  $M_{by}^\infty$ .

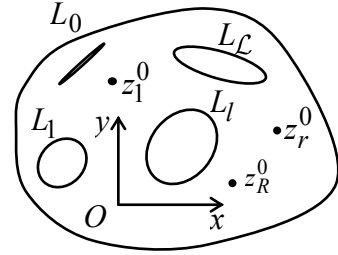


Рис. 2

На каждом из контуров  $L_l$  должны задаваться и механические и электромагнитные граничные условия. В качестве электромагнитных граничных условий на контуре  $L_l$  могут задаваться плотности по толщине потенциалов электромагнитного поля  $\Phi_0(x, y) = \Phi_{0l}(x, y)$ ,  $\Psi_0(x, y) = \Psi_{0l}(x, y)$  или моменты индукций  $M_{dl} = m_{dl}$ ,  $M_{bl} = m_{bl}$ .

При задании потенциалов на основе (3.4) граничные условия будут такими:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k W'_k(z_k) &= -\Phi_0^*(x, y) - \Phi_{00}(x, y), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \nu_k W'_k(z_k) &= -\Psi_{0l}(x, y) - \Psi_{00}(x, y). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Если же на контуре заданы моменты индукций, то на основе (3.10) граничные условия имеют вид [19]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{yk} W'_k(z_k) &= M_{0d} \pm \int_0^s m_{dl} ds + c_{l5}, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_{yk} W'_k(z_k) &= M_{0b} \pm \int_0^s m_{bl} ds + c_{l6}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} M_{0d} &= \int_0^s (M_{0dx} \cos nx + M_{0dy} \cos ny) ds, \\ M_{0b} &= \int_0^s (M_{0bx} \cos nx + M_{0by} \cos ny) ds. \end{aligned}$$

$c_{l5}$ ,  $c_{l6}$  – произвольные комплексные постоянные. В случае незагруженного края плиты нужно принять  $m_{dl}(s) = m_{bl}(s) = 0$ .

Что касается механических граничных условий, они зависят от способа нагружения и закрепления контуров. Приведем их для всех этих способов нагружения и закрепления.

Край плиты с контуром  $L_l$  нагружен механическими изгибающими моментами  $m_l(s)$ , поперечными усилиями  $p_l(s)$  и индукционными моментами  $m_{dl}(s)$ ,  $m_{bl}(s)$ . Граничные условия имеют вид [19]

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{p_k}{\mu_k} W'_k(z_k) &= I_{0xy1} \mp \int_0^s (m_l dy + f_l dx) - c_l x + c_{l1}, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 q_k W'_k(z_k) &= I_{0xy2} \mp \int_0^s (m_l dx - f_l dy) + c_l y + c_{l2},
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{0xy1} &= \int_0^s (M_{0x} \cos nx + (H_{0xy} - I_0) \cos ny) ds, \\
 I_{0xy2} &= \int_0^s ((H_{0xy} + I_0) \cos nx + M_{0y} \cos ny) ds, \\
 J_{01} &= \int_0^s ((N_{0xy} - H_{0xy}) dx + M_{0x} dy), \\
 J_{02} &= - \int_0^s (M_{0y} dx - (N_{0xy} + H_{0xy}) dy), \\
 f_l(s) &= \int_0^s p_l(s) ds;
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$c_l$  – вещественная,  $c_{il}$  – комплексные постоянные; верхние знаки относятся к внешнему контуру  $L_0$  области  $S$ , нижние – к контурам отверстий  $L_l$ ;  $s$  – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки. В случае незагруженного края плиты нужно принимать  $m_l(s) = p_l(s) = 0$ .

На краю плиты заданы прогиб  $w^*$  и его производная по нормали  $(dw/dn)^*$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \left( \frac{dw}{dn} \right)^* \cos nx + \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos^2 ny - \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos nx \cos ny, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \left( \frac{dw}{dn} \right)^* \cos ny - \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos nx \cos ny + \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos^2 nx.
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для случая жестко защемленного края плиты получаем

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k W'_k(z_k) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}.
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Если край плиты жестко подкреплен, то граничные условия будут такими:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W'_k(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{l3},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k W'_k(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{l4}. \quad (3.20)$$

Если контур плиты оперт и загружен распределенными моментами интенсивности  $m_l(s)$ ,  $m_{dl}(s)$  и  $m_{bl}(s)$ , то  $w = 0$ .

Заменив прогиб и моменты через комплексные потенциалы и их производные, получим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W_k(z_k) &= -w_0, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [p_k \cos^2 nx + q_k \cos^2 ny + 2r_k \cos nx \cos ny] W_k''(z_k) &= \\ &= M_{0x} \cos^2 nx + M_{0y} \cos^2 ny + 2H_{0xy} \cos nx \cos ny - m_l(s). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Для свободно опертого незагруженного края плиты в условиях (3.21) нужно принять  $m_l(s) = 0$ .

Если имеет место идеальный контакт плиты с упругим включением, то граничные условия для определения функций имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( g_{kli} W'_k(z_k) - g_{kli}^{(l)} W_k'^{(l)}(z_k) \right) = f_{li} \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (3.22)$$

в которых

$$\begin{aligned} g_{kl1} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{kl2} = q_k, \quad g_{kl3} = 1, \quad g_{kl4} = \mu_k, \\ g_{kl5} &= d_{yk}, \quad g_{kl6} = b_{yk}, \quad g_{kl7} = g_{kl8} = 1/D_0 \\ g_{kl1}^{(l)} &= \frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}}, \quad g_{kl2}^{(l)} = q_k^{(l)}, \quad g_{kl3}^{(l)} = 1, \quad g_{kl4}^{(l)} = \mu_k^{(l)}, \\ g_{kl5}^{(l)} &= d_{yk}^{(l)}, \quad g_{kl6}^{(l)} = b_{yk}^{(l)}, \quad g_{kl7}^{(l)} = g_{kl8}^{(l)} = \frac{1}{D_0^{(l)}}; \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} f_{l1} &= I_{0xy1} \mp \int_0^s (m_l dy + f_l dx) - c_l x + c_{l1}, \\ f_{l2} &= I_{0xy2} \mp \int_0^s (m_l dx - f_l dy) + c_l y + c_{l2}, \\ f_{l3} &= \frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ f_{l4} &= \frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ f_{l5} &= M_{0d} - M_{0d}^{(l)} \pm \int_0^s m_{dl} ds + c_{l5}, \end{aligned}$$

$$f_{16} = M_{0b} - M_{0b}^{(l)} \pm \int_0^s m_{bl} ds + c_{l6};$$

$$f_{l7} = c_{l7}, \quad f_{l8} = c_{l8}. \quad (3.24)$$

все величины со значком  $(l)$  сверху относятся к включению  $S^{(l)}$  и получаются по приведенным выше соответствующим формулам для плиты заменой величин без значка на величины со значком;  $\mu_k^{(l)}$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – корни характеристического уравнения (3.1) для включения  $S^{(l)}$ ;  $w_0^{(l)}(x, y)$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2.5) для этого включения;  $W_k^{(l)}(z_k)$  – комплексные потенциалы для включения.

*Общий вид комплексных потенциалов* в общем случае многосвязной плиты такой

$$W_k'(z_k) = g\Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W_{k0}'(z_k), \quad (3.25)$$

где  $g = 0$  в случае конечной плиты и  $g = 1$ , если плита бесконечна;  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g11} + C_{g21}\mu_k) - \nu_k (C_{p11} + C_{p21}\mu_k) \right) \Gamma_k = -M_x^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g12} + C_{g22}\mu_k) - \nu_k (C_{p12} + C_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k = -M_y^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - \lambda_k (C_{g16} + C_{g26}\mu_k) - \nu_k (C_{p16} + C_{p26}\mu_k) \right) \Gamma_k = -H_{xy}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( C_{g11} + C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{g11} + D_{g12}\mu_k) + \nu_k (D_{p11} + D_{p12}\mu_k) \right) \Gamma_k = -M_{dx}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( C_{g21} + C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{g12} + D_{g22}\mu_k) + \nu_k (D_{p12} + D_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k = -M_{dy}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( C_{p11} + C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{p11} + D_{p12}\mu_k) + \nu_k (E_{p11} + E_{p12}\mu_k) \right) \Gamma_k = -M_{bx}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( C_{p21} + C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 + \lambda_k (D_{p12} + D_{p22}\mu_k) + \nu_k (E_{p12} + E_{p22}\mu_k) \right) \Gamma_k = -M_{by}^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0; \quad (3.26)$$

$A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  – постоянные, определяемые из решения систем линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, v_k, v_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \\ = \left( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right); \quad (3.27)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( 1, \mu_k, \lambda_k, v_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y \right) i B_{kl} = \\ = \left( 0, 0, 0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi}, M_{Dl} + M_{0Dl}, M_{Bl} + M_{0Bl} \right); \quad (3.28)$$

$P_l$  и  $M_{xl}$ ,  $M_{yl}$ ,  $M_{Dl}$ ,  $M_{Bl}$  – главный вектор поперечных сил, действующих по контуру  $L_l$ , и суммарные механические моменты и моменты электрической и магнитной индукций относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ;  $P_{0l}$  и  $M_{0xl}$ ,  $M_{0yl}$ ,  $M_{0Dl}$ ,  $M_{0Bl}$  – главный вектор сил, действующих на верхнее основание плиты по контуру  $L_l$ , связанное с частным решением системы дифференциальных уравнений (2.5), и суммарные механические моменты и моменты электрической и магнитной индукций относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , связанные с тем же частным решением системы дифференциальных уравнений (2.5). Коэффициенты  $A_{kr}^0$ ,  $B_{kr}^0$  – известные постоянные, вычисляемые из систем, получаемых из (3.27) и (3.28), заменой  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$ ,  $P_l$ ,  $M_{xl}$ ,  $M_{yl}$ ,  $M_{Dl}$ ,  $M_{Bl}$  на  $A_{kr}^0$ ,  $B_{kr}^0$ ,  $P_r^0$ ,  $M_{xr}^0$ ,  $M_{yr}^0$ ,  $M_{Dr}^0$ ,  $M_{Br}^0$ . В случае действия только сосредоточенной силы  $P_r^0$  при отсутствии сосредоточенных моментов нужно принять  $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0$ ,  $M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$ ,  $M_{Dr}^0 = M_{Br}^0 = 0$ . Если сосредоточенная сила приложена в начале координат, то  $M_{xr}^0 = M_{yr}^0 = M_{Dr}^0 = M_{Br}^0 = 0$ . В этом случае система (3.28) будет однородной с отличным от нуля определителем и, следовательно,  $B_{kr}^0 = 0$ .

**4. Частные случаи общей задачи электромагнитоупругости.** Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). При этом для задачи ЭУ в приведенном решении нужно отбрасывать соотношения магнитостатики и принять равными нулю постоянные  $p_{ij}$ ,  $v_{ij}$ , тогда 6 и 7 уравнения состояния (1.9) составят однородную систему 2 линейных уравнений относительно коэффициентов магнитных восприимчивостей  $\chi_{ij}$ , с тривиальным решением  $\chi_{ij} = 0$ ; для задачи МУ в приведенном решении нужно отбрасывать соотношения электростатики и принять равными нулю постоянные  $g_{ij}$ ,  $v_{ij}$ , тогда 4 и 5 уравнения состояния (1.9) составят однородную систему 2 линейных уравнений относительно коэффициентов диэлектрических восприимчивостей  $\beta_{ij}$ , с тривиальным решением  $\beta_{ij} = 0$ ; для задачи теории упругости нужно принять и первые, и вторые условия, что приводит к тому что  $\chi_{ij} = \beta_{ij} = v_{ij} = 0$ .

В практике решения различных задачи (ЭМУ, ЭУ, МУ, ТУ) численные результаты для этих задач можно получить на основе реализации общего алгоритма решения задачи

ЭМУ для модельного материала с постоянными  $g'_{ij}$ ,  $\beta'_{ij}$ ,  $p'_{ij}$ ,  $\chi'_{ij}$ ,  $v'_{ij}$ , предусмотрев в этом решении совокупности параметров, характеризующие ту или другую задачу. Это можно сделать, связав постоянные модельного материала с соответствующими постоянными решаемой задачи таким образом [20]:

$$p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \quad g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad v'_{ij} = \lambda_{gp} v_{ij},$$

где  $\lambda_g$ ,  $\lambda_p$ ,  $\lambda_{gp}$  – пьезопараметры модельного материала. Тогда для задачи ЭУ, чтобы обеспечивать условия  $p_{ij} = v_{ij} = 0$ , для модельного материала нужно принять  $\lambda_p = \lambda_{gp} = 0$ . Но с такими значениями параметров при проведении вычислений возникнут трудности. Поэтому можно брать эти параметры достаточно малыми, но не нулями. Как показывают численные исследования, уже при  $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  значения характерных величин при решении задачи ЭМУ получаются такими же, как при решении задачи ЭУ. Такое же имеет место и для других случаев.

Следовательно, в приведенном общем решении

$$\text{для задач ЭМУ } \lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1,$$

$$\text{для задач ЭУ } \lambda_g = 1, \lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3},$$

$$\text{для задач МУ } \lambda_p = 1, \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3},$$

$$\text{для задач ТУ } \lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}.$$

Также заметим, по общей программе можно получать результаты по решению задачи электромагнитостатики для «абсолютно жесткой плиты», когда пьезосвойства преобладают. В этом случае нужно рассматривать модельный упругий материал с постоянными  $s'_{ij} = \lambda_s s_{ij}$  и для задачи электромагнитостатики брать  $\lambda_s \leq 10^{-3}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kirchhoff G. R. Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique // Comptes Rendus Mathématique (Paris). – 1848. – Vol. XXVII. – P. 394–397.
2. Kirchhoff G. R. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. Für die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – P. 51–88.
3. Gehring F. De Aequationibus Differentialibus, quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur. Ph.D. dissertation. – Berlin, 1860.
4. Boussinesque M. J. Compliments à une étude sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques // J. Math. pures et appl. – 1879. – Ser. 3, vol. 5. – P. 163–194 and 329–344.
5. Huber M. T. Teoria płyt prostokątne-różnokierunkowych. – Lwów: Drukarnia uniwersytetu Jagiellońskiego, 1921. – 249 p.
6. Huber M. T. Einige Anwendungen der Biegung Theorie orthotroper Platten // Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech. – 1926, b. 6, h. 3.
7. Huber M. T. Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten. – Warszawa, 1929.
8. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
9. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 181–209.
10. Космодамианский А. С., Иванов Г. М. Изгиб тонких многосвязных плит. – Донецк, 1973. – 256 с.
11. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – Вып. 3. – С. 97–127.
12. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.

13. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 83–100.
14. Калоеров С. А., Занько А.И., Кошкин А.А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – № 9(55). – С. 99–138.
15. Eringen A.C. Theory of electromagnetic elastic plates // Int. J. Eng. Sci. – 1989. – Vol. 27, № 4. – P. 363-375.
16. Librescu L.; Hasanyan D.; Ambur DR Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications // Int. J. Non-linear mech., 2004. – Vol. 39, № 5. – P. 723-739.
17. Galeş C., Baroiu N. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elasticity // ZAMM – J. Appl. Math. Mech. – 2014. – Vol. 94, № 1-2. – P. 55–71.
18. Калоеров С.А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
19. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 37–57.
20. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
21. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
22. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
23. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
24. Maxwell J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism / In 2 vol.: Vol. II. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – XXIV, 445 p.
25. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204-326.
26. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 388 с.
27. Калоеров С.А., Петренко А. В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.

*Поступила в редакцию 31.04.2022 г.*

## THE MAIN RELATIONS FOR THE APPLIED THEORY OF THIN ELECTROMAGNETOELASTIC PLATES BENDING

**S. A. Kaloerov**

Kirchhoff applied theory of thin plates bending is extended on the case of the plates made of piezoelectric materials. The known Kirchhoff hypotheses are complemented with the hypotheses for the electric and magnetic potentials of electromagnetic field. The mathematical identity is shown for the new relations and the relations obtained earlier with the similar hypotheses for the inductions taken into account. The main relations for the thin plates electromagnetoelastic bending complex potentials are systematized.

**Keywords:** applied theory of thin plates bending, piezoelectric materials, complex potentials, multiply connected plates.

**Калоеров Стефан Алексеевич**

доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: kaloerov@mail.ru

**Kaloerov Stefan Alekseevich**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics, Donetsk National University, Donetsk, DPR.

УДК 539.3

## ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ

© 2022. С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко

Приведено общее решение задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости с произвольными отверстиями и трещинами, использующее комплексные потенциалы, конформные отображения, представления голоморфных функций рядами Лорана и удовлетворение граничным условиям на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши, а на контурах отверстий – обобщенным методом наименьших квадратов. Задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Как частный случай из приведенного решения следует решение задачи для многосвязной изотропной полуплоскости. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с круговым отверстием при действии на прямолинейной границе равномерного давления. Изучено влияние на значения и распределение напряжений свойств материала полуплоскости и геометрических характеристик отверстия.

**Ключевые слова:** полуплоскость, отверстия и трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

Анизотропные пластинки с отверстиями широко используются в качестве элементов различных конструкций современной техники. Под действием различных внешних сил около отверстий могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании таких конструкций. Следовательно, нужно иметь достаточно надежные методы определения напряженного состояния многосвязных анизотропных пластин. И в этом направлении наиболее надежные результаты получаются при использовании комплексных потенциалов Лехницкого С. Г. [1]. Однако, если отверстия располагаются вблизи внешнего бесконечного прямолинейного, то при удовлетворении граничным условиям для определения этих функций обычными методами возникают определенные трудности. В работах [2, 3] предложено при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе использовать метод интегралов типа Коши, а граничные условия на контурах отверстий удовлетворять методом рядов. Но такие решения не обеспечивают необходимой точности удовлетворения граничным условиям на контурах отверстий в случаях близких расположений отверстий от прямолинейной границы и друг от друга. Для более точного удовлетворения граничным условиям на контурах отверстий в работе [4] был применен дискретный метод наименьших квадратов рядов, а в работах [5–7] – обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК).

В данной статье с использованием ОМНК дано общее решение задачи для полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами при произвольном нагружении их контуров непрерывными усилиями и сосредоточенными силами во внутренних точках. Проведены численные исследования для случая полуплоскости с отверстием под действием усилий на прямолинейной границе. Описаны закономерности распределения напряжений и их концентрации в зависимости от материала полуплоскости и геометрических характеристик отверстия.

**Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим находящуюся под действием различных внешних сил анизотропную пластинку, занимающую нижнюю полуплоскость  $S$ , ослабленную внутренними отверстиями с контурами произвольной конфигу-

рации. При решении задачи теории упругости для такой полуплоскости криволинейные контуры отверстий будем аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, которые будем рассматривать также эллипсами, одна из полуосей которых равна нулю. В связи с этим рассмотрим нижнюю полуплоскость, занимающую многосвязную область  $S$  (рис. 1), ограниченную прямолинейной границей  $L^+$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосями  $a_l, b_l$ . Отнесем

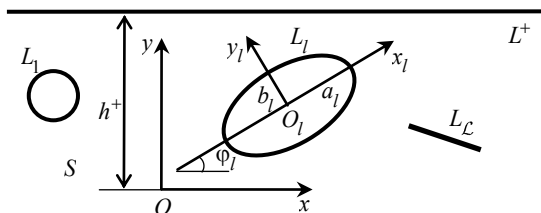


Рис.1

полуплоскость к прямоугольной системе координат  $Oxy$  с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии  $h^+$  от прямолинейной границы и направлением оси  $Ox$  вдоль направления прямолинейной границы (при  $h^+ = 0$  – вдоль прямолинейной границы) полуплоскости. Кроме того, выберем локальные системы координат  $O_l x_l y_l$  с началами в центрах эллипсов  $L_l$  и направлениями осей вдоль полуосей эллипсов. Тогда параметрические уравнения эллипсов в локальных системах имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат будут такими:

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \phi_l - y_l \sin \phi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \phi_l + y_l \cos \phi_l. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом  $\theta$  – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до  $2\pi$ ;  $x_{0l}, y_{0l}$  – координаты начала локальной системы координат  $O_l x_l y_l$  в основной системе координат  $Oxy$ ;  $\phi_l$  – угол между направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от  $Ox$  против часовой стрелки.

Будем считать, что на конечном отрезке  $[\alpha^+, \beta^+]$  прямолинейной границы  $L^+$  действуют распределенные внешние усилия, остальная ее часть свободна от усилий; контуры отверстий  $L_l$  загружены распределенными усилиями или жестко подкреплены. На бесконечности полуплоскость не загружена или находится под действием растягивающих усилий интенсивности  $p$ , и, следовательно, в силу незагруженности прямолинейной границы на бесконечности  $\sigma_x^\infty = p$ , а остальные напряжения и угол поворота равны нулю ( $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$ ). Кроме того, во внутренних точках полуплоскости  $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$  ( $r = \overline{1, R}$ ) действуют сосредоточенные силы  $P_r^0(X_r^0, Y_r^0)$ .

Если для определения напряженно-деформированного пластинки использовать комплексные потенциалы теории упругости анизотропного тела [1], то решение рассматриваемой задачи сводится к нахождению из граничных условий на контурах области функций  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = 1, 2$ ) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения 4-го порядка

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0; \quad (4)$$

$a_{ij}$  – коэффициенты деформации материала полуплоскости.

Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  в данном случае имеют вид [6]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k), \quad (5)$$

в котором

$$N_k(z_k) = \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0); \quad (6)$$

$\Gamma_k$ ,  $A_{kl}$ ,  $A_{kr}^0$  – постоянные, определяемые из решения следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \left( 0, 0, \sigma_x^\infty, \frac{a_{16}}{2a_{22}} \sigma_x^\infty \right); \quad (7)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left( \frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{Y_l}{2\pi} - \frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{X_l}{2\pi}, \frac{a_{26}}{a_{22}} \frac{Y_l}{2\pi} + \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{X_l}{2\pi} \right); \quad (8)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kr}^0 = \left( \frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{Y_r^0}{2\pi} - \frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{X_r^0}{2\pi}, \frac{a_{26}}{a_{22}} \frac{Y_r^0}{2\pi} + \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{X_r^0}{2\pi} \right); \quad (9)$$

$X_l, Y_l$  – компоненты главного вектора приложенных по контуру отверстия  $L_l$  внешних усилий;  $z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}$  и  $z_{kr}^0 = x_r^0 + \mu_r y_r^0$  – точки в областях  $S_k$ , соответствующие при аффинных преобразованиях точкам  $z_{0l}(x_{0l}, y_{0l})$  и  $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ;  $\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные в многосвязных нижних полуплоскостях  $S_k$ , получаемых из заданной полуплоскости  $S$  аффинными преобразованиями (3) и ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими контурам  $L_l$  при этих преобразованиях;  $\Phi_{kl}(z_k)$  – функции, голоморфные вне контуров отверстий  $L_{kl}$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ). Для построения этих функций используем методы конформных отображений.

Отобразим конформно внешность единичной окружности  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешность контура  $L_{kl}$  по формулам [8]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (10)$$

в которых

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда функции  $\Phi_{kl}(z_k)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), голоморфные вне отверстий с контурами  $L_{kl}$  и исчезающие на бесконечности, после конформных отображений (10), в областях переменных  $\zeta_{kl}$  будут голоморфными вне единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  и их можно разложить в ряды Лорана вида  $\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}$ , и для комплексных потенциалов (5) получаем выражения

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (12)$$

в которых  $a_{kln}$  – неизвестные коэффициенты, которые вместе с функциями  $\Phi_{k0}(z_k)$  будем определять из граничных условий на контурах полуплоскости. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которые не будут содержать аддитивных постоянных, входящих в правые части граничных условий. В такой форме граничные условия имеют вид [6, 9]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_i(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (13)$$

в котором  $\delta_{k,s} = \frac{dt_k}{ds}$  – производная переменной  $t_k$  по дуге контура;

$$(g_{1k}, g_{2k}) = (1, -\mu_k), \quad \left( \frac{df_1(t)}{ds}, \frac{f_2(t)}{ds} \right) = \mp (Y_n, X_n), \quad (14)$$

если на контуре заданы усилия, и

$$(g_{1k}, g_{2k}) = (p_k, q_k), \quad \left( \frac{df_1(t)}{ds}, \frac{f_2(t)}{ds} \right) = (0, 0), \quad (15)$$

если контур жестко подкреплён;

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12}, \quad q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k}; \quad (16)$$

$X_n, Y_n$  – компоненты приложенных к границе усилий, причем верхний знак перед ними берется при положительном обходе области, нижний – при отрицательном обходе.

На прямолинейной границе полуплоскости заданы усилия и граничные условия (13) можно записать в виде [6]

$$\Phi'_k(t_k) + \bar{r}_{1k} \overline{\Phi'_k(t_k)} + \bar{r}_{2k+1} \overline{\Phi'_{k+1}(t_{k+1})} = f_k'^+(t), \quad (17)$$

где

$$\bar{r}_{1k} = \frac{\bar{\mu}_k - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}, \quad \bar{r}_{2k+1} = \frac{\bar{\mu}_{k+1} - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}; \quad (18)$$

$$f_k'^+(t) = \begin{cases} -\frac{X_n^+ + \mu_{k+1} Y_n^+}{\mu_k - \mu_{k+1}} & \text{на отрезке } [\alpha^+, \beta^+], \\ 0 & \text{вне отрезка } [\alpha^+, \beta^+]; \end{cases}$$

$k$  – индекс, принимающий значения 1, 2, причем значение индекса  $k+1$  при  $k=2$

формально полагается равным 1;  $X_n^+, Y_n^+$  – проекции на оси основной системы координат действующих на отрезке  $[\alpha^+, \beta^+]$  прямолинейной границы внешних усилий. При этом учтены равенства  $\bar{r}_{1k}\bar{\Gamma}_k + \bar{r}_{2k+1}\bar{\Gamma}_{k+1} = -\Gamma_k$ , легко доказываемые с учетом выражений (18) и группированием слагаемых в соответствии с уравнениями (7).

Подставим в граничные условия (17) функции (12) и учтем, что на прямолинейной границе

$$\begin{aligned} z = t = x + ih^+, \quad z_k = t_k = x + i\mu_k h^+, \quad z_{k+1} = t_{k+1} = x + i\mu_{k+1} h^+, \\ \bar{z}_k = x - i\bar{\mu}_k h^+ = x + i\mu_k h^+ - i\mu_k h^+ - i\bar{\mu}_k h^+ = t_k - i(\mu_k + \bar{\mu}_k) h^+, \\ \bar{z}_{k+1} = x - i\bar{\mu}_{k+1} h^+ = x + i\mu_k h^+ - i\mu_k h^+ - i\bar{\mu}_{k+1} h^+ = t_k - i(\mu_k + \bar{\mu}_{k+1}) h^+ \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения и переходя в конформных отображениях (10) к сопряженным величинам, будем иметь

$$\bar{z}_{k+j} = t_k + (\bar{\mu}_{k+j} - \mu_k) h^+ = \bar{z}_{k+jl} + \bar{R}_{k+jl} \left( \zeta_{k+jl}^+ + \frac{\bar{m}_{k+jl}}{\zeta_{k+jl}^+} \right) \quad (j = 0, 1). \quad (19)$$

Заменив в последних равенствах  $t_k$  на  $z_k$ , получим

$$z_k = -(\bar{\mu}_{k+j} - \mu_k) h^+ + \bar{z}_{k+jl} + \bar{R}_{k+jl} \left( \zeta_{k+jl}^+ + \frac{\bar{m}_{k+jl}}{\zeta_{k+jl}^+} \right) \quad (j = 0, 1), \quad (20)$$

где переменная  $\bar{\zeta}$  для лучшего восприятия заменена на  $\zeta^+$ . Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение, найдем из него функцию

$$\Phi_{k+jl}^+(z_k) = \frac{1}{\zeta_{k+jl}^+}.$$

Подставляя функции (12) в граничные условия (17), учитывая равенства (19), (20) и применяя к полученным равенствам метод интегралов типа Коши по прямолинейной границе, найдем функции  $\Phi'_{k0}(z_k)$ . Подставив эти функции в (12), найдем общие выражения комплексных потенциалов

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + N'_k(z_k) + F_k'^+(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \\ - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}'^+(z_k) \bar{a}_{kln} - \bar{r}_{2k+1} \Phi_{k+1ln}'^+(z_k) \bar{a}_{k+1ln}], \end{aligned} \quad (21)$$

точно удовлетворяющие граничным условиям на прямолинейной границе  $L^+$ . При этом

$$\begin{aligned} F_k'^+(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f_k'(t) dt}{t - z_k} - \bar{r}_{1k} N_k'^+(z_k) - \bar{r}_{2k+1} N_{k+1}'^+(z_k), \\ N'_k(z_k) = \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \frac{A_{kl}}{z_k - z_{kl}} + \sum_{r=1}^R \frac{A_{kr}^0}{z_k - z_{kr}^0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{k+j}^{\prime+}(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{\overline{A_{k+jl}}}{z_k + (\overline{\mu_{k+j}} - \mu_k) h^+ - \overline{z_{kl}}} + \sum_{r=1}^R \frac{\overline{A_{k+jr}^0}}{z_k + (\overline{\mu_{k+j}} - \mu_k) h^+ - \overline{z_{kr}^0}} \quad (j=0, 1), \\
\Phi_{kln}'(z_k) &= -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\
\Phi_{k+jln}^{\prime+}(z_k) &= -\frac{n}{\overline{R_{kl}} (\zeta_{k+jl}^+)^{n-1} \left( (\zeta_{k+jl}^+)^2 - \overline{m_{kl}} \right)} \quad (j=0, 1). \quad (22)
\end{aligned}$$

Неизвестными в функциях (21) остаются коэффициенты  $a_{kln}$  разложений в ряды Лорана. Для нахождения этих коэффициентов удовлетворим оставшимся граничным условиям на контурах отверстий. Для удовлетворения этим условиям на контурах отверстий  $L_p$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) будем использовать обобщенный метод наименьших квадратов [5, 10, 11]. Для этого выберем на каждом из контуров  $L_p$  области  $S$  систему точек  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_p}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (21). Тогда для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[ \Phi_{kln}'(t_{kpm}) a_{kln} - \overline{r_{lk}} \Phi_{kln}^{\prime+}(t_{kpm}) \overline{a_{kln}} - \overline{r_{2k+1}} \Phi_{k+1ln}^{\prime+}(t_{kpm}) \overline{a_{k+1ln}} \right] = \\
= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_{k,s} \left[ \Gamma_k + N_k'(t_{kpm}) + F_k^{\prime+}(t_{kpm}) \right] \quad (i=1, 2; p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}). \quad (23)
\end{aligned}$$

Систему (23) будем решать с использованием сингулярных разложений [12]. После нахождения псевдорешения системы (23) постоянные  $a_{kln}$ , а, следовательно, и комплексные потенциалы (21), будут известными и по ним можно найти в любой точке полуплоскости основные напряжения [1, 6]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k), \quad (24)$$

а также нормальные и касательные напряжения [1, 13]

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\
\sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\
\tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) \cos(ny) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)) \quad (25)
\end{aligned}$$

на произвольных площадках с нормалью  $n$  и касательной  $s$ . При этом, если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то в его концах производные комплексных потенциалов (21), а следовательно, и напряжения будут иметь сингулярность и можно определить и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), используя известные формулы [14]

$$k_1^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[ \mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right] M_{kl},$$

$$k_2^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[ (1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_{kl}, \quad (26)$$

где

$$M_{kl} = -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}. \quad (27)$$

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат  $O_l x_l y_l$ , нижний – к его левому концу.

Как частные случаи из приведенного решения следуют решения задач теории упругости для изотропной полуплоскости. В последнем случае один из коэффициентов деформации  $a_{ij}$  нужно брать несколько отличным от реального, например,  $a_{11}$  и  $a_{22}$  брать отличающимися друг от друга 5–6-й значащей цифрой в конце. В этом случае корни характеристического уравнения (4) будут близки к мнимой единице  $i$ , но несколько отличаться друг от друга (слабая анизотропия) и общая программа позволит получать значения напряжений и деформаций, практически совпадающие с данными, получаемыми при решении задачи теории упругости изотропного тела с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [13].

**Решение некоторых частных задач.** Приведенный подход был использован для решения различных частных задач. Исследования проводились для полуплоскости из изотропного материала алюминий (материал М1) [15], сильно анизотропного материала («степень анизотропии» материала характеризуется степенью отличия отношения  $a_{11}/a_{22}$  от 1) углепластик HMS/DX209 [16] с жесткими волокнами вдоль оси  $Ox$  (материал М2) или вдоль оси  $Oy$  (материал М22). Технические постоянные этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1  
Технические постоянные некоторых материалов

| Материал | $E_1$ , МПа | $E_2$ , МПа | $G_{12}$ , МПа | $\nu_{21}$ |
|----------|-------------|-------------|----------------|------------|
| М1       | 71000       | 71000,5     | 28400          | 0,2500     |
| М2       | 188800      | 6000        | 2700           | 0,3000     |
| М22      | 6000        | 188800      | 2700           | 0,0095     |

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (21) для каждого отверстия  $L_p$  и «коллокационных точек»  $M_p$  на этом контуре, для которых составлялись уравнения (23), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений и индукций на площадках, касательных к контурам, не были менее  $10^{-3}$ ). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 150 членов, и на каждом из контуров брать от 50 до 500 «коллокационных точек». Рассмотрим частные задачи.

Пусть в полуплоскости имеется одно эллиптическое отверстие, на бесконечности и по контуру отверстия полуплоскость не нагружена; на отрезке  $[\alpha^+, \beta^+]$  прямолиней-

ной границы  $L^+$  действует равномерное давление интенсивности  $q$ , т. е. на этом отрезке  $X_n = 0$ ,  $Y_n = -q$ . Тогда в приведенном решении  $\Gamma_k = N_k(z_k) = 0$ , и функции (21) примут вид

$$\Phi'_k(z_k) = F_k'^+(z_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \phi'_{k1n}(z_k) a_{k1n} - \bar{r}_{1k} \phi_{k1n}'^+(z_k) \bar{a}_{k1n} - \bar{r}_{2k+1} \phi_{k+1,1n}'^+(z_k) \bar{a}_{k+1,1n} \right], \quad (28)$$

в котором

$$F_k'^+(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_{k+1} q}{\mu_k - \mu_{k+1}} \int_{\alpha^+}^{\beta^+} \frac{dt}{t - z_k} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_{k+1} q}{\mu_k - \mu_{k+1}} \ln \frac{z_k - \beta^+}{z_k - \alpha^+},$$

$$\phi'_{k1n}(z_k) = -\frac{n}{R_{k1} \zeta_{k1}^{n-1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})},$$

$$\phi_{k+j1n}'^+(z_k) = -\frac{n}{\bar{R}_{k1} (\zeta_{k+j1}^+)^{n-1} \left( (\zeta_{k+j1}^+)^2 - \bar{m}_{k1} \right)} \quad (j=0, 1); \quad (29)$$

$a_{k1n}$  – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий (23), которые в данном случае примут вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik1} \delta_{k,s} \left[ \phi'_{k1n}(t_{k1n}) a_{k1n} - \bar{r}_{1k} \phi_{k1n}'^+(t_{k1m}) \bar{a}_{k1n} - \bar{r}_{2k+1} \phi_{k+1,1n}'^+(t_{k1m}) \bar{a}_{k+1,1n} \right] =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_{k,s} F_k'^+(t_{k1m}) \quad (i=1, 2; m=\overline{1, M_1}). \quad (30)$$

Для полуплоскости с одним круговым отверстием радиуса  $a_1$  ( $b_1 = a_1$ ) (рис. 2), находящейся по отрезку  $[-a_1, a_1]$  под действием равномерного давления интенсивности  $p$ , в табл. 2 в зависимости от  $c_1^+ / a_1$ , где  $c_1^+$  – длина перемычки, и центрального угла отверстия  $\theta$ , отсчитываемого от направления оси  $Ox$  (направления прямолинейной границы) против часовой стрелки, с точностью до множителя  $q$  приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к нему, а на рис. 3 изображены графики распределения этих напряжений при  $c_1^+ / a_1 = 1$  (сплошные линии),  $c_1^+ / a_1 = 0,5$  (штриховые линии),  $c_1^+ / a_1 = 0,1$  (пунктирные линии). В табл. 3 в зависимости от  $c_1^+ / a_1$  с точностью до множителя  $p$  приведены значения напряжений  $\sigma_x$  в некоторых характерных точках, в качестве которых рассматривались точка посередине перемычки  $D(c_1^+ / 2; 0)$  и точки на прямолинейной границе  $O(0; 0)$ ,  $K(0,5a_1; 0)$ ,  $M(1,5a_1; 0)$ .

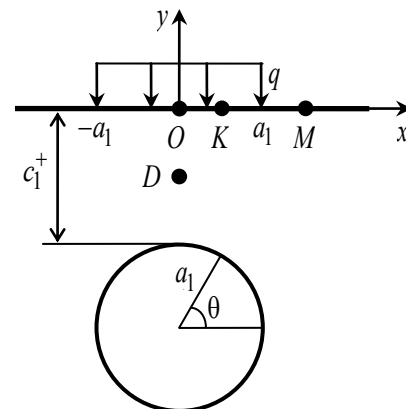


Рис. 2

Таблица 2  
Значения нормальных напряжений  $\sigma_s / q$  вблизи контура отверстия в зависимости от отношения  $c_1^+ / a_1$  и центрального угла отверстия  $\theta$

| $\theta$ ,<br>рад. | Значение $c_1^+ / a_1$ |        |         |         |         |         |         |         |
|--------------------|------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                    | 10                     | 5      | 2       | 1       | 0,5     | 0,3     | 0,2     | 0,1     |
| Материал М1        |                        |        |         |         |         |         |         |         |
| $-\pi/2$           | 0,097                  | 0,153  | 0,234   | 0,290   | 0,346   | 0,389   | 0,422   | 0,477   |
| $-\pi/3$           | 0,006                  | 0,015  | 0,033   | 0,051   | 0,080   | 0,110   | 0,138   | 0,189   |
| $-\pi/6$           | -0,197                 | -0,318 | -0,504  | -0,635  | -0,724  | -0,754  | -0,758  | -0,738  |
| 0                  | -0,343                 | -0,612 | -1,138  | -1,619  | -2,087  | -2,361  | -2,518  | -2,670  |
| $\pi/12$           | -0,338                 | -0,642 | -1,335  | -2,077  | -2,931  | -3,520  | -3,906  | -4,356  |
| $\pi/6$            | -0,269                 | -0,550 | -1,314  | -2,290  | -3,645  | -4,769  | -5,617  | -6,773  |
| $\pi/4$            | -0,150                 | -0,336 | -0,968  | -1,945  | -3,598  | -5,318  | -6,887  | -9,530  |
| $\pi/3$            | -0,013                 | -0,054 | -0,307  | -0,846  | -2,062  | -3,900  | -6,183  | -11,676 |
| $5\pi/12$          | 0,097                  | 0,192  | 0,404   | 0,524   | 0,343   | -0,364  | -1,702  | -7,298  |
| $\pi/2$            | 0,138                  | 0,290  | 0,720   | 1,148   | 1,604   | 2,134   | 2,731   | 4,204   |
| Материал М2        |                        |        |         |         |         |         |         |         |
| $-\pi/2$           | 0,441                  | 0,711  | 1,116   | 1,417   | 1,740   | 2,002   | 2,216   | 2,548   |
| $-\pi/3$           | -0,078                 | -0,121 | -0,180  | -0,214  | -0,233  | -0,236  | -0,233  | -0,222  |
| $-\pi/6$           | -0,159                 | -0,260 | -0,418  | -0,528  | -0,613  | -0,656  | -0,678  | -0,697  |
| 0                  | -0,237                 | -0,420 | -0,760  | -1,046  | -1,312  | -1,472  | -1,570  | -1,680  |
| $\pi/12$           | -0,232                 | -0,432 | -0,852  | -1,252  | -1,672  | -1,953  | -2,141  | -2,370  |
| $\pi/6$            | -0,201                 | -0,395 | -0,862  | -1,378  | -2,000  | -2,476  | -2,826  | -3,302  |
| $\pi/4$            | -0,164                 | -0,340 | -0,831  | -1,457  | -2,322  | -3,087  | -3,724  | -4,727  |
| $\pi/3$            | -0,122                 | -0,267 | -0,736  | -1,406  | -2,443  | -3,559  | -4,699  | -7,032  |
| $5\pi/12$          | -0,015                 | -0,051 | -0,245  | -0,609  | -1,367  | -2,551  | -4,179  | -9,127  |
| $\pi/2$            | 0,610                  | 1,264  | 3,108   | 5,239   | 7,753   | 9,913   | 11,639  | 13,461  |
| Материал М22       |                        |        |         |         |         |         |         |         |
| $-\pi/2$           | 0,056                  | 0,077  | 0,112   | 0,153   | 0,217   | 0,278   | 0,333   | 0,427   |
| $-\pi/3$           | 0,026                  | 0,039  | 0,066   | 0,102   | 0,161   | 0,220   | 0,272   | 0,364   |
| $-\pi/6$           | -0,106                 | -0,138 | -0,165  | -0,157  | -0,103  | -0,027  | 0,049   | 0,193   |
| 0                  | -4,164                 | -6,445 | -10,633 | -14,651 | -18,664 | -20,879 | -21,926 | -22,352 |
| $\pi/12$           | -0,873                 | -1,488 | -2,896  | -4,654  | -6,947  | -8,644  | -9,766  | -11,007 |
| $\pi/6$            | -0,267                 | -0,509 | -1,190  | -2,275  | -4,077  | -5,729  | -7,020  | -8,768  |
| $\pi/4$            | -0,095                 | -0,208 | -0,597  | -1,391  | -3,092  | -5,079  | -6,971  | -10,173 |
| $\pi/3$            | 0,007                  | -0,009 | -0,123  | -0,489  | -1,646  | -3,570  | -6,025  | -11,990 |
| $5\pi/12$          | 0,085                  | 0,151  | 0,321   | 0,548   | 0,712   | 0,366   | -0,728  | -6,277  |
| $\pi/2$            | 0,118                  | 0,221  | 0,528   | 1,077   | 2,145   | 3,386   | 4,697   | 7,704   |

Из данных табл. 2, табл. 3 и рис. 3 следует, что от действия усилий на прямолинейной границе полуплоскости с отверстием возникают высокие уровни напряжений около контура отверстия и в первую очередь в зоне между отверстием и прямолинейной границей. При этом эти напряжения особенно велики в случае сильно анизотропного материала полуплоскости. При этом в точках перемены напряжения всегда отрицательны (сжимающие), кроме небольшой окрестности точек контура отверстия, где они положительны (узкая полоса растяжения вблизи контура отверстия). В случае полуплоскости из сильно анизотропного материала М22 с мягкими волокнами вдоль направления границы полуплоскости весьма большие сжимающие напряжения наблюдаются и вблизи горизонтального диаметра отверстия (при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ), В противоположной от перемены зоне значения напряжений значительно ниже, меньше и влияние анизотропии материала полуплоскости.

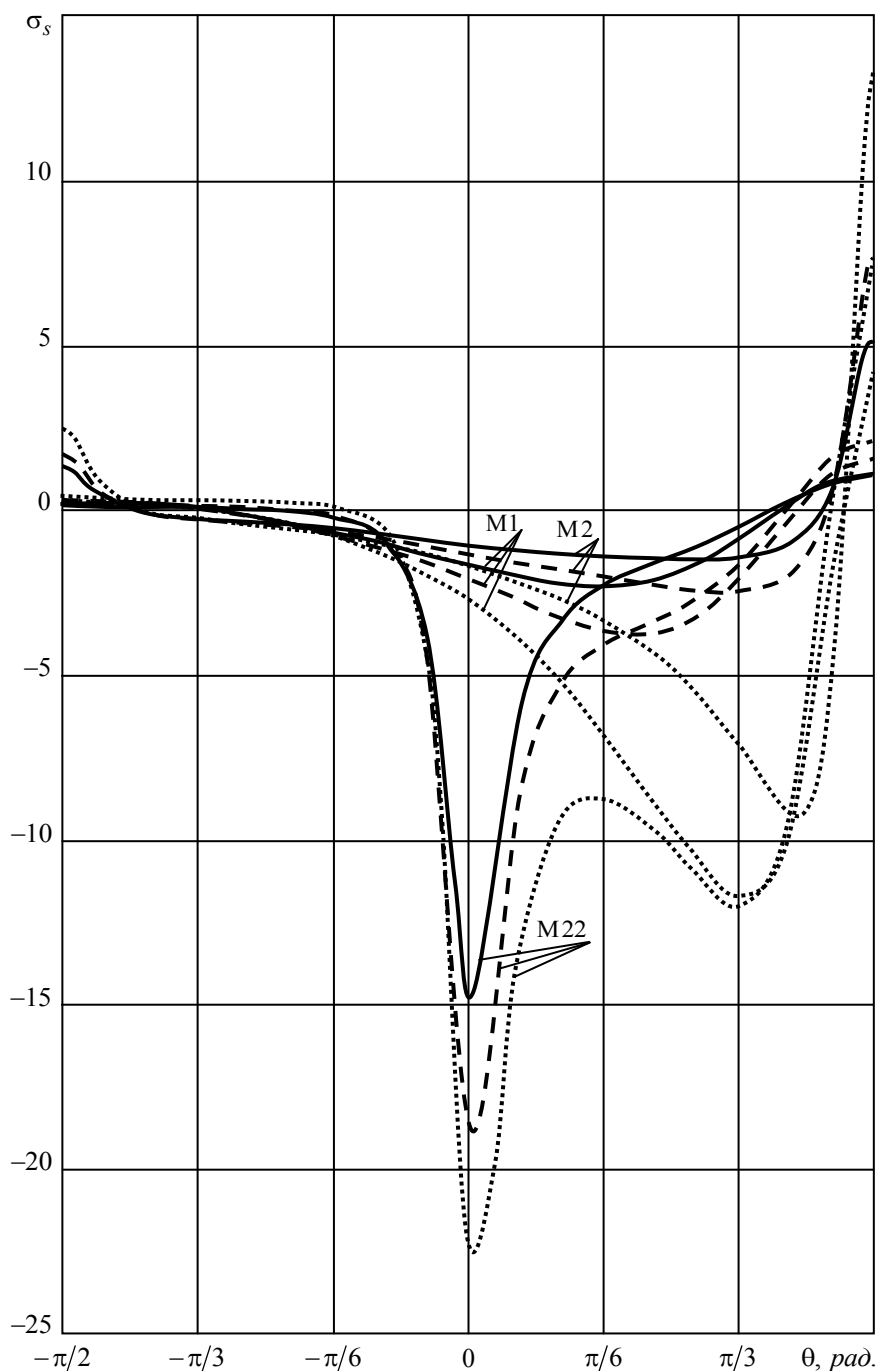


Рис. 3. Графики распределения напряжений  $\sigma_s$  вблизи контура отверстия в полуплоскости из различных материалов для случаев, когда  $c_1^+/a_1$  равно 1 (сплошные линии), 0,5 (штриховые линии) и 0,1 (пунктирные линии)

Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела, удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши и удовлетворением граничным условиям на контурах отверстий обобщенным методом наименьших квадратов решение задачи теории упругости для многосвязной анизотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами при действии произвольных внешних сил приведена к переопределенной системе линейных

Таблица 3

Значения напряжений  $\sigma_x / q$  в некоторых характерных точкахполуплоскости с круговым отверстием в зависимости от отношения  $c_1^+ / a_1$ 

| Точки        | Значение $c_1^+ / a_1$ |        |        |        |         |         |         |         |
|--------------|------------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
|              | 10                     | 5      | 2      | 1      | 0,5     | 0,3     | 0,2     | 0,1     |
| Материал М1  |                        |        |        |        |         |         |         |         |
| <i>D</i>     | –0,005                 | –0,034 | –0,255 | –0,689 | –1,440  | –2,463  | –3,801  | –8,023  |
| <i>O</i>     | –1,006                 | –1,036 | –1,305 | –2,123 | –4,085  | –6,737  | –10,056 | –20,034 |
| <i>K</i>     | –1,006                 | –1,034 | –1,245 | –1,644 | –1,917  | –1,547  | –0,581  | 2,699   |
| <i>M</i>     | –0,005                 | –0,022 | 0,008  | 0,350  | 0,874   | 1,163   | 1,295   | 1,361   |
| Материал М2  |                        |        |        |        |         |         |         |         |
| <i>D</i>     | –0,004                 | –0,024 | –0,187 | –0,614 | –1,662  | –3,297  | –5,538  | –12,734 |
| <i>O</i>     | –5,627                 | –5,719 | –6,490 | –8,657 | –13,489 | –19,435 | –26,131 | –43,537 |
| <i>K</i>     | –5,627                 | –5,714 | –6,346 | –7,677 | –9,497  | –10,385 | –10,121 | –6,228  |
| <i>M</i>     | –0,016                 | –0,072 | –0,138 | 0,360  | 1,721   | 3,166   | 4,395   | 6,076   |
| Материал М22 |                        |        |        |        |         |         |         |         |
| <i>D</i>     | –0,009                 | –0,025 | –0,086 | –0,240 | –0,671  | –1,383  | –2,407  | –5,946  |
| <i>O</i>     | –0,223                 | –0,339 | –0,758 | –1,543 | –3,324  | –5,890  | –9,202  | –19,278 |
| <i>K</i>     | –0,214                 | –0,291 | –0,528 | –0,792 | –0,808  | –0,140  | 1,145   | 5,001   |
| <i>M</i>     | 0,000                  | 0,039  | 0,196  | 0,409  | 0,619   | 0,678   | 0,652   | 0,503   |

алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Для полуплоскости с круговым отверстием при действии равномерного давления на отрезке прямолинейной границы проведены численные исследования с анализом влияния геометрических характеристик отверстия и свойств материала полуплоскости на значения и распределение напряжений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – К., Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Калоеров С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
4. Калоеров С.А. Решение основных задач теории упругости для многосвязной анизотропной полуплоскости / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина // Теорет. и прикладная механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 44–63.
5. Калоеров С.А., Паршикова О.А. Термовязкоупругое многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
6. Калоеров С.А. Общие решения задач для многосвязных анизотропных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2018. – № 2. – С. 22–35.
7. Калоеров С.А. Исследование напряженного состояния многосвязной анизотропной полуплоскости обобщенным методом наименьших квадратов / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, О.Э. Ермаков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2021. – № 1(74). – С. 16–30.
8. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
9. Калоеров С.А. Концентрация напряжений в многосвязной анизотропной пластинке / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко, Е.С. Глушанков // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2021. – № 4. – С. 14–28.
10. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Моултер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
12. Drmač Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmač, K. Veselič // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1322–1342.

13. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
14. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56-62.
15. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
16. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

*Поступила в редакцию 04.04.2022 г.*

## STRESS CONCENTRATION IN A MULTIPLY CONNECTED ANISOTROPIC PLATE

**S.A. Kaloerov, E.S. Glushankov, A.B. Mironenko**

A solution is given for the elasticity theory problem for an anisotropic half-plane with arbitrary holes and cracks with using the complex potentials, the conformal mappings, the representations of holomorphic functions with Laurent series and Faber polynomials series, the satisfaction of the boundary conditions on the rectilinear bound with Cauchy-type integral method and on the holes' contours with generalized least squares method. The problem is reduced to overdetermined system of linear algebraic equations solved with singular value decomposition method. As a special case, the given solution is ensued with the solution for the multiply connected isotropic half-plane. The results of numerical studies are described for the half-plane with circular hole under the action of uniform pressure on the rectilinear bound. The influence of the half-plane's material's properties and the geometric characteristics on the hole on the values and distribution of the stresses is investigated.

**Keywords:** half-plane, holes and cracks; complex potentials; generalized least squares method.

### **Калоеров Стефан Алексеевич**

доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики имени академика  
А.С. Космодамианского ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: kaloerov@mail.ru

### **Kaloerov Stefan Alekseevich**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,  
Donetsk National University, Donetsk, DPR.

### **Глушанков Евгений Сергеевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры теории упругости  
и вычислительной математики имени академика  
А.С. Космодамианского ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: evgenij.glushankov@gmail.com

### **Glushankov Eugene Sergeevich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,  
Donetsk National University, Donetsk, DPR.

### **Мироненко Андрей Борисович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры теории упругости  
и вычислительной математики имени академика  
А.С. Космодамианского ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: a.mironenko@donnu.ru

### **Mironenko Andrey Borisovich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,  
Donetsk National University, Donetsk, DPR.

## Ф И З И К А

УДК 539:519.517.3

**ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ СТРУКТУРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ СО СДВИНУТЫМИ ЦЕНТРАМИ ПРИ НАЛИЧИИ МОДУЛЯЦИИ ФРАКТАЛЬНЫХ ИНДЕКСОВ**© 2022. *О.П. Абрамова*

Методом численного моделирования исследовано влияние переменной амплитуды и модуляции фрактальных индексов на состояния комплексного поля деформации связанных фрактальных структур, состоящих из двух круговых цилиндров со сдвинутыми центрами. Для структуры из одного кругового цилиндра исследованы особенности кубитных состояний поведения поля деформации. При пересечении отдельных цилиндров возникают внутренние и внешние области связанной структуры. Границам отдельных цилиндров в сечениях соответствуют пересекающиеся стохастические кольца. Показано, что при отсутствии модуляции во внутренних областях наблюдается поведение типа стохастической пыли (совокупности отдельных цилиндрических трубок малых радиусов в объемной структуре). Локализация, амплитуда, радиусы отдельных трубок являются случайными величинами. Во внутренней области перекрытия круговых цилиндров наблюдается поведение типа выпукло-вогнутой мембраны. Во внешней области связанной структуры (за границами) наблюдается стохастическое поведение, переходящее далее в деформированное волновое поведение. При наличии модуляции для внутренних областей связанной структуры характерно появление горизонтальных, вертикальных полос, решеток со стохастическими ячейками. Во внешних областях наблюдаются особенности поведения поля деформации типа иголок, стохастической пыли и деформированного волнового поведения с разрывами.

**Ключевые слова:** связанные фрактальные структуры, комплексное поле деформации, кубитные состояния, переменная амплитуда, модуляция фрактальных индексов, решетки со стохастическими ячейками, стохастическая пыль, деформированное волновое поведение.

**Введение.** При создании квантовых компьютеров возникают задачи о передаче, обработке, хранении информационных данных. В качестве элементной базы выступают различные наноструктуры и метаматериалы [1–3]. Запись информации часто выполняют на основе кубитов [4].

В работах [5, 6] описание комплексного поля деформации модельных фрактальных связанных структур было выполнено на основе различных кубитных состояний отдельных структур типа кругового и эллиптического цилиндров. Отличительной особенностью поведения поля деформации таких связанных структур является наличие кубитных состояний, для которых отсутствует затухание [7, 8]. Было показано, что такие состояния могут быть ячейками памяти. В работах [5–8] при описании поля деформации отдельной структуры моделирование функции смещения осуществлялось с постоянной амплитудой.

Однако, использование наноструктур и метаматериалов с объемной структурой приводит к появлению переменных амплитуд комплексной функции смещения в отдельных плоскостях. В результате итерационного процесса элементы матриц становятся комплексными случайными величинами (появляется квантовый хаос [9]). При этом мнимая часть комплексной функции смещения позволяет извлекать информацию об эффективном затухании. Возникает необходимость учета упорядочения отдельных операторов полей деформаций [5–8] при описании различных кубитных состояний.

Для осуществления внешнего управления полем деформации отдельной структуры используют различные модуляционные методы [1]. При этом возникает задача о влиянии таких модуляционных методов на кубитные состояния отдельной фрактальной структуры.

При исследовании связанных структур, состоящих из нескольких отдельных фрактальных структур, возникают области пересечения, перекрытия. Наличие переменной амплитуды и модуляции фрактальных индексов приводит к характерным особенностям поведения комплексного поля деформации таких связанных структур во внутренних и внешних областях, что требует дополнительного исследования.

Целью данной работы является исследование влияния переменной амплитуды и модуляции фрактальных индексов на кубитные состояния поля деформации отдельной фрактальной структуры и связанных фрактальных структур, состоящих из двух круговых цилиндров со сдвинутыми центрами.

**Кубитные состояния поля деформации отдельной фрактальной структуры.** В работах [5–8, 10, 11] при моделировании безразмерной комплексной функции смещения  $u$  фрактальных структур использовалась функция

$$u = k_u^2(1 - 2 \operatorname{sn}^2(u - u_0, k'_u)) \quad (1)$$

с постоянной амплитудой 2 перед функцией эллиптического синуса.

В данной работе будем рассматривать фрактальные структуры, которые характеризуются переменной амплитудой  $2(k'_u)^2$  в функции смещения  $u$  и исследовать ее влияние на различные кубитные состояния поля деформации.

Модельная фрактальная структура представляет собой круговой цилиндр, находящийся в объемной дискретной решетке  $N_1 \times N_2 \times N_3$ , узлы которой задаются целыми числами  $n, m, j$ . Нелинейные уравнения для безразмерной комплексной функции смещения  $u$  узла решетки запишем в виде

$$u = k_u^2(1 - 2(k'_u)^2 \operatorname{sn}^2(u - u_0, k'_u)); \quad (2)$$

$$k_u^2 = (1 - \alpha) / Q; \quad k'_u = (1 - k_u^2)^{1/2}; \quad p = p_0 + p_1 n + p_2 m + p_3 j; \quad (3)$$

$$Q = p - b_1(n - n_0)^2 / n_c^2 - b_2(m - m_0)^2 / m_c^2 - b_3(j - j_0)^2 / j_c^2. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha$  – фрактальная размерность поля деформации  $u$  вдоль оси  $Oz$  ( $\alpha \in [0, 1]$ );  $u_0$  – постоянное (критическое) смещение; модули  $k_u, k'_u$  являются функциями от индексов  $n, m, j$  узлов решетки. Фрактальный круговой цилиндр характеризуется параметрами:  $p_0, p_1, p_2, p_3, b_1, b_2, b_3, n_0, n_c, m_0, m_c, j_0, j_c$ .

В нашей модели выбор различных состояний кубитов в плоскости  $nOm$  определяется ненулевыми коэффициентами при линейных слагаемых в функциях  $p, Q$  из (3), (4).

В работе [5, 6] было введено начальное состояние (0,0) фрактальной структуры – состояние с нулевыми коэффициентами  $p_1 = 0, p_2 = 0$ . Базисные состояния кубитов определены как: (1,0) –  $p_1 = 0.00423, p_2 = 0$ ; (0,1) –  $p_1 = 0, p_2 = 0.00572$ ; (-1,0) –  $p_1 = -0.00423, p_2 = 0$ ; (0,-1) –  $p_1 = 0, p_2 = -0.00572$ . Суперпозиционные состояния кубитов: (1,1) –  $p_1 = 0.00423, p_2 = 0.00572$ ; (1,-1) –  $p_1 = 0.00423, p_2 = -0.00572$ ; (-1,1) –  $p_1 = -0.00423, p_2 = 0.00572$ ; (-1,-1) –  $p_1 = -0.00423, p_2 = -0.00572$ .

При численном моделировании полагалось, что  $N_1 = 240, N_2 = 240, u_0 = 29.537, p_0 = 1.0423, b_1 = b_2 = 1, n_0 = 121.1471, m_0 = 120.3267, j_0 = 31.5279, j_c = 11.8247, b_3 = 0$ ; значения полуосей кругового цилиндра  $n_c = m_c = 57.4327$ .

Решение нелинейных уравнений (2) – (3) осуществлялось методом итераций по переменной  $n$  с комплексным начальным условием  $u = 0 + 0i$  (где  $i$  – мнимая единица). Для отдельной фрактальной структуры фрактальная размерность поля деформации  $u$  вдоль оси  $Oz$  принимала значение  $\alpha = 0.5$  (рис. 1).

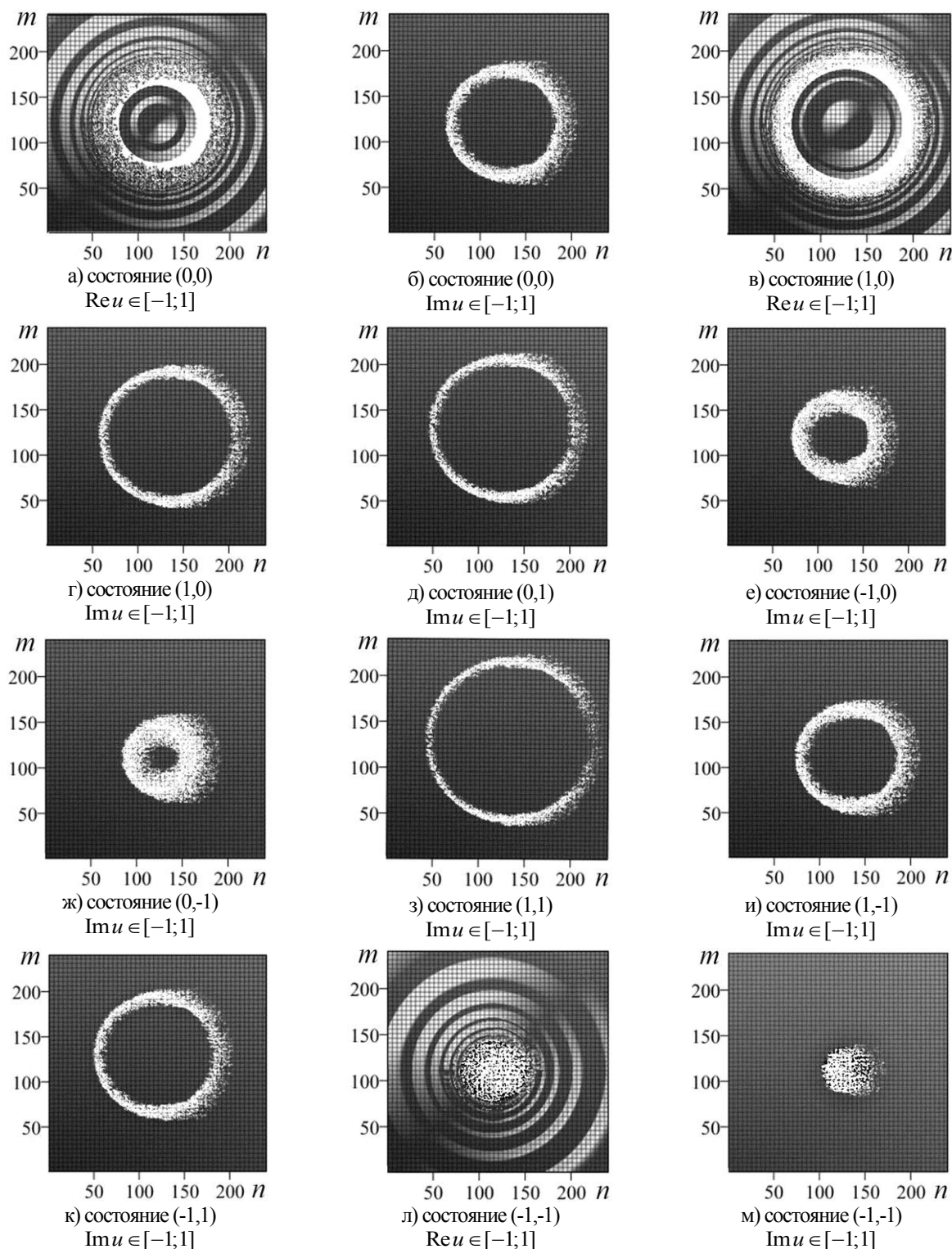


Рис. 1. Кубитные состояния поля деформации в круговой цилиндрической структуре.  
Поведение сечений  $\text{Re } u \in [-1; 1]$ ,  $\text{Im } u \in [-1; 1]$  (вид сверху) при  $\alpha = 0.5$ .

Так для  $Reu$  (рис. 1, а) кубитного состояния (0,0), (рис. 1, в) кубитного состояния (1,0) характерно регулярное поведение внутренней области типа мембраны вогнутой (выпуклой), а для границы характерно стохастическое поведение. Во внешней области наблюдается волнообразное поведение. На рис. 1, л представлена  $Reu$  для суперпозиционного состояния (-1,-1), для которого поведение внутренней области является существенно стохастическим, а во внешней области наблюдается регулярное волнообразное поведение.

Для всех состояний кубитов характерно наличие мнимой части безразмерной функции смещения  $Imu$ , что свидетельствует о наличии эффективного затухания. Это затухание локализовано в области стохастических колец. Радиусы, толщины, расположение этих колец существенно зависят от кубитных состояний поля деформации (рис. 1, б, г, д, е, ж, з, и, к). Для суперпозиционного состояния (-1,-1) затухание локализовано во всей стохастической области (рис. 1, м).

Далее рассмотрим влияние модуляции фрактальной размерности  $\alpha$  на кубитные состояния поля деформации  $u$  (рис. 2). Исследуем синусоидальный закон изменения  $\alpha = \sin \varphi$ , где угол  $\varphi = 6\pi(n-1)/39$  зависит от индекса  $n$  узла решетки.

Так для  $Reu$  (рис. 2, а) кубитного состояния (0,0), (рис. 2, в) кубитного состояния (1,0), (рис. 2, л) суперпозиционного состояния (-1,-1) характерно появление во внутренней области регулярных вертикальных полос (параллельных оси  $Om$ ), а для границы характерно стохастическое кольцообразное поведение.

Для мнимой части безразмерной функции смещения  $Imu$  наличие синусоидальной модуляции приводит к появлению тонкой структуры у стохастических колец (рис. 2, б, г, д, з, и, к) и стохастических областей (рис. 2, е, ж, м). Тонкая структура зависит от кубитных состояний.

Если реализован синусоидальный закон изменения  $\alpha = \sin \varphi$ , где угол  $\varphi = 6\pi(m-1)/39$  зависит от индекса  $m$  узла решетки, то тонкая структура будет представлять собой горизонтальные полосы, параллельные оси  $On$ . Отсюда следует возможность управления эффектом затухания с помощью модуляции фрактального индекса  $\alpha$ .

**Связанные фрактальные структуры, состоящие из двух круговых цилиндров со сдвинутыми центрами.** Описание поля деформации фрактальных связанных структур, состоящих из кругового и эллиптического цилиндров с различными кубитными состояниями было выполнено в работах [5, 10, 11]. Поле деформации таких связанных структур рассматривалось как сумма и произведение (скалярное и матричное) поля деформации отдельных структур. При этом центры сечений кругового и эллиптического цилиндров совпадали.

В данной работе исследуем влияние переменной амплитуды и модуляции фрактального индекса на состояния поля деформации связанных фрактальных структур, состоящих из двух круговых цилиндров со сдвинутыми центрами. При этом поле деформации связанных структур рассматриваем как сумму полей деформации отдельных структур. Как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать фрактальные структуры, которые характеризуются переменной амплитудой  $2(k'_{ui})^2$  в функции смещения  $u$ . В этом случае нелинейные уравнения (2) – (4) для безразмерной комплексной функции смещения  $u$  узла решетки имеют вид

$$u = \sum_{i=1}^2 u_i; \quad u_i = k_{ui}^2 (1 - 2(k'_{ui})^2 \text{sn}^2(u - u_{0i}, k'_{ui})); \quad (5)$$

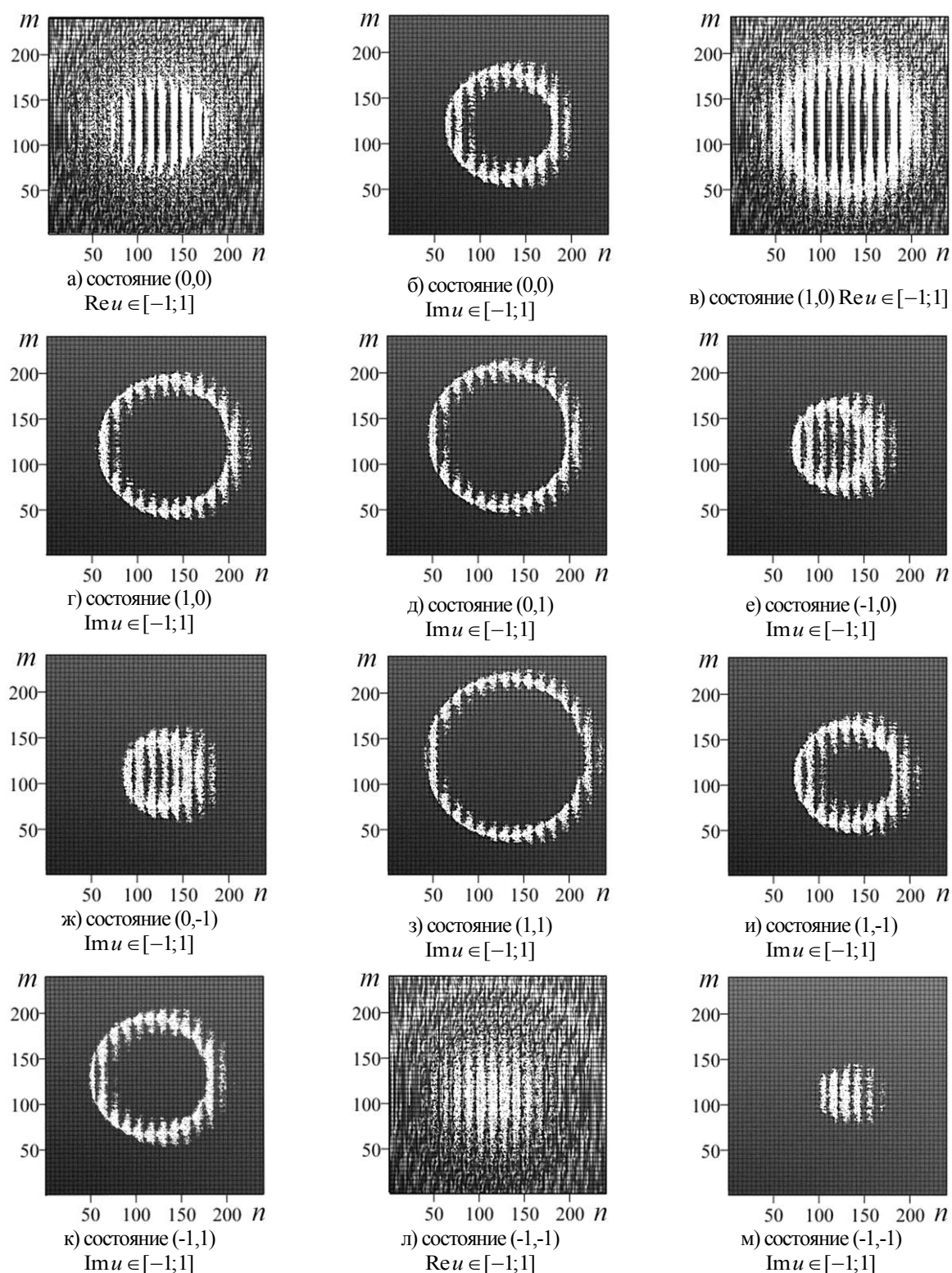


Рис. 2. Влияние модуляции на кубитные состояния поля деформации в круговой цилиндрической структуре. Поведение сечений  $\text{Re } u \in [-1;1]$ ,  $\text{Im } u \in [-1;1]$  (вид сверху) при  $\alpha = \sin \varphi$ ,  $\varphi = 6\pi(n-1)/39$

$$k_{ui}^2 = (1 - \alpha_i) / Q_i; \quad k'_{ui} = (1 - k_{ui}^2)^{1/2}; \quad p_i = p_{0i} + p_{1i}n + p_{2i}m + p_{3i}j; \quad (6)$$

$$Q_i = p_i - b_{1i}(n - n_{0i})^2 / n_{ci}^2 - b_{2i}(m - m_{0i})^2 / m_{ci}^2 - b_{3i}(j - j_{0i})^2 / j_{ci}^2. \quad (7)$$

Здесь  $\alpha_i$  – фрактальные размерности поля деформации  $u$  вдоль оси  $Oz$  ( $i=1,2$ );  $u_{0i}$  – постоянные (критические) смещения; модули  $k_{ui}$  являются функциями от индексов  $n, m, j$  узлов решетки. Различные структуры характеризуются параметрами:  $p_{0i}, p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}, b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, n_{0i}, n_{ci}, m_{0i}, m_{ci}, j_{0i}, j_{ci}$ . Начальное состояние  $(0,0)$  фрактальной структуры определяется нулевыми коэффициентами  $p_{1i} = 0, p_{2i} = 0$ . Для отдельных круговых цилиндров I и II введем начальные радиусы  $R_1, R_2$  окружностей сечений в плоскости  $nOm$  на основе полуосей  $n_{c1} = m_{c1} = R_1 = 57.4327, n_{c2} = m_{c2} = R_2 = 57.4327$ . При численном моделировании полагалось, что  $N_1=240, N_2=240, u_0=29.537, p_0=1.0423, b_{1i}=b_{2i}=1, n_{01}=106.7889, n_{02}=135.5053, m_{01}=m_{02}=120.3267, j_{0i}=31.5279, j_{ci}=11.8247, b_{3i}=0$ . Центры сечений круговых цилиндров I и II находятся на одной линии  $m_{01}=m_{02}$  вдоль оси  $Om$  и на начальном расстоянии друг от друга  $d_0 = n_{02} - n_{01} = 135.5053 - 106.7889 = 28.7164$  вдоль оси  $On$ .

Полю деформации связанной структуры соответствует упорядоченный оператор (5)  $u = u_1 + u_2$  и матрица  $\mathbf{M}(u)$ , элементы которой находятся методом итераций по индексу  $n$  при решении уравнений (5) – (7) с комплексным начальным условием  $u = 0 + 0i$  (где  $i$  – мнимая единица).

Сначала исследуем влияние изменения радиусов сечений круговых цилиндров I и II на поле деформации связанной фрактальной структуры в случае, когда фрактальные индексы отдельных структур постоянные и одинаковые  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ .

На рис. 3 показано поведение сечений  $\text{Re}(u)$  (несет информацию о структуре) и  $\text{Im}(u)$  (несет информацию об эффективном затухании) поля деформации связанной структуры при постоянном радиусе  $R_2$  сечения цилиндра II и изменении радиуса  $R_1$  сечения цилиндра I. При этом положение центров цилиндров  $(n_{01}, m_{01}), (n_{02}, m_{02})$  не изменяется. Начальное расстояние между центрами сечений постоянное и выполняется условие  $d_0 < 2R_2$ , что указывает на эффект перекрытия внутренних областей цилиндров.

Сечения цилиндров одинаковых радиусов  $R_1=R_2$  (рис. 3, а, г) выявляют характерные особенности поведения комплексного поля деформации  $\text{Re}u$  (рис. 3, а),  $\text{Im}u$  (рис. 3, г) во внутренних и во внешних областях связанной структуры, которые возникают при пересечении отдельных цилиндров. Границам отдельных цилиндров соответствуют пересекающиеся кольца. Между левыми границами (область  $P_1$ ) и правыми границами (область  $P_2$ ) цилиндров I и II наблюдается ярко выраженное стохастическое поведение типа стохастической пыли (рис. 3, а, г), что для объемной структуры соответствует совокупности отдельных цилиндрических трубок малых радиусов с осями параллельными оси  $Oz$ . Локализация, амплитуда, радиусы отдельных трубок являются случайными величинами, поэтому в процессе итераций возникает стохастическое поведение поля деформации. Во внутренней области между левой границей цилиндра II и правой границей цилиндра I (область  $P_{12}$  – перекрытия круговых цилиндров) наблюдаются особенности поведения на  $\text{Re}u$  – регулярное

поведение типа выпукло-вогнутой мембраны (рис. 3, а) и дополнительный вклад типа стохастической пыли от левой границы цилиндра II.

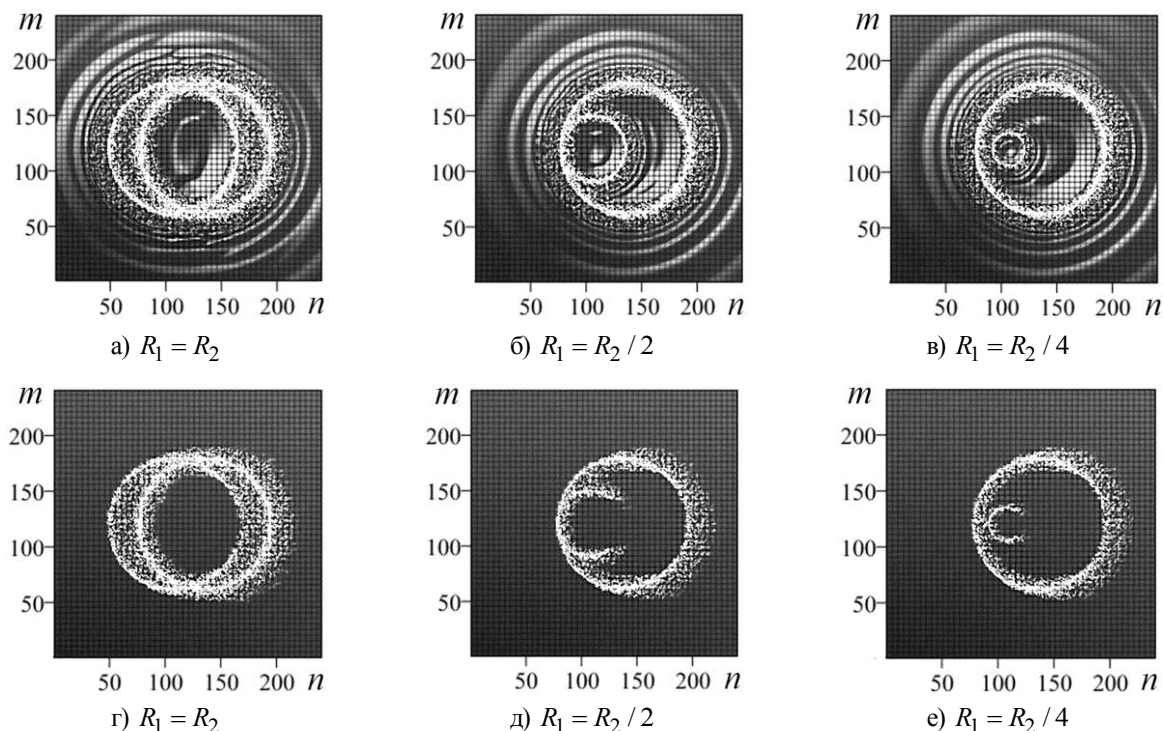


Рис. 3. Влияние изменения  $R_1$  при постоянном  $R_2 = 57.4327$  на поле деформации связанной фрактальной структуры при  $\alpha = 0.5$ . Поведение сечений (вид сверху): (а, б, в) -  $\text{Re } u \in [-10; 10]$ , (г, д, е) -  $\text{Im } u \in [-10; 10]$ .

На  $\text{Im } u$  (рис. 3, г) в области  $P_{12}$  также присутствует дополнительный вклад от левой границы цилиндра II, в остальной области  $P_{12}$   $\text{Im } u = 0$ . Во внешней области связанной структуры (за границами): на  $\text{Re } u$  (рис. 3, а) наблюдается сначала стохастическое поведение в области  $P_3$ , которое далее переходит в деформированное волновое поведение с разрывами в области  $P_4$ ; на  $\text{Im } u$  (рис. 3, г) присутствует дополнительный вклад от правой границы цилиндра II на фоне  $\text{Im } u = 0$ . Указанные дополнительные вклады в  $\text{Re } u$  и  $\text{Im } u$  связаны со стохастическими процессами, которые реализуются в результате решения уравнений (5) – (7) методом итераций по переменной  $n$ . Амплитуды отдельных пиков поля деформации в областях  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  порядка  $10^7 \div 10^8$ , а в областях  $P_{12}$  для мембраны и  $P_4$  для волнового поведения – порядка единицы. Это дает возможность интерпретировать область перекрытия как яму, окруженную стохастическими границами. При этом вся связанная структура может выступать в качестве ловушки при использовании наноструктур и метаматериалов с объемной структурой.

Уменьшение  $R_1$  (рис. 3, б, в, д, е) приводит к смещению области перекрытия  $P_{12}$ , которая практически локализована во внутренней области цилиндра I. При  $R_1 = R_2 / 2$  (рис. 3, б, д) происходит внутреннее касание левых границ цилиндров I и II на оси  $On$ . При  $R_1 = R_2 / 4$  (рис. 3, в, е) цилиндр I расположен полностью внутри цилиндра II без точек касания. Во внутренней области цилиндра II на  $\text{Re } u$  (рис. 3, б, в) дополнительно

появляется волнообразная структура, а на  $\text{Im} u$  (рис. 3 д, е) – стохастическое кольцо с разрывом на границе цилиндра I. Во внешней области  $P_3$  стохастическое поведение сохраняется и далее переходит в регулярное волновое поведение в области  $P_4$  (рис. 3, б, в). В области  $P_4$   $\text{Im} u = 0$  (рис. 3, д, е).

Далее рассмотрим (в отличие от рис. 3) поведение поля деформации связанной структуры для варианта, когда радиус  $R_1$  цилиндра I остается постоянным, а изменяется радиус  $R_2$  цилиндра II. При этом возникает возможность выполнения условия  $d_0 > 2R_2$ , что приводит к отсутствию эффекта перекрытия внутренних областей цилиндров и к изменению поведения поля деформации во внешней области связанной структуры.

На рис. 4 показано поведение сечений  $\text{Re}(u)$  и  $\text{Im}(u)$  поля деформации связанной структуры при постоянном радиусе  $R_1 = d_0/2 = 14.3582$  цилиндра I и изменении радиуса  $R_2$  цилиндра II. Для рис. 4, а, г выполняются условия  $d_0 = R_2$ ,  $d_0 < 2R_2$  при этом левая граница цилиндра II проходит через центр цилиндра I  $(n_{01}, m_{01})$ . Поведение комплексного поля деформации во внутренних областях  $P_1$ ,  $P_2$  и в области перекрытия  $P_{12}$  изменяется по сравнению с рис. 3. Качественное поведение поля деформации для  $\text{Re} u$  во внутренней области близко к поведению на рис. 3. Во внешней области  $P_3$  наблюдается стохастическое поведение, которое далее в области  $P_4$  переходит в деформированное волновое поведение (рис. 4, а). Однако, для  $\text{Im} u$  (рис. 4, г) на границе

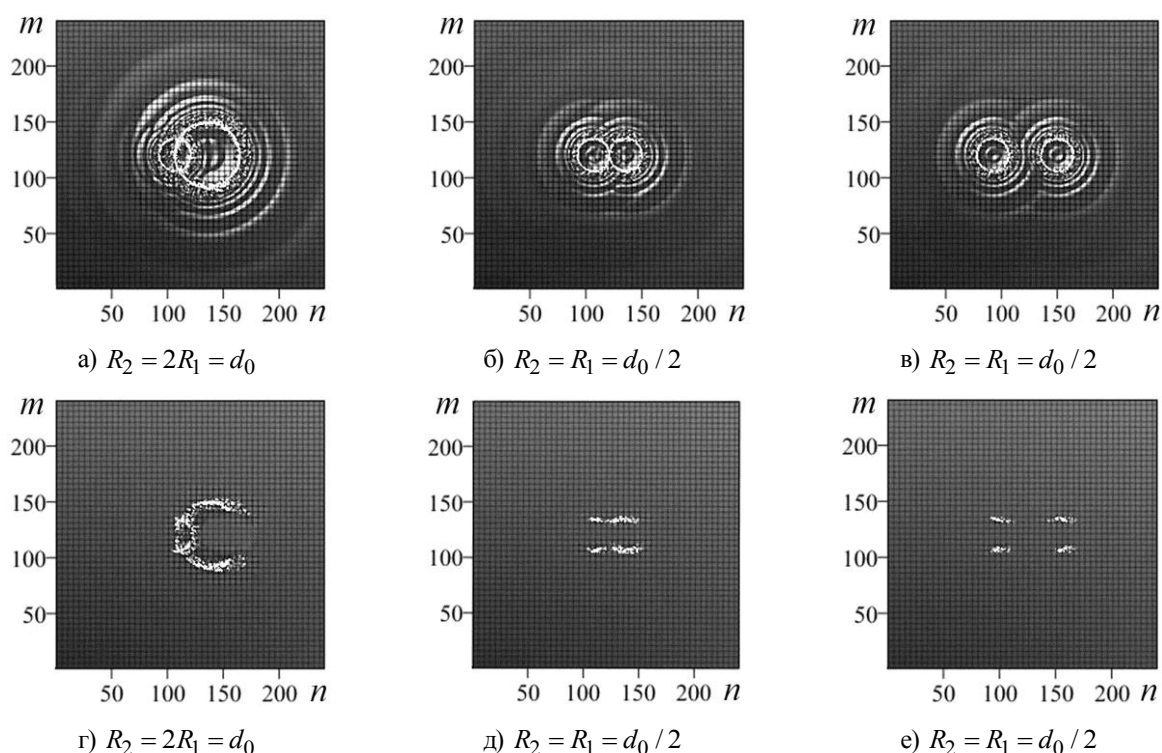


Рис. 4. Влияние изменения  $R_2$  при постоянном  $R_1 = d_0/2 = 14.3582$  на поле деформации связанной фрактальной структуры при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ . Поведение сечений (вид сверху): (а, б, в) –  $\text{Re} u \in [-10; 10]$ , (г, д, е) –  $\text{Im} u \in [-10; 10]$ .

связанной структуры характерно возникновение ярко выраженных особенностей типа разрывов, где  $\text{Im} u = 0$ . Во внешних областях  $P_3, P_4$   $\text{Im} u = 0$  (рис. 4, г). Для рис. 4, б, д выполняется условие  $d_0 = 2R_2$ , при этом левая граница цилиндра II касается правой границы цилиндра I, эффект перекрытия внутренних областей цилиндров отсутствует. Во внешней области  $\text{Re} u$  вблизи линии касания (вдоль оси  $Om$ ) наблюдается деформированное волновое поведение (рис. 4, б). Локализация особенностей типа разрывов (где  $\text{Im} u = 0$ ) изменяется (рис. 4, д) по сравнению с (рис. 4, г).

Для рис. 4, в, е изменяем расстояние между центрами цилиндров вдоль оси  $On$ :  $n_{01} = 92.4307$ ,  $n_{02} = 149.8635$ , при этом выполняется условие  $d_0 > 2R_2$ ,  $d_0 = n_{02} - n_{01} = 149.8635 - 92.4307 = 57.4328$  и эффект перекрытия внутренних областей цилиндров отсутствует. В области между правой границей цилиндра I и левой границей цилиндра II на  $\text{Re} u$  (рис. 4, в) возникает эффект взаимодействия (перестройки структуры деформированных волнового и стохастического поведений областей  $P_3, P_4$ ). Локализация особенностей типа разрывов (где  $\text{Im} u = 0$ ) изменяется (рис. 4, е) по сравнению с (рис. 4, д).

Далее рассмотрим влияние модуляции фрактальных индексов отдельных цилиндров на поведение поля деформации связанной фрактальной структуры (рис. 5). Модуляцию фрактальных индексов  $\alpha_1, \alpha_2$  отдельных цилиндров выполним на основе синусоидальных законов изменения  $\alpha = \sin \varphi$ , где угол  $\varphi$  в общем случае зависит от индексов  $n, m$  узлов решетки, что приводит к существенным изменениям поведения комплексного поля деформации при решении уравнений (5) – (7) методом итерации.

В качестве начальной связанной структуры без модуляции фрактальных индексов выбираем структуру с одинаковыми радиусами  $R_1 = R_2 = 57.4327$ , которой соответствует поведение комплексного поля деформации на рис. 3, а, г. На рис. 5, а, г приведены  $\text{Re} u$  и  $\text{Im} u$  для варианта модуляции фрактального индекса  $\alpha_1 = \sin \varphi_1(n)$  цилиндра I, где угол  $\varphi_1 = 6\pi(n-1)/39$  зависит от индекса  $n$  узла решетки. Фрактальный индекс  $\alpha_2 = 0.5$  цилиндра II выбирается постоянным. Для  $\text{Re} u$  модуляция  $\alpha_1 = \sin \varphi_1(n)$  цилиндра I приводит к появлению вертикальных полос во внутренних областях  $P_1, P_{12}$  (рис. 5, а). В области  $P_2$  сохраняется стохастическое поведение, что связано с наличием постоянного  $\alpha_2 = 0.5$  цилиндра II. На  $\text{Im} u$  появляются вертикальные полосы, локализованные на границе цилиндра I и хаотическое поведение в виде пыли на границе цилиндра II (рис. 5, г).

Дополнительная модуляция  $\alpha_2 = \sin \varphi_2(m)$  цилиндра II по тому же закону, что и для цилиндра I приводит к появлению вертикальных полос на  $\text{Re} u$  во всех внутренних областях  $P_1, P_{12}, P_2$  (рис. 5, б). На  $\text{Im} u$  локализация вертикальных полос наблюдается как на границах цилиндров I, II, так и во внутренних областях  $P_1, P_2$  (рис. 5, д).

Изменяя закон модуляции  $\alpha_2 = \sin \varphi_2(m)$  цилиндра II, где угол  $\varphi_2 = 6\pi(m-1)/39$  зависит от индекса  $m$  узла решетки, наблюдаем существенные изменения поля деформации. На  $\text{Re} u$  во внутренних областях  $P_1$  сохраняются вертикальные полосы, в  $P_2$  появляются горизонтальные полосы, а в области перекрытия  $P_{12}$  – решетка со стохастическими ячейками (рис. 5, в). Для  $\text{Im} u$ , в отличие от рис. 5, г, д, во внутренней области  $P_{12}$  наблюдаются дополнительные горизонтальные полосы (рис. 5, е), что связано

с модуляцией по  $m$  фрактального индекса  $\alpha_2$  цилиндра II. Во внешней области связанной структуры справа от границы образуются стохастические удлиненные горизонтальные полосы, а слева – короткие горизонтальные полосы типа «иголок».

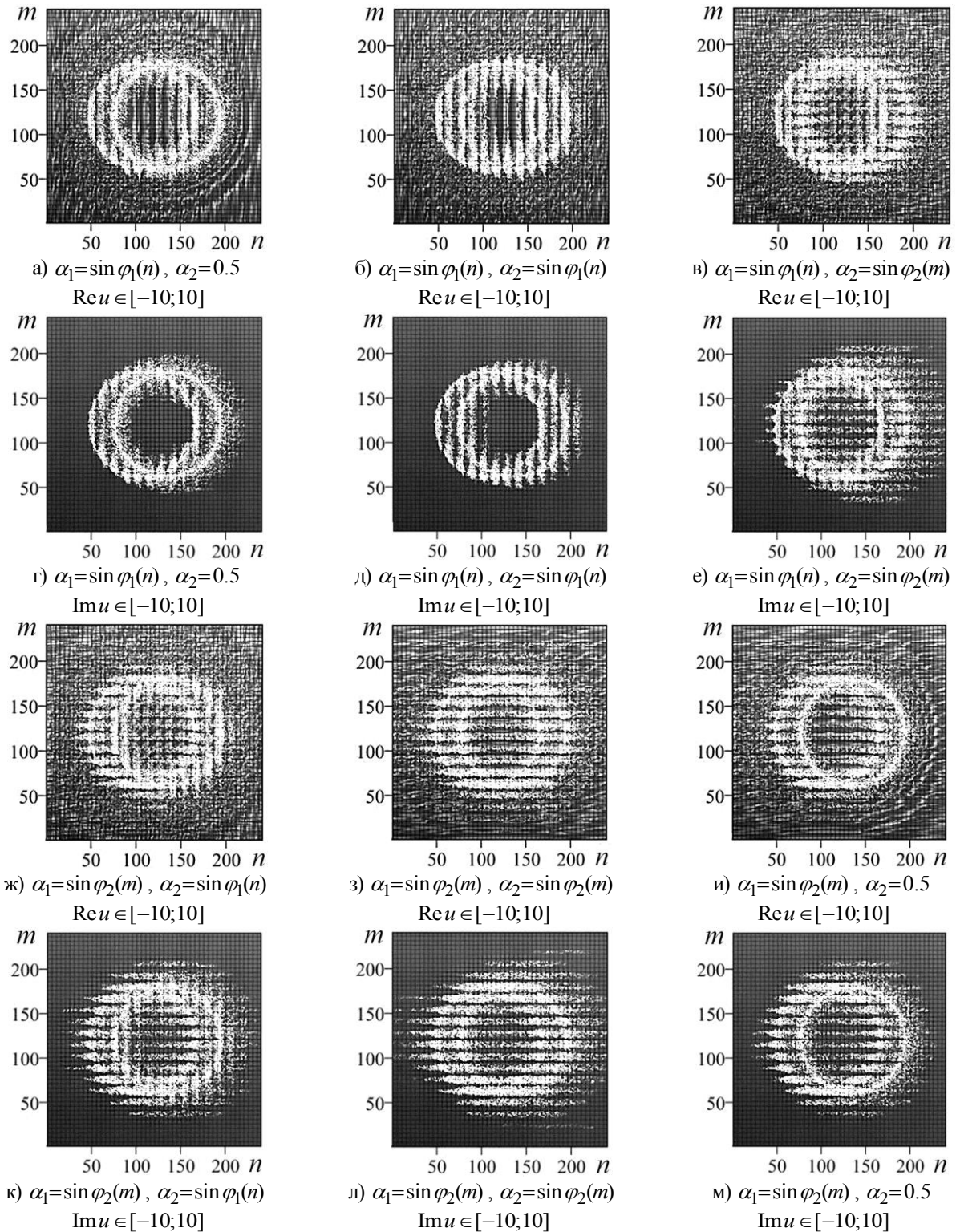


Рис. 5. Влияние модуляции фрактального индекса на поведение поля деформации связанной фрактальной структуры,  $\varphi_1 = 6\pi(n-1)/39$ ,  $\varphi_2 = 6\pi(m-1)/39$ . Поведение сечений (вид сверху).

Теперь выберем в отличие от (рис. 5, а–е) другой закон модуляции фрактального индекса  $\alpha_1 = \sin \varphi_2(m)$  цилиндра I, где угол  $\varphi_2$  зависит от индекса  $m$  узла решетки (рис. 5, ж–м). Далее изменяем закон модуляции фрактального индекса цилиндра II. Так при  $\alpha_2 = \sin \varphi_1(n)$  (рис. 5 ж, к) на  $\text{Re}u$  (рис. 5, ж) во внутренних областях  $P_1$  появляются горизонтальные полосы, в  $P_2$  появляются вертикальные полосы, а в области перекрытия  $P_{12}$  – решетка с другими стохастическими ячейками (в отличие от рис. 5, в). Для  $\text{Im}u$  во внутренней области  $P_{12}$  наблюдаются дополнительные горизонтальные полосы (рис. 5, к), что связано с модуляцией по  $m$  фрактального индекса  $\alpha_1$  цилиндра I. Во внешней области связанной структуры (рис. 5, к) слева от границы образуются стохастические удлиненные (в отличие от коротких из рис. 5, е) горизонтальные полосы типа «иглолок», а справа – короткие (в отличие от удлиненных из рис. 5, е) горизонтальные полосы.

Далее сохраняем закон модуляции фрактального индекса  $\alpha_1 = \sin \varphi_2(m)$  цилиндра I и изменяем закон модуляции фрактального индекса  $\alpha_2 = \sin \varphi_2(m)$  цилиндра II (рис. 5, з, л). При этом во всех внутренних и внешних областях связанной структуры на  $\text{Re}u$  (рис. 5, з) и  $\text{Im}u$  (рис. 5, л) наблюдаются только характерные особенности поведения комплексного поля деформации типа горизонтальных полос.

Дальнейший переход к постоянному фрактальному индексу  $\alpha_2 = 0.5$  цилиндра II на  $\text{Re}u$  (рис. 5, и) во внешней области  $P_3$  (справа от границы) приводит к появлению стохастической пыли, поведение которой в области  $P_4$  переходит в деформированное волновое. На  $\text{Im}u$  (рис. 5, м) во внешней области  $P_3$  (справа от границы) наблюдается поведение типа стохастической пыли. Такое поведение поля деформации подтверждает отсутствие модуляции фрактального индекса  $\alpha_2 = 0.5$  у цилиндра II. Слева от границы во внешней области  $P_3$  на  $\text{Re}u$  (рис. 5, и) и  $\text{Im}u$  (рис. 5, м) наблюдаются горизонтальные полосы типа «иглолок», а во внутренних областях  $P_1$ ,  $P_{12}$ ,  $P_2$  – стохастические горизонтальные полосы. Такое поведение поля деформации подтверждает наличие модуляции фрактального индекса по закону  $\alpha_1 = \sin \varphi_2(m)$  цилиндра I.

**Выводы.** Показано, что наличие переменной амплитуды функции смещения отдельной структуры приводит к следующим особенностям поведения. Для  $\text{Re}u$  наблюдается регулярное поведение внутренней области типа мембраны вогнутой (выпуклой), для границы – стохастическое поведение, во внешней области – волнообразное поведение. Для всех состояний кубитов характерно наличие мнимой части безразмерной функции смещения  $\text{Im}u$ , что свидетельствует о наличии эффективного затухания. Это затухание локализовано в области стохастических колец. Радиусы, толшины, расположение этих колец существенно зависят от кубитных состояний поля деформации.

Наличие модуляции фрактальной размерности  $\alpha$  для  $\text{Re}u$  приводит к появлению во внутренней области регулярных вертикальных полос, а для границы характерно стохастическое кольцообразное поведение. Для  $\text{Im}u$  наличие синусоидальной модуляции приводит к появлению тонкой структуры у стохастических колец и стохастических областей. Тонкая структура зависит от кубитных состояний. Отсюда следует возможность управления эффектом затухания с помощью модуляции фрактального индекса  $\alpha$ .

Исследовано влияние переменной амплитуды и модуляции фрактальных индексов на состояния поля деформации связанных фрактальных структур, состоящих из двух круговых цилиндров со сдвинутыми центрами. При пересечении отдельных цилиндров возникают внутренние и внешние области связанной структуры, где комплексное поле деформации имеет характерные особенности поведения. Границам отдельных цилиндров соответствуют пересекающиеся кольца.

При отсутствии модуляции фрактальных индексов во внутренних областях  $P_1$ ,  $P_2$  наблюдается ярко выраженное стохастическое поведение типа стохастической пыли, что для объемной структуры соответствует совокупности отдельных цилиндрических трубок малых радиусов с осями параллельными оси  $Oz$ . Локализация, амплитуда, радиусы отдельных трубок являются случайными величинами. Во внутренней области перекрытия круговых цилиндров  $P_2$  наблюдается поведение типа выпукло-вогнутой мембраны. Во внешней области связанной структуры (за границами) в области  $P_3$  наблюдается стохастическое поведение, которое в области  $P_4$  переходит в деформированное волновое поведение с разрывами.

Исследовано влияние модуляции фрактальных индексов отдельных цилиндров на поведение комплексного поля деформации связанной фрактальной структуры. Модуляция фрактальных индексов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  отдельных цилиндров выполнялась на основе синусоидальных законов изменения  $\alpha = \sin \varphi$ , где угол  $\varphi$  в общем случае зависит от индексов  $n$ ,  $m$  узлов решетки. Показано, что для внутренних областей связанной структуры характерно появление горизонтальных, вертикальных полос, решеток со стохастическими ячейками. Во внешних областях наблюдаются особенности поведения поля деформации типа иголок, стохастической пыли и деформированного волнового поведения с разрывами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нелинейности в периодических структурах и метаматериалах / под ред. Ю.С. Кившаря и Н.Н. Розанова. – М.: Физматлит, 2014. – 384 с.
2. Abramov V.S. Active Nanoobjects, Neutrinos and Higgs Fields in Anisotropic Models of Fractal Cosmology / V.S. Abramov // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2019. – No 83(12). – P. 1516-1520.
3. Abramov V.S. Active Nanoobjects, Neutrino and Higgs Boson in a Fractal Models of the Universe / V.S. Abramov //: C.H. Skiadas and Y. Dimotikalis (eds.), 12th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG 2020. – P. 1-14
4. Омелянчук А.Н. Квантовые когерентные явления в джозефсоновских кубитах. / А.Н. Омелянчук, Е.В. Ильичев, С.Н. Шевченко. – К.: Наукова думка, 2013. – 168 с.
5. Абрамова О.П. Поле деформации и кубитные состояния фрактальных структур с элементами цилиндрического типа / О.П. Абрамова // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020. – № 1. – С. 3-15.
6. Абрамова О.П. Управление ячейкой памяти в модельной фрактальной связанной структуре / О.П. Абрамова, С.В. Абрамов // Физико-математическое моделирование систем: материалы XXII Междунар. семинара. Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2021. С. 3-8.
7. Abramova O.P. Effect of Ordering of Displacement Fields Operators of Separate Quantum Dots, Elliptical Cylinders on the Deformation Field of Coupled Fractal Structures / O.P. Abramova, A.V. Abramov // C.H. Skiadas and I. Lubashevsky (eds.), 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG 2019. – P. 15-27.
8. Abramova O.P., Abramov A.V. Coupled Fractal Structures with Elements of Cylindrical Type / O.P. Abramova, A.V. Abramov // C.H. Skiadas and Y. Dimotikalis (eds.), 12th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG 2020. – P. 15-26.

9. Stöckmann H.-J. Quantum Chaos. An Introduction / H.-J. Stöckmann. – Philipps-Universität Marburg, Germany, 2007. – 384 p.
10. Абрамова О.П. Ячейка памяти на основе кубитных состояний в модельной фрактальной связанной структуре / О.П. Абрамова // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 3. – С. 3-15.
11. Abramova O.P., Abramov A.V. Qubits and Fractal Structures with Elements of the Cylindrical Type / O.P. Abramova, A.V. Abramov // C.H. Skiadas and Y. Dimotikalis (eds.), 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG 2021. – P. 15-28.

*Поступила в редакцию 17.03.2022 г.*

# **BEHAVIOR OF THE DEFORMATION FIELD OF THE STRUCTURE CONSISTING OF TWO CIRCULAR CYLINDERS WITH SHIFTED CENTERS IN THE PRESENCE OF FRACTAL INDEX MODULATION**

***O.P. Abramova***

By the method of numerical simulation the influence of variable amplitude and modulation of fractal indices on the states of the complex deformation field of coupled fractal structures consisting of two circular cylinders with shifted centers is investigated. For a structure from one circular cylinder, the features of the behavior of the deformation field of the qubit states are investigated. When the separate cylinders intersect, the inner and outer regions of the linked structure arise. Intersecting stochastic rings correspond to the boundaries of separate cylinders in sections. It is shown, that in the absence of modulation in the inner regions, a behavior of the stochastic dust type (the set of separate cylindrical tubes of small radii in a bulk structure) is observed. Localization, amplitude, radii of separate tubes are random values. In the inner area of overlap of circular cylinders, the behavior of the type of a convex-concave membrane is observed. In the outer region of the bound structure (outside the boundaries), stochastic behavior is observed, which further transforms into deformed wave behavior. In the presence of modulation, the internal regions of the coupled structure are characterized by the appearance of horizontal, vertical stripes, lattices with stochastic cells. In the outer regions the features of the behavior of the deformation field such as needles, stochastic dust, and deformed wave behavior with discontinuities are observed.

**Keywords:** coupled fractal structures, complex deformation field, qubit states, variable amplitude, modulation of fractal indices, lattices with stochastic cells, stochastic dust, deformed wave behavior.

**Абрамова Ольга Петровна**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк, ДНР.  
E-mail: oabramova@ua.fm

**Abramova Olga Petrovna**

Candidate of Physics and Mathematical Sciences,  
Docent,  
Donetsk National University, Donetsk, DPR.  
E-mail: oabramova@ua.fm

УДК 539.213; 530.1; 524.3; 524.8

## АКТИВНЫЕ НАНОЧАСТИЦЫ, АГРЕГАТЫ И БОЗОН ХИГГСА В КВАРК-ГЛЮОННОЙ МОДЕЛИ

© 2022. В.С. Абрамов

Для описания связей и основных характеристик активных наночастиц с бозоном Хиггса предложена кварк-глюонная модель. Длины волн активных наночастиц определяются гравитационными радиусами Шварцшильда легких кварков. Показана возможность распада бозона Хиггса на лептонные пары (типа электрон-электронная дырка, мюон-мюонная дырка) и фотон. Оценки энергетических щелей (энергий колебательных мод), эффективных температур зависят от состояний антинейтринного поля Хиггса, связанного с барионной плотностью материи. Показана возможность образования агрегатов с большими длинами волн на основе гравитационных радиусов Шварцшильда эффективного атома и бозона Хиггса. Показано, что наличие вкладов от тяжелых кварков могут приводить к изменениям эффективных углов Кабибо, поля Хиггса, энергий колебательных мод. Учет поля Хиггса для энергий составных частиц приводит к появлению частиц с энергиями типа тяжелого, легкого бозонов Хиггса.

**Ключевые слова:** активные наночастицы, бозон Хиггса и поле Хиггса, кварк-глюонная модель, лептонные пары, фотон, агрегаты.

**Введение.** Экспериментальные исследования на БАКе [1] показали возможность распада бозона Хиггса на лептонную пару и фотон, явление асимметрии антиматерии в протоне [2], появление экзотических состояний адронов [3] и барионной плотности материи [4].

Активные нанообъекты, нейтрино и бозон Хиггса исследовались в работах [5–8]. В работах [7, 8] была показана возможность появления сверхбезызлучательных состояний у активных нанообъектов. С другой стороны, активные фемтообъекты и нанообъекты могут входить в состав солнечного и межзвездного ветров [6], релятивистских джетов (выбросов материи с большими скоростями из бинарных черных дыр) [9–11]. Эти частицы могут влиять на атмосферу Земли, различные физические и химические процессы на Земле.

Использование экспериментальных методов с высоким угловым разрешением [12] подтверждает, что источником таких частиц могут быть корональные дыры на Солнце.

Однако, связи глюонного импульса  $P_g$  с гравитационными радиусами Шварцшильда легких  $u, d, s$ -кварков не были исследованы. Не было показано возможное влияние кварк-глюонного взаимодействия на длины волн активных наночастиц и агрегаты из таких частиц. При этом активные пары наночастиц могут находиться в различных точках объемных структур и взаимодействовать через глюоны. Возникает необходимость учета эффекта упорядочения операторов полей деформации [13–15] таких агрегатных объектов. При этом возникает задача описания активных колебательных мод таких объектов на основе анизотропной модели эффективного атома и бозона Хиггса [11], особенностей поведения возникающего квантового механического осциллятора с учетом вклада от барионной плотности материи.

При описании легких  $u, d, s$ -кварков в теории электрослабых взаимодействий С. Вайнберга [16] в качестве основного параметра используется угол Кабибо  $\theta_W$ . Наличие вкладов от тяжелых  $c, b, t$ -кварков и взаимодействия через глюоны [16] может приводить к изменениям угла Кабибо, появлению различных составных частиц

типа агрегатов при столкновении протонов высокой энергии, дополнительным вкладам от поля Хиггса с образованием тяжелых бозонов Хиггса, на что указывают экспериментальные исследования на БАКе [1–3].

Целью данной работы является исследование связей активных наночастиц, агрегатов, поля Хиггса и бозона Хиггса в рамках кварк-глюонной модели.

**Описание активных объектов на основе кварк-глюонной модели.** В нашей модели энергии покоя  $E_{Au}$ ,  $E_{Ad}$ ,  $E_{As}$  легких  $u, d, s$ -кварков определяются из выражений

$$\begin{aligned} E_{Au}/E_{Ad} &= (n_{vn} + 0.5) + S_{12u}; \quad E_{Au}/2E_{As} = (\Omega_{\tau L} - \Omega_{\tau L}^*) + S_{12u}; \\ (E_{Au}/E_{Ad}) - (E_{Au}/2E_{As}) &= (n_{vn} + 0.5) - (\Omega_{\tau L} - \Omega_{\tau L}^*). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь квантовые числа  $n_{vn}$ ,  $\Omega_{\tau L}$ ,  $\Omega_{\tau L}^*$ , параметр  $S_{12u}$  определены соотношениями из работ [5, 6]

$$\begin{aligned} n_{vn}^2 &= \Omega_{\tau L}^*; \quad \Omega_{\tau L} E_{W0} = \Omega_{\tau L}^* E_{Z0}; \quad S_{12u} = E_{au} / E_{H0}; \\ E_{au} - E_{as} &= E_c; \quad E_{as} = \xi_{gs} E_{0g} = S_{012} E_{H0}; \quad E_{0g} = n_g E_{H0}; \quad S_{012} = n_g \xi_{gs}. \end{aligned} \quad (2)$$

В выражениях (2) лептонное квантовое число  $\Omega_{\tau L} = 0.002402187$  связано с квантовым числом  $\Omega_{\tau L}^* = 0.002116741$  через энергии покоя  $E_{W0} = 80.35235464$  ГэВ и  $E_{Z0} = 91.188$  ГэВ для  $W0$  и  $Z0$  бозонов, соответственно; квантовое число  $n_{vn} = 0.046008054$ ; энергия покоя  $c$ -кварка  $E_c = 1.030142904$  ГэВ; энергии  $E_{as} = 0.681586763$  ГэВ,  $E_{au} = 1.711729667$  ГэВ; энергия покоя бозона Хиггса  $E_{H0} = 125.03238$  ГэВ, энергия глюонов  $E_{0g} = 1.00025904$  ТэВ; число глюонов  $n_g = 8$ ; численные значения параметров  $S_{12u} = 0.013690291$ ,  $S_{012} = 0.005451282$ ,  $\xi_{gs} = 0.00068141$ .

На основе численных значений из (2) по формулам (1) находим энергии покоя  $E_{Au} = 4.199991904$  МэВ,  $E_{Ad} = 7.504027735$  МэВ,  $E_{As} = 150.2601224$  МэВ для  $u, d, s$ -кварков, которые согласуются с энергиями из [16]. Гравитационные радиусы Шварцшильда  $R_{Au}$ ,  $R_{Ad}$ ,  $R_{As}$  для  $u, d, s$ -кварков находим по формулам

$$R_{Au} = A_G E_{Au}; \quad R_{Ad} = A_G E_{Ad}; \quad R_{As} = A_G E_{As}. \quad (3)$$

Здесь постоянная  $A_G = 0.960836162$  фм  $\cdot$  (эВ) $^{-1}$  из [5, 6]. Численные значения радиусов  $R_{Au} = 4.035504102$  нм,  $R_{Ad} = 7.210141208$  нм,  $R_{As} = 144.3753593$  нм. Отметим, что эти гравитационные радиусы Шварцшильда могут определять характерные длины волн активных наночастиц. Так длина волны  $\lambda_{gAu} = 1.008876026$  нм для одной из активных наночастиц определяется связью типа  $\lambda_{Au} = 2R_{Au} = n_g \lambda_{gAu}$ . Из (3) также следует возможность образования агрегатов из таких активных наночастиц с большими размерами (до 2 мкм) и имеющих сложную структуру.

В рамках нашей анизотропной модели [11] (с учетом поляризации реликтового излучения) основное квантовое число  $n_{vn}$  можно независимо определить из выражений

$$n_{vn} = |\chi_{ef}| \sin(\varphi_{0g}) + \psi_{rc} + 2\Omega_{0G}; \quad \Omega_{b1} = 0.5n_{vn} - 2n_{\tau L} \sin(\varphi_{0g}); \quad n_{\tau L}^2 = \Omega_{\tau L}. \quad (4)$$

Здесь  $|\chi_{ef}|=0.2504252$ ,  $\psi_{rc}=0.04420725$ ,  $\Omega_{0G}=4.99501253 \cdot 10^{-6}$ , угол поляризации излучения  $\varphi_{0g}=0.409715696^\circ$  из [9]. С другой стороны, параметры  $z_{vn}$ ,  $n_{vn}$  определяют барионные плотности Вселенной  $\Omega_{b1}$  (основное состояние материи),  $\Omega_{b2}$  (дырочное состояние материи) выражениями

$$\Omega_{b1}=(0.5-z_{vn})n_{vn}; \quad \Omega_{b2}=(0.5+z_{vn})n_{vn}; \quad \Omega_{b1}+\Omega_{b2}=n_{vn}. \quad (5)$$

Численные значения равны:  $\Omega_{b1}=0.022299491$ ,  $\Omega_{b2}=0.023708563$ . При этом  $\Omega_{b1}<\Omega_{b2}$ , что подтверждает наличие двух состояний барионной материи из-за наличия антинейтринного поля Хиггса  $z_{vn}=0.015313329$ .

Основные уравнения связей импульса глюона  $P_g$  с энергиями покоя  $E_{Au}$ ,  $E_{Ad}$ ,  $E_{As}$  для  $u, d, s$ -кварков имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0g}=n_g P_g=n_{Au} E_{Au}=n_{Ad} E_{Ad}=n_{As} E_{As}; \quad 2\Delta_\mu=n_{A0} E_{ex}; \\ 2P_g=n_{A0}^* E_{ex}; \quad E_{ex}=E_e+E'_h; \quad n_{A0}^*=n_{A0}+1+2(S_{2u}+\xi_{gs}). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь энергия покоя электрона  $E_e=0.51099907$  МэВ, электронная дырка  $E'_h=0.496945898$  МэВ, энергия пары электрон-дырка  $E_{ex}=1.007944968$  МэВ, число квантов черной дыры  $n_{A0}=58.04663887$ , параметр  $S_{2u}=0.033051284$  [5]. На основе (6) находим эффективное число квантов  $n_{A0}^*=59.11392178$ , импульс глюона  $P_g=29.79188196$  МэВ, энергетическую щель  $\Delta_\mu=29.25390878$  МэВ, энергию  $\varepsilon_{0g}=238.3350557$  МэВ. Числа квантов  $n_{Au}$ ,  $n_{Ad}$ ,  $n_{As}$  независимо можно определить по формулам

$$\begin{aligned} n_{Au}=n_{A0}+0.5-0.5n_{vn}-\langle\mu_2\rangle/\mu_N; \quad n_{Ad}=n_{Au} \psi_{Ad}; \quad n_{As}=n_{Au} \psi_{As}; \\ \langle\mu_2\rangle/\mu_N=1.5+\Omega'_{c1}+n'_{F\tau}; \quad \langle\mu_1\rangle/\mu_N=1.5+\Omega'_{c1}; \quad E_{0g}=E_{pp}(\langle\mu_2\rangle/\mu_N-1.5)^2; \\ \psi_{Ad}=0.5+n_{vn}+S_{12u}; \quad 0.5\psi_{As}=(\Omega_{\tau L}-\Omega_{\tau L}^*)+S_{12u}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь магнитные моменты ядер  $\langle\mu_2\rangle/\mu_N=1.777083623$ ,  $\langle\mu_1\rangle/\mu_N=1.728071512$  определяются через известные параметры  $\Omega'_{c1}=0.228071512$  и  $n'_{F\tau}=0.049012111$  из [5, 6, 11]. Магнитные моменты ядер  $\langle\mu_2\rangle/\mu_N$ ,  $\langle\mu_1\rangle/\mu_N$  практически совпадают с магнитными моментами ядер для изотопов  $^{188}\text{Re}$ ,  $^{186}\text{Re}$  из [17]. Энергия  $E_{pp}=13.02839058$  ТэВ близка к энергии 13 ТэВ, вблизи которой на БАКе [1] экспериментально при столкновении протонов наблюдается процесс распада бозона Хиггса на лептонную пару (типа электрон-дырка) и фотон. Параметры  $\psi_{Ad}=0.559698345$ ,  $\psi_{As}=0.027951474$ . Из (7) находим числа квантов  $n_{Au}=56.74655122$ ,  $n_{Ad}=31.76095080$ ,  $n_{As}=1.586149751$ .

Возможен процесс распада бозона Хиггса на лептонную пару типа мюон-мюонная дырка с излучением фотона. Энергию мюона  $E_{\mu p}$  с учетом вклада от глюонного импульса  $P_g$  находим из выражений

$$\begin{aligned} E_{\mu p}=(E_\mu^2+4P_g^2)^{1/2}=E_{gA} \sin^2(\varphi'_\mu); \quad \varphi'_\mu-(\varphi_{\mu g}+\varphi_{eg})=(n_{A0}^*+0.5)\varphi_{E0}^*; \\ E_e=E_{gA} \sin^2(\varphi_{eg}); \quad E_\mu=E_{gA} \sin^2(\varphi_{\mu g}); \quad E_\tau=E_{gA} \sin^2(\varphi_{\tau g}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь углы  $\varphi_{eg} = \varphi_{0g}$ ,  $\varphi_{\mu g} = 5.901862921^\circ$ ,  $\varphi_{\tau g} = 24.94112323^\circ$ , энергии покоя  $E_\mu = 105.658389 \text{ МэВ}$ ,  $E_\tau = 1777.00 \text{ МэВ}$  для  $\mu, \tau$ -лептонов, соответственно, энергия  $E_{gA} = 9.993268924 \text{ ГэВ}$  из [9]. Из выражений (8) находим энергию  $E_{\mu p} = 121.3009484 \text{ МэВ}$  и угол  $\varphi'_\mu = 6.325334208^\circ$ . Выражения (8) позволяют оценить угол  $\varphi_{E0}^* = 0.8306806''$ . Значение этого угла практически совпадает со значением угла отклонения  $0.83''$  фотонов вблизи сверхмассивных тел в теории Эйнштейна [18]. Это подтверждает возможность распада бозона Хиггса на мюонную пару и фотон, наличие характерного угла  $\varphi'_\mu$  для такой пары.

Дополнительно к числам квантов  $n_{Au}$ ,  $n_{Ad}$ ,  $n_{As}$  вводим числа квантов  $n_{Au}^*$ ,  $n_{Ad}^*$ ,  $n_{As}^*$ , которые связаны с числом кварков  $n_Q = 6$  и числом глюонов  $n_g = 8$  соотношениями

$$\begin{aligned} n_{Au}^* &= n_Q n_{Au} / n_g; \quad n_{Ad}^* = n_Q n_{Ad} / n_g; \quad n_{As}^* = n_Q n_{As} / n_g = 1 + \chi_{As}; \\ n_Q / n_g &= z'_\mu (z'_\mu + 1) - n_{A0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь космологическое красное смещение  $z'_\mu = 7.18418108$  [11]. Из (9) находим эффективные числа квантов  $n_{Au}^* = 42.55991342$ ,  $n_{Ad}^* = 23.8207131$ ,  $n_{As}^* = 1.189612313$  и восприимчивость  $\chi_{As} = 0.189612313$ . Знание восприимчивости  $\chi_{As}$  дает возможность определить энергетические щели  $\Delta_{As}$  и  $\Delta_{As}^*$ , эффективные температуры  $T_{As}$  и  $T_{As}^*$  по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_{As} &= \chi_{As} \varepsilon_{HG}; \quad n_{ra} \Delta_{As}^* = \chi_{As} (E_n - (E_p + E_e)); \quad \Delta_{As}^* = \chi_{As}^* \varepsilon_{HG}; \\ \chi_{As}^* &= \chi_{As} \psi_{vn}; \quad \psi_{vn} = 1 + z_{vn}; \quad T_{As} = a_T \Delta_{As}; \quad T_{As}^* = a_T \Delta_{As}^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь параметры  $n_{ra} = 2.785248449 \cdot 10^7$ ,  $\psi_{vn} = 1.015313329$  [9]; энергии покоя нейтрино  $\varepsilon_{HG} = 280.0460475 \text{ мэВ}$ , нейтрона  $E_n = 946.7027435 \text{ МэВ}$ , протона  $E_p = 938.2723226 \text{ МэВ}$ . По формулам (10) находим энергетические щели (энергии колебательных мод)  $\Delta_{As} = 53.10017881 \text{ мэВ}$ ,  $\Delta_{As}^* = 53.91331932 \text{ мэВ}$  и эффективные температуры  $T_{As} = 308.1285716 \text{ К}$ ,  $T_{As}^* = 312.8470457 \text{ К}$ . Увеличение эффективной температуры с  $T_{As}$  до  $T_{As}^*$  связано с вкладом антинейтринного поля Хиггса  $z_{vn}$  в барионные плотности материи  $\Omega_{b1}$ ,  $\Omega_{b2}$  из (5). Изменение состояния антинейтринного поля Хиггса  $z_{vn}$  будет приводить к изменениям эффективных температур.

Отметим, что гравитационный радиус  $R_{As}$  связан с характерными длинами волн  $\lambda_{b1}$ ,  $\lambda_{b2}$ ,  $\lambda_{vn}$  для барионной плотности материи. С другой стороны,  $R_{As}$  определяет длины волн  $\lambda_{1ex}$ ,  $\lambda_{2ex}$  первого, второго эмиттеров одиночных фотонов и связан с длиной волны активной наночастицы  $2\lambda_{gAu}$  выражениями

$$\begin{aligned} \lambda_{b1} &= \Omega_{b1} R_{As}; \quad \lambda_{b2} = \Omega_{b2} R_{As}; \quad \lambda_{vn} = n_{vn} R_{As}; \\ \lambda_{1ex} &= 0.5 n_g R_{As} - 2\lambda_{b1}; \quad \lambda_{1ex} - \lambda_{2ex} = 2\lambda_{gAu}. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (3)–(5) из (11) находим длины волн  $\lambda_{b1}=3.219497025\text{ нм}$ ,  $\lambda_{b2}=3.422932302\text{ нм}$ ,  $\lambda_{\nu n}=6.642429327\text{ нм}$ ,  $\lambda_{1ex}=571.0624432\text{ нм}$ ,  $\lambda_{2ex}=569.0446912\text{ нм}$ . Экспериментальные наблюдения одиночных фотонов на таких длинах волн подтверждают наличие таких активных наночастиц [5, 6].

В рамках нашей анизотропной модели [11] были получены радиусы Шварцшильда для эффективного атома  $R_H=21.84067257\text{ мкм}$  и бозона Хиггса  $R_{H0}=120.1356321\text{ мкм}$ . Это также указывает на возможность появления агрегатов из активных наночастиц на основе эффективного атома и бозона Хиггса. При этом возникает задача описания активных колебательных мод с учетом особенностей поведения возникающего квантового механического осциллятора из-за дополнительного вклада от барионной плотности материи.

**Модель квантового механического осциллятора с учетом вклада от барионной плотности материи.** В [5, 9, 19] для оценки масс сверхмассивных черных дыр получены основные соотношения для энергий

$$E_{H0}/E_G = \nu_{H0}^*/\nu_{G0} = N_{HG}; \quad E_G/\nu_{G0} = E_{H0}/\nu_{H0}^* = 2\pi\hbar;$$

$$E_{H0}/E_{0A} = N_{0n}; \quad E_{H0}/\varepsilon_{0n} = N_{0n}^*; \quad N_{0n}^* = (1 + n'_{zg})N_{0n}. \quad (12)$$

Здесь  $\hbar$  – постоянная Планка, энергии покоя гравитона  $E_G=12.11753067\text{ мкэВ}$ , бозона Хиггса  $E_{H0}=125.03238\text{ ГэВ}$ , основные параметры  $N_{ra}=1041.293475$ ,  $N_{0A}=3.557716045 \cdot 10^5$ . Из (12) следует возможность описания частот активных колебательных мод на основе частот гравитона  $\nu_{G0}$  и бозона Хиггса  $\nu_{H0}^*$ . С учетом (12) определены параметры  $N_{HG}=1.031830522 \cdot 10^{16}$ ,  $N_{0n}=2.900261036 \cdot 10^{10}$ ,  $N_{0n}^*=3.231810284 \cdot 10^{10}$ , энергия  $\varepsilon_{0n}=3.86880321\text{ эВ}$ . Параметр  $N_{HG}$  является функцией от основных параметров  $N_{ra}$ ,  $N_{0A}$ ,  $N_{0n}$  вида

$$N_{HG} = N_{ra}N_{cv} = N_{0A}N_{0n} = N_{D\nu}n_{ra} = N_{ra}N_{0A}n_{ra};$$

$$N_{cv} = N_{0A}n_{ra}; \quad N_{0n} = N_{ra}n_{ra}; \quad N_{D\nu} = N_{ra}N_{0A}, \quad (13)$$

где дополнительные параметры равны:  $n_{ra}=2.785248449 \cdot 10^7$ ,  $N_{D\nu}=3.704626502 \cdot 10^8$ ,  $N_{cv}=9.909123093 \cdot 10^{12}$ . Для объемных фрактальных структур Вселенной основные и дополнительные параметры из (13) могут быть операторами. В общем случае эти операторы не коммутируют [13–15], при описании легких и сверхмассивных черных дыр, возможно, появление стохастических свойств.

Частоту механического осциллятора  $\nu_{f0}$  определяем по формулам

$$\nu_{f0} = (1 + 2\chi_{gS})\nu_{G0}; \quad \chi_{gS} = |\xi_{0H}|^2 + \xi_{gS}; \quad S_{012} = n_g \xi_{gS}. \quad (14)$$

Здесь частота гравитона  $\nu_{G0}=2.9304515\text{ ГГц}$ , параметры  $|\xi_{0H}|^2 = \chi_{11} = 0.181800122$ ,  $S_{012}=0.005451282$ . Из (14) находим: восприимчивость  $\chi_{gS}=0.182481532$ ; частоту  $\nu_{f0}=3.999958058\text{ ГГц}$ ; основной параметр  $\xi_{gS}=0.00068141$ , который связан с числом глюонов  $n_g=8$ .

Вблизи сверхмассивных черных дыр для параметра  $S_{012}$  и числа квантов  $n_{\nu n}$  допустимы представления

$$S_{012} = (\bar{n}_{AB} + \Omega_m^*) \xi_{mS}^* = n_g \xi_{gS}; \quad n_{\nu n} = \Omega_{b1S}^* + \Omega_{b2S}^* = \Omega_{b1} + \Omega_{b2};$$

$$\Omega_{b1S}^* = \Omega_{b1} + \xi_{mS}^*; \quad \Omega_{b2S}^* = \Omega_{b2} - \xi_{mS}^*; \quad \xi_{gS} = E_{\alpha S} / E_{0g}. \quad (15)$$

Здесь показатель преломления среды  $\bar{n}_{AB}=11.06252927$ , плотность материи  $\Omega_m^*=0.141730642$  вблизи сверхмассивных черных дыр из [9, 19]. На основе (15) находим параметр  $\xi_{mS}^*=0.000486537$  и смещенные значения барионных плотностей  $\Omega_{b1S}^*=0.022786028$ ,  $\Omega_{b2S}^*=0.023222026$ . Далее находим средние значения числа фононов в резонаторе  $N'_{f2}$  (основное состояние),  $N_{f2}$  (возбужденное состояние) по формулам

$$N'_{f2} = \langle \hat{N}'_{f2} \rangle = \langle \hat{c}_{f2}^+ \hat{c}_{f2} \rangle = \bar{N}_{b2S} + 2\Omega_m^*; \quad N_{f2} = \langle \hat{N}_{f2} \rangle = \langle \hat{c}_{f2} \hat{c}_{f2}^+ \rangle;$$

$$\bar{N}_{b2S} = n'_G + N_{b2S}^*; \quad \Omega_{b2S}^* N_{b2S}^* = 0.5n_{A0} + n_g; \quad N_{f2} - N'_{f2} = 1. \quad (16)$$

На основе (16) находим численные значения характерных параметров  $N_{b2S}^*=1594.319093$ ,  $\bar{N}_{b2S}=1596.319093$  и средние значения числа фононов в резонаторе  $N'_{f2}=1596.602554$ ,  $N_{f2}=1597.602554$ .

Далее на основе (14) вводим частоты  $\nu_{f2}$ ,  $\nu'_{f2}$ ,  $\nu'_{f0}$ ,  $\nu_{\chi G}$  соотношениями

$$\nu_{f2} = N_{f2} \nu_{G0}; \quad \nu'_{f2} = N'_{f2} \nu_{G0}; \quad \nu'_{f0} = 2\nu_{\chi G}; \quad \nu_{\chi G} = \chi_{gS} \nu_{G0}. \quad (17)$$

Из (17) получим численные значения  $\nu_{f2}=4.681696801$  ТГц,  $\nu'_{f2}=4.678766349$  ТГц,  $\nu'_{f0}=1.069506558$  ГГц,  $\nu_{\chi G}=534.7532792$  МГц. В общем случае, связи между частотами из (17) допускают представления через основную частоту гравитона  $\nu_{G0}$ , числа квантов гравитационного поля  $n'_G$  (основное состояние),  $n_G$  (возбужденное состояние) и число кварков  $n_Q$  в виде

$$\nu_{f2} - \nu'_{f2} = \nu_{f0} - \nu'_{f0} = \nu_{G0}; \quad \nu'_{f0} / \nu_{\chi G} = n'_G = \langle \hat{c}_G^+ \hat{c}_G \rangle = 2;$$

$$n_G = \langle \hat{c}_G \hat{c}_G^+ \rangle = 3; \quad n_Q = 2n_G = n_g(z'_\mu(z'_\mu + 1) - n_{A0}); \quad n_G - n'_G = 1. \quad (18)$$

Основной параметр  $\bar{n}_{f\nu}$  определяет процессы рассеяния числа фотонов  $N_{f1}, N'_{f1}$  на фонах  $N_{f2}, N'_{f2}$ . В нашей модели этот параметр можно найти на основе  $n'_G$  и  $\Omega_{b2S}^*$  по формулам

$$n'_G = \bar{n}_{f\nu} + \Omega_{b2S}^*; \quad \bar{n}_{f\nu} = N_{f1} / N_{f2} = N'_{f1} / N'_{f2}; \quad N_{f1} - N'_{f1} = \bar{n}_{f\nu}. \quad (19)$$

Из (19) получим численные значения  $\bar{n}_{f\nu}=1.976777974$ ,  $N_{f1}=3158.105541$ ,  $N'_{f1}=3156.128763$ . На основе (17) и (19) находим частоты фотонов  $\nu_{f1}$ ,  $\nu'_{f1}$  и частоту  $\bar{\nu}_{fG}$  по формулам

$$\nu_{f1} = N_{f1} \nu_{G0}; \quad \nu'_{f1} = N'_{f1} \nu_{G0}; \quad \bar{\nu}_{fG} = \bar{n}_{f\nu} \nu_{G0}; \quad \nu_{f1} - \nu'_{f1} = \bar{\nu}_{fG}. \quad (20)$$

Численные значения равны:  $\nu_{f1}=9.25467512$  ТГц,  $\nu'_{f1}=9.248882268$  ТГц,  $\bar{\nu}_{fG}=5.792851979$  ТГц. Соответствующие энергии для фотонов имеют вид  $\varepsilon_{f1}=N_{f1}E_G=38.268441$  мэВ,  $\varepsilon'_{f1}=N'_{f1}E_G=38.244487$  мэВ,  $\bar{\varepsilon}_{fG}=\bar{n}_{f\nu}E_G=23.953668$  мкэВ. Выполняется соотношение  $\varepsilon_{f1}-\varepsilon'_{f1}=\bar{\varepsilon}_{fG}$ . Энергии для фононов равны  $\varepsilon_{f2}=N_{f2}E_G=19.35899795$  мэВ,  $\varepsilon'_{f2}=N'_{f2}E_G=19.34688042$  мэВ. Выполняется соотношение  $\varepsilon_{f2}-\varepsilon'_{f2}=E_G$ .

**Эффективные углы Кабибо и колебательные моды.** Экспериментальные исследования на БАКе [1–3] указывают на то, что появление различных составных частиц типа агрегатов при столкновении протонов высокой энергии может быть связано с тяжелыми  $c, b, t$ -кварками. При этом возможно появление частиц типа тетракварков (например, на основе двух  $c$ -кварков и двух  $c$ -антикварков [3, 9, 19]), тяжелых бозонов Хиггса [1–3, 24]. Наша модель на основе выражений (1), (2) позволяет установить связи энергий покоя легких  $u, d, s$ -кварков с тяжелым  $c$ -кварком типа

$$E_{Au} = \xi_{Au} E_{Qc}; \quad E_{Ad} = \xi_{Ad} E_{Qc}; \quad E_{As} = \xi_{As} E_{Qc}; \quad E_{Qc} = n_Q E_c. \quad (21)$$

Численные значения параметров  $\xi_{Au}=0.000679516$ ,  $\xi_{Ad}=0.001214076$ ,  $\xi_{As}=0.024310563$  и энергии  $E_{Qc}=6.180857424$  ГэВ. Далее на основе выражений (6), (7) находим связи энергий  $\varepsilon_{0g}$ ,  $P_g$  с энергией покоя  $E_c$   $c$ -кварка по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0g} &= \xi_{0g} E_{Qc} = E_c \sin^2(\theta_{Wc}); \quad P_g = \xi_{gc} E_c; \quad n_g \xi_{gc} = n_Q \xi_{0g}; \\ \xi_{0g} &= n_{Au} \xi_{Au} + n_{Ad} \xi_{Ad} + n_{As} \xi_{As}; \quad \sin^2(\theta_{Wc}) = (1 - \sin 2\varphi_c) / 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Численные значения параметров  $\xi_{0g}=0.038560193$ ,  $\xi_{gc}=0.028920145$  и  $\sin^2(\theta_{Wc})=0.231361158$ . Здесь угол  $\theta_{Wc}=28.75074471^\circ$  выполняет роль эффективного угла Кабибо для  $c$ -кварка. Угол  $2\varphi_c=32.49851058^\circ$  можно определять по положению пика в рентгеновском структурном спектре. Отметим, что из выражений (22) следует зависимость угла Кабибо  $\theta_{Wc}$  от параметров легких  $u, d, s$ -кварков.

В теории электрослабых взаимодействий [16] для угла Кабибо  $\theta_W$  получено численное значение  $\sin^2 \theta_W = 0.2312 \pm 0.003$ . В нашей модели на основе выражений (2), (5) для барионных плотностей можно оценить параметр  $u_W$  и определить угол  $\theta_W$

$$\sin^2 \theta_W = \text{th}^2 u_W; \quad 2u_W = 1 + n_{\nu n} + \Omega_{\tau L}^* = 1 + n_{\nu n}(n_{\nu n} + 1). \quad (23)$$

Из (23) находим численное значение  $\sin^2 \theta_W = 0.231196808$ . Функция  $y_W$  позволяет оценить погрешности измерений  $\delta y_W$ ,  $\delta \theta_W$  по формулам

$$\begin{aligned} y_W &= \sin^2 \theta_W \pm \delta y_W = \sin \theta_W (\sin \theta_W \pm \sin \varphi_{0g} \cos \theta_W); \\ \delta y_W &= \delta \theta_W \sin(2\theta_W); \quad \delta \theta_W = 0.5 \sin \varphi_{0g}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) следует, что численные значения погрешностей  $\delta y_W = 0.003014774$ ,  $\delta \theta_W = 0.003575415$  связаны с двойным углом Кабибо  $2\theta_W$ , углом поляризации

излучения  $\varphi_{0g}$ , соответственно. Полученные значения угла Кабибо  $\theta_W$ , погрешности измерения  $\delta y_W$  в нашей модели согласуются с моделью С. Вайнберга [16].

В работах [9, 19] при описании сверхмассивных черных дыр был введен эффективный угол Кабибо  $\theta_W^*$ . При этом вблизи верхней границы массы черной дыры для максимальной интенсивности излучения  $I_m$  было использовано представление

$$\begin{aligned} I_m &= I_1^* + I_2^*; \quad I_1^* = n'_{zg} I_m = v_{1J}^2 I_m \sin^2(\theta_W^*); \quad I_2^* = n_{zg} I_m = (u_{1J}^2 + v_{1J}^2 \cos^2(\theta_W^*)) I_m; \\ v_{1J}^2 &= k_{1J}^2 = 0.5(1 - I(0)/I_m); \quad u_{1J}^2 = (k'_{1J})^2 = 0.5(1 + I(0)/I_m); \quad u_{1J}^2 + v_{1J}^2 = 1; \\ I_1^*/I_m &= k_{1J}^2 \operatorname{sn}^2(u_{1W}; k_{1J}) = n'_{zg}; \quad I_2^*/I_m = \operatorname{dn}^2(u_{1W}; k_{1J}) = n_{zg}; \quad n'_{zg} + n_{zg} = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $k_{1J}$ ,  $k'_{1J}$  и  $u_{1W}$  – модули и эффективное смещение для эллиптических функций  $\operatorname{sn}(u_{1W}; k_{1J})$ ,  $\operatorname{cn}(u_{1W}; k_{1J})$ ,  $\operatorname{dn}(u_{1W}; k_{1J})$ ; параметры  $u_{1J}$ ,  $v_{1J}$  зависят от начальной и максимальной интенсивности излучения и являются аналогами параметров преобразования Н.Н. Боголюбова в теории сверхпроводимости. Численные значения равны:

$n'_{zg} = 0.114317037$ ,  $I_m/I(0) = 81.06580421$ ,  $k_{1J}^2 = 0.493832171$ ,  $(k'_{1J})^2 = 0.506167829$ ,  $\sin^2(\theta_W^*) = 0.231489651$ ,  $\cos^2(\theta_W^*) = 0.768510349$ , функции плотности распределения интенсивностей  $f_{J1} = I_1^*/I_2^* = 0.129072187$ ,  $f'_{J1} = I_m/I_2^* = 1.129072187$ . Из (25) находим основное уравнение для угла Кабибо  $\theta_W^*$ , которое описывает зависимость от начальной интенсивности  $I(0)$  черной дыры

$$\sin^2(\theta_W^*) = \operatorname{sn}^2(u_{1W}; k_{1J}) = n'_{zg} / k_{1J}^2 = 2n'_{zg} / (1 - I(0)/I_m). \quad (26)$$

Для полученных углов Кабибо  $\theta_W^*$ ,  $\theta_{Wc}$ ,  $\theta_W$  можно записать уравнения связей

$$\sin^2 \theta_W^* = \psi_{Wc} \sin^2 \theta_{Wc} = \psi_W^* \sin^2 \theta_W; \quad \psi_W^* = \psi_{Wc} \psi_W. \quad (27)$$

Численные значения параметров равны:  $\psi_W = 1.000710866$ ,  $\psi_{Wc} = 1.000555378$ ,  $\psi_W^* = 1.001266639$ . На основе соотношений (22), (26), (27) находим связи

$$\begin{aligned} k_{Wc}^2 &= k_{1J}^2 \psi_{Wc} = n'_{zg} / (\xi_{0g} n_Q) = n'_{zg} / (\xi_{gc} n_g) = \varepsilon_{Wc} / P_g; \\ k_{1J}^2 \operatorname{sn}^2(u_{1W}; k_{1J}) &= k_{Wc}^2 \operatorname{sn}^2(u_{Wc}; k_{Wc}); \quad \operatorname{dn}^2(u_{1W}; k_{1J}) = \operatorname{dn}^2(u_{Wc}; k_{Wc}). \end{aligned} \quad (28)$$

Численные значения  $k_{Wc}^2 = 0.494106435$ ,  $\varepsilon_{Wc} = 14.72036059$  МэВ. На основе (27), (28) находим параметр сдвига  $\xi_{Wc}^2$ , который дает возможность далее определить основные эффективные восприимчивости  $\chi_{ch1}$ ,  $\chi_{ch2}$  по формулам

$$\begin{aligned} \xi_{Wc}^2 &= \sin^2 \theta_W^* - \sin^2 \theta_{Wc} = (\psi_{Wc} - 1) \sin^2 \theta_{Wc}; \quad \chi'_{ch1} = \psi_{vn} \chi_{ch1}; \\ S'_{02} &= \chi_{ch1}(\chi_{11} - \xi_{Wc}^2) = \chi_{ch2}(\chi_{22} - \xi_{Wc}^2); \quad \chi'_{ch2} = \psi_{vn} \chi_{ch2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $\chi_{11}$ ,  $\chi_{22} = 0.181502111$  – диагональные компоненты тензора восприимчивости  $\hat{\chi}_{ef}$  из нашей анизотропной модели [11],  $S'_{02} = 0.03409$  – спектральный параметр [5, 6].

Из (29) находим  $\xi_{wc}^2 = 0.000128493$ . Значения  $\chi_{ch1} = 0.18764625$ ,  $\chi_{ch2} = 0.187651589$  близки к расчетному значению  $\psi_{ch-1} = 0.187513626$  из нашей модели [11] и экспериментальному значению 0.188 [20], которые регистрируются детектором гравитационных волн от источника при слиянии бинарных нейтронных звезд. Перенормировка на основе параметра  $\psi_{vn}$  из (10) приводит к эффективным восприимчивостям  $\chi'_{ch1} = 0.190519739$ ,  $\chi'_{ch2} = 0.190525159$ . Это дает возможность по аналогии с (10) выполнить оценки энергетических щелей  $\Delta_{ch1}$ ,  $\Delta_{ch2}$ , эффективных температур  $T_{ch1}$ ,  $T_{ch2}$  для основных состояний колебательных мод активных объектов по формулам

$$\Delta_{ch1} = N_{vG} \varepsilon_{ch1} = \chi'_{ch1} \varepsilon_{HG}; \quad \Delta_{ch2} = N_{vG} \varepsilon_{ch2} = \chi'_{ch2} \varepsilon_{HG}; \quad N_{vG} = \varepsilon_{HG} / E_G;$$

$$T_{ch1} = a_T \Delta_{ch1} = N_{vG} T_{vG1}; \quad T_{ch2} = a_T \Delta_{ch2} = N_{vG} T_{vG2}; \quad T_{vG1} = a_T \varepsilon_{ch1}; \quad T_{vG2} = a_T \varepsilon_{ch2}. \quad (30)$$

На основе (30) находим значения энергетических щелей  $\Delta_{ch1} = 53.35429992$  мэВ,  $\Delta_{ch2} = 53.35581777$  мэВ, эффективных температур  $T_{ch1} = 309.60318$  К,  $T_{ch2} = 309.6119878$  К. Параметр  $N_{vG} = 2.311081813 \cdot 10^4$  позволяет определить энергии  $\varepsilon_{ch1} = 2.308628781$  мкэВ,  $\varepsilon_{ch2} = 2.308694458$  мкэВ и эффективные температуры  $T_{vG1} = 13.39646127$  мК,  $T_{vG2} = 13.39684237$  мК. Эти температуры  $T_{vG1}$ ,  $T_{vG2}$  связаны с дипольной анизотропией реликтового излучения  $\delta T_{r1}$ ,  $\delta T_{r2}$  соотношениями

$$\delta T_{r1} = 0.5(1 + n_Q \xi_{wc}^2) T_{vG1}; \quad \delta T_{r2} = 0.5(1 + n_Q \xi_{wc}^2) T_{vG2}; \quad T_{HG} = a_T \varepsilon_{HG}; \quad T_G = a_T E_G. \quad (31)$$

Численные значения температур  $\delta T_{r1} = 6.70339469$  мК,  $\delta T_{r2} = 6.703585387$  мК и  $\delta T_{r0} = 0.5(\delta T_{r1} + \delta T_{r2}) = 6.703490039$  мК практически совпадают с нашей оценкой  $\delta T_r = 6.703518107$  мК из [5, 6]. Температура  $0.5 T_{HG} = 812.5225801$  К определяет верхнюю границу для интервала температур стабильной квантовой эмиссии фотонов из активных объектов. На основе температуры  $T_G = 70.31534544$  мК и выражений

$$T'_{f2} / N'_{f2} = T_{f2} / N_{f2} = T'_{f1} / N'_{f1} = T_{f1} / N_{f1} = T_G \quad (32)$$

находим эффективные температуры  $T_{f2} = 112.3359755$  К,  $T'_{f2} = 112.2656601$  К для активных фононных мод в резонаторе из нашей модели квантового механического осциллятора (18). Процесс рассеяния фотонов на фонах сопровождается появлением активных фотонных мод (19), (20) с эффективными температурами  $T_{f1} = 222.0632821$  К,  $T'_{f1} = 221.9242842$  К. С учетом параметра  $N_{vG}$  по формулам

$$\Delta_{ch1} / E_G = N'_{ch1} = \psi_{vn} N_{ch1}; \quad N_{ch1} = \chi_{ch1} N_{vG} = T'_{ch1} / T_G; \quad T_{ch1} = \psi_{vn} T'_{ch1};$$

$$\Delta_{ch2} / E_G = N'_{ch2} = \psi_{vn} N_{ch2}; \quad N_{ch2} = \chi_{ch2} N_{vG} = T'_{ch2} / T_G; \quad T_{ch2} = \psi_{vn} T'_{ch2} \quad (33)$$

находим числа заполнения  $N_{ch1} = 4336.658357$ ,  $N_{ch2} = 4336.781745$  и эффективные температуры  $T'_{ch1} = 304.9336304$  К,  $T'_{ch2} = 304.9423065$  К. Процесс перенормировки за счет параметра  $\psi_{vn}$  приводит к увеличению чисел заполнения  $N'_{ch1} = 4403.067033$ ,  $N'_{ch2} = 4403.192311$  и переходу к температурам  $T_{ch1}$ ,  $T_{ch2}$ . Наличие активных колебательных фононных и фотонных мод с различными числами заполнения

указывают на то, что активные объекты могут иметь различные структуры типа агрегатов (например, совокупность из отдельных наночастиц).

**Тяжелые кварки и бозон Хиггса.** При исследовании частиц типа тетракварков в [3, 9, 19] были получены характерные энергии  $E_{TQ} = 2(E_c + \bar{E}_c) = 6899.681571 \text{ МэВ}$  и  $E'_{TQ} = 6446.812646 \text{ МэВ}$ , которым из эксперимента [3] соответствуют узкий пик и широкий пик со сложной структурой. Здесь энергия  $\bar{E}_c = 1.738111117 \text{ ГэВ}$   $s$ -антикварка. Эти дополнительные особенности поведения наблюдаются для функции распределения числа событий от энергии (массы) при исследовании процессов распада (образования)  $c$ -тетракварка в интервале энергий

$$\begin{aligned} E_{TQ}^* < E'_{TQ} < E_{1B} < E_{2B} < E_{1m} < E_{2m} < E_{3B} < E_{TQ}; \\ E_{TQ} - E'_{TQ} &= 2(E'_\mu + E_\mu); \quad E'_\mu - E_\mu = E_{A\mu}(|S'_{01}| + 0.5); \quad E'_\mu = E'_{0\mu} + E_{0\mu}; \\ E_{0\mu} &= 2E'_\mu / 3 = 2E'_{0\mu}; \quad E'_{TQ} - E_{TQ}^* = E'_\mu + E_\mu; \quad E_{1B} = E'_{TQ} + E_{0\mu}; \quad E_{3B} - E_{2B} = 2E_\mu; \\ E_{3B} &= E_{TQ} - E_{0\mu}; \quad E_{1m} = E'_{TQ} + 2E_{\pi 0}; \quad E_{2m} - E_{1m} = (E_{Ad} + E_{Au}) + E_{A\mu} S_{012}. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь энергии  $E_{\pi 0} = 134.9764 \text{ МэВ}$   $\pi 0$ -мезона,  $E'_\mu = 120.7760733 \text{ МэВ}$  антимюона. Энергиям  $E_{TQ}^* = 6220.378184 \text{ МэВ}$ ,  $E_{1B} = 6527.330028 \text{ МэВ}$ ,  $E_{2B} = 6607.84741 \text{ МэВ}$ ,  $E_{3B} = 6819.164189 \text{ МэВ}$  соответствуют дополнительные пики, которые допускают интерпретацию как энергии составных частиц типа адронов. Энергии  $E_{1m} = 6716.765446 \text{ МэВ}$ ,  $E_{2m} = 6728.623483 \text{ МэВ}$  соответствуют локальным минимумам, которые определяются вкладами от характерных энергий  $E_{A\mu} = 28.01951366 \text{ МэВ}$ ,  $E_{\pi 0}$  и  $E_{Ad}$ ,  $E_{Au}$  легких  $d, u$ -кварков. В нашей модели энергия антимюона  $E'_\mu$  определена выражениями из [9, 19]

$$\begin{aligned} E'_\mu &= E_{gA} \sin^2(\varphi_{\mu g} + \varphi_{eg}) = (E_\mu^2 + 4\Delta_\mu^2)^{1/2}; \quad 2\Delta_\mu = n_{A0} E_{ex}; \quad E_{ex} = E_e + E'_h; \\ E_{gA} &= 0.5 E_{H0} f_{gA}; \quad f_{gA} = n_g / (n_{A0} - n_g); \quad f'_{gA} - f_{gA} = 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что для парных мюонов,  $c$ -кварков характерно наличие асимметрии материи ( $E_\mu \neq E'_\mu$ ,  $E_c \neq \bar{E}_c$ ), что подтверждается экспериментальными исследованиями процессов распада бозона Хиггса на лептонную пару и фотон [1–3].

Энергия  $E'_{TQ}$  адрона связана с энергией поля Хиггса  $E_{GT} = 19.34043794 \text{ ГэВ}$ . Дополнительные вклады от этого поля приводят к появлению частиц с энергиями  $E_{HA} = 126.5193605 \text{ ГэВ}$ ,  $E'_{HA} = 123.527501 \text{ ГэВ}$  типа тяжелого, легкого бозонов Хиггса и определяются выражениями

$$E_{GT} = n_G E'_{TQ}; \quad E_{HA} = (E_{H0}^2 + E_{GT}^2)^{1/2}; \quad E'_{HA} = (E_{H0}^2 - E_{GT}^2)^{1/2}. \quad (36)$$

Рассмотрим другую природу энергии поля Хиггса  $E_{cg} = 8.241143232 \text{ ГэВ}$ , которая определена на основе энергии  $E_c$   $c$ -кварка и числа глюонов  $n_g = 8$ . Тогда вклады от этого поля приводят к появлению частиц с другими энергиями  $E_{HS} = 125.3036811 \text{ ГэВ}$ ,  $E'_{HS} = 124.760489 \text{ ГэВ}$  типа тяжелого, легкого бозонов Хиггса и определяются выражениями

$$E_{cg} = n_g E_c; \quad E_{HS} = (E_{H0}^2 + E_{cg}^2)^{1/2}; \quad E'_{HS} = (E_{H0}^2 - E_{cg}^2)^{1/2}. \quad (37)$$

Отметим, что значения энергий  $E_{HA}$  и  $E_{HS}$  для тяжелых бозонов Хиггса из нашей модели практически совпадают с энергиями 126.5 ГэВ и 125.3 ГэВ, которые были зафиксированы ATLAS детектором и SMS детектором на БАКе [21, 1].

При исследовании асимметрии антиматерии в протоне [2] была выделена энергия мюонной пары 4.5 ГэВ, которой из эксперимента соответствует максимум уширенного пика. В нашей модели на основе плотностей функций распределения Бозе типа  $f_{zg}$ ,  $f'_{zg}$  и энергии  $E_c$  с-кварка получены выражения для энергий  $E_{bc}$ ,  $E'_{bc}$  адронов

$$f_{zg} = 1 / (1 - n_{zg}); \quad f'_{zg} = n_{zg} / (1 - n_{zg}); \quad f_{zg} - f'_{zg} = 1;$$

$$E_{bc} = 0.5 E_c f_{zg}; \quad E'_{bc} = 0.5 E_c f'_{zg}; \quad E_{bc} - E'_{bc} = 0.5 E_c. \quad (38)$$

Значения энергий  $E_{bc} = 4.505640327$  ГэВ,  $E'_{bc} = 3.990568875$  ГэВ из (38) согласуются с данными из эксперимента [2] и определяют верхнюю, нижнюю границы из интервала возможных значений энергий для энергии покоя  $E_{b0} = 4.215361357$  ГэВ  $b0$ -кварка [22]. С другой стороны, для этих энергий допустимо представление на основе энергии  $E_{A\mu}$  из (34) в терминах чисел заполнения  $N_{A\mu}$ ,  $N'_{A\mu}$

$$E_{bc} = N_{A\mu} E_{A\mu}; \quad E'_{bc} = N'_{A\mu} E_{A\mu}; \quad N_{A\mu} - N'_{A\mu} = n_{A\mu}; \quad n_{A\mu} = E_c / 2 E_{A\mu}. \quad (39)$$

Из (39) находим численные значения  $N_{A\mu} = 160.8036593$ ,  $N'_{A\mu} = 142.4210614$ ,  $n_{A\mu} = 18.38259787$ . При исследовании процессов распада бозона Хиггса на БАКе [1, 3] используются столкновения протонов с высокой энергией 13 ТэВ. В нашей модели на основе энергии бозона Хиггса  $E_{H0}$  находим связи с энергией  $E_{pp}$  из (7) и характерными параметрами по формулам

$$E_{pp} = N_{pp} E_{H0} = n_g \varepsilon_{pp} = n_{pp} E_{0g}; \quad n_{pp} = n_{2\mu}^2; \quad E_{0\gamma} = \xi_{2\mu} \varepsilon_{pp};$$

$$n_{2\mu} = 1 / \xi_{2\mu}; \quad < \mu_2 > / \mu_N = 1.5 + \xi_{2\mu}; \quad N_{pp} = n_g n_{pp}. \quad (40)$$

Из (40) находим параметры  $N_{pp} = 104.2001326$ ,  $n_{pp} = 13.02501658$ ,  $n_{2\mu} = 3.609018784$ ,  $\xi_{2\mu} = 0.277083623$  и энергии  $\varepsilon_{pp} = 1.628548823$  ТэВ,  $E_{0\gamma} = 451.244208$  ГэВ. Далее на основе энергии  $E_{0\gamma}$  из (40) можно получить характерные энергии  $E_{H\gamma} = 801.898692$  ГэВ,  $E'_{H\gamma} = 676.866312$  ГэВ для потоков протонов высоких энергий в отдельных трубках (каналах) [2] по формулам

$$E_{H\gamma} = < \mu_2 > E_{0\gamma} / \mu_N; \quad E'_{H\gamma} = 1.5 E_{0\gamma}; \quad E_{H\gamma} - E'_{H\gamma} = E_{H0}. \quad (41)$$

Это дает возможность далее определить вклады тяжелых  $b$ ,  $t$ -кварков в энергии тяжелых бозонов Хиггса.

Далее с учетом (2), (7) находим энергии  $E_{2r} = 97.16061484$  ГэВ,  $E_{1r} = 91.03251396$  ГэВ по формулам

$$E_{2r} = (\Omega'_{c1} + n_{\tau L} + 0.5) E_{H0}; \quad E_{1r} = (\Omega'_{c1} + 0.5) E_{H0}; \quad E_{2r} - E_{1r} = P_{0L};$$

$$P_{0L} = n_{\tau L} E_{H0}; \quad P_{0L}^2 / E_{H0}^2 = \Omega_{\tau L} = \Omega_{\mu e} + \Omega_{HL} = \Omega_{\mu\mu} + \Omega'_{NL} = \Omega_{\mu\tau} + \Omega'_{HL}. \quad (42)$$

Здесь энергия  $P_{0L}=6.128100887\text{ГэВ}$  определена на основе энергии бозона Хиггса  $E_{H0}$  и квантового числа  $n_{\tau L}$  из (4). Отметим, что из (42) следует связь этой энергии с лептонным квантовым числом  $\Omega_{\tau L}$  и параметрами  $\Omega_{\mu e}$ ,  $\Omega_{\mu\mu}$ ,  $\Omega_{\mu\tau}$  для аномальных вкладов в магнитные моменты для  $e, \mu, \tau$ -лептонов, соответственно [6, 19].

На основе  $\Omega_{\tau L}$  вводим плотности функций распределения  $f_{\tau L}$ ,  $f'_{\tau L}$  Ферми типа и находим энергии  $E_{t0}=180.0079893\text{ГэВ}$ ,  $E'_{t0}=432.4128524\text{МэВ}$  по формулам

$$f_{\tau L}=1/(1+\Omega_{\tau L})=E_{W0}/(E_{W0}+\Omega_{\tau L}^*E_{Z0}); \quad f_{\tau L}+f'_{\tau L}=1; \\ E_{t0}=f_{\tau L}E_{sr}; \quad E'_{t0}=f'_{\tau L}E_{sr}; \quad E_{t0}+E'_{t0}=E_{sr}. \quad (43)$$

Для энергий  $E_{sr}=180.4404021\text{ГэВ}$ ,  $E_{t0}$  допустимы связи с энергией  $E_{H0}$  в терминах чисел квантов  $n_{sr}$ ,  $n_{t0}$  в виде

$$E_{sr}=n_{sr}E_{H0}; \quad E_{t0}=n_{t0}E_{H0}; \quad n_{0\nu}=n_{A0}-N_{h2}; \\ n_{sr}=(\langle\mu_2\rangle-\mu_N)n_{0\nu}/\mu_N; \quad n_{t0}=1+2\alpha_{t0}=n_{sr}f_{\tau L}, \quad (44)$$

где параметры  $N_{h2}=56.18950363$ ,  $n_{0\nu}$  из [8]. Численные значения  $n_{sr}=1.443149383$ ,  $n_{t0}=1.439690977$ . Отметим, что в нашей модели параметр  $\alpha_{t0}=0.219845489$  практически совпадает с основным параметром  $\alpha_s=0.22$ , который используется в квантовой хромодинамике (QCD) [23]. Энергия  $E_{t0}$  допускает интерпретацию как энергии покоя тяжелого  $t$ -кварка. Эта энергия связана с энергией поля Хиггса  $E_{d0}=85.59270888\text{ГэВ}$  выражениями

$$E_{d0}=0.5(1-n_{\tau L})E_{t0}; \quad E_{H1}=(E_{H0}^2+E_{d0}^2)^{1/2}; \quad E_{H2}=(E_{H0}^2-E_{d0}^2)^{1/2}. \quad (45)$$

Из (45) следует, что дополнительные вклады от этого поля Хиггса приводят к появлению частиц с энергиями  $E_{H1}=151.5229615\text{ГэВ}$ ,  $E_{H2}=91.1426587\text{ГэВ}$  типа тяжелого, легкого бозонов Хиггса. Эти значения согласуются с экспериментальными данными  $151.5\text{ГэВ}$  для тяжелого бозона Хиггса [24].

**Выводы.** Для описания основных характеристик активных наночастиц предложена кварк-глюонная модель. Показано, что длины волн активных наночастиц могут определяться гравитационными радиусами Шварцшильда легких  $u, d, s$ -кварков. Взаимодействие таких активных наночастиц через глюоны может приводить к увеличению длин волн и образованию агрегатов.

С учетом связей импульса глюона с энергиями покоя  $u, d, s$ -кварков показана возможность распада бозона Хиггса на лептонные пары (типа электрон-электронная дырка, мюон-мюонная дырка) и фотон.

Выполнены оценки энергетических щелей (энергий колебательных мод), эффективных температур. Эти оценки зависят от состояний антинейтринного поля Хиггса, связанного с барионной плотностью материи.

Показана возможность образования агрегатов с большими длинами волн на основе гравитационных радиусов Шварцшильда эффективного атома и бозона Хиггса в рамках нашей анизотропной модели [11].

Показано, что наличие вкладов от тяжелых  $c, b, t$ -кварков могут приводить к изменениям эффективных углов Кабибо, поля Хиггса, энергий колебательных мод.

Показано, что дополнительные вклады от поля Хиггса в энергии составных частиц приводят к появлению частиц с энергиями типа тяжелого, легкого бозонов Хиггса. Выполнены оценки энергий таких тяжелых, легких бозонов Хиггса, которые согласуются с экспериментальными данными.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The ATLAS Collaboration / CERN. Evidence for Higgs boson decays to a low-mass dilepton system and a photon in pp collisions at  $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$  with the ATLAS detector. ATLAS-CONF-2021-002. – 1st February 2021.
2. The asymmetry of antimatter in the proton / J. Dove, B. Kerns, R.E. McClellan et al. // Nature. – 2021. – No 590. – P. 561-565.
3. An Liupan. Latest results on exotic hadrons at LHCb / Liupan An // CERN-LHC seminar, June 16th 2020.
4. The baryon density of the Universe from an improved rate of deuterium burning / V. Mossa, K. Stöckel, F. Cavanna et al. // Nature. – 2020. – No 587. – P. 210-213.
5. Abramov V.S. Active Nanoobjects, Neutrino and Higgs Boson in a Fractal Models of the Universe / V.S. Abramov // C.H. Skiadas, Y. Dimotikalis (eds.), 12th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 1-14.
6. Abramov V.S. Active Femto- and Nano-Objects in Relation to the Solar and Interstellar Winds in Anisotropic Models / V.S. Abramov // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2020. – No 84(12). – P. 1505-1510.
7. Abramov V.S. Super-nonradiative states in fractal quantum systems / V.S. Abramov // XIII International Workshop on Quantum Optics (IWQO-2019). EPJ Web of Conferences. – V.220, 02001. 2 p. – 2019. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201922002001>
8. Abramov V.S. Supernonradiative states, neutrino and Higgs Boson in fractal quantum systems / V.S. Abramov // Bulletin of the Russian Academy of Sciences Physics. – 2020. – No 84(3). – P. 284-288
9. Абрамов В.С. Черные дыры, релятивистские джеты, корональные дыры на Солнце, активные микрообъекты во фрактальных моделях / В.С. Абрамов // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 3. – С. 7-21.
10. Relativistic X-ray jets from the black hole X-ray binary MAXI J1820+070 / M. Espinasse, S. Corbel, Ph. Kaare et.al. // arXiv:2004.06416v1 [astro-ph.HE]. – 10 p
11. Абрамов В.С. Анизотропная модель и переходные сигналы от бинарных космологических объектов: черных дыр, нейтронных звезд / В.С. Абрамов // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 55-68.
12. Is the High-Resolution Coronal Imager Resolving Coronal Strands? Results from AR 12712 / T. Williams, R.W. Walsh, A.R. Winebarger et al. // The Astrophysical Journal. – 2020. – 892:134. – 13 p.
13. Abramova O.P. Effect of Ordering of Displacement Fields Operators of Separate Quantum Dots, Elliptical Cylinders on the Deformation Field of Coupled Fractal Structures / O.P. Abramova, A.V. Abramov; C.H. Skiadas and I. Lubashevsky (eds.), 11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG, 2019. – P. 15-27,
14. Abramova O.P. Coupled Fractal Structures with Elements of Cylindrical Type / O.P. Abramova, A.V. Abramov // C.H. Skiadas and Y. Dimotikalis (eds.), 12th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 15-26.
15. Abramova O.P. Qubits and Fractal Structures with Elements of the Cylindrical Type / O.P. Abramova, A.V. Abramov // C.H. Skiadas and Y. Dimotikalis (eds.), 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG 2021. – P. 15-28.
16. Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 2. Современные приложения / С. Вайнберг. – Москва, Физматлит, 2015. – 528 с.
17. Вонсовский С.В. Магнетизм микрочастиц / С.В. Вонсовский. – Москва: Наука, 1973. – 280 с.
18. Торн К.С. Черные дыры и складки времени. Дерзкое наследие Эйнштейна / К.С. Торн. – Москва, Физматлит, 2007. – 614 с.
19. Abramov V.S. Higgs Boson and Higgs Field in Fractal Models of the Universe: Active Femtoobjects, New Hubble Constants, Solar Wind, Heliopause / V.S. Abramov // C.H. Skiadas and Y. Dimotikalis (eds.), 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Springer Proceedings in Complexity. – Springer Nature Switzerland AG 2021. – P. 1-14.

20. Abbott B.P. Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral / B.P. Abbott et al. // Phys. Rev. Lett. – 2017. – No 119 (161101). – P. 1-18.
21. Кэрролл Ш. Частица на краю вселенной. Как охота на бозон Хиггса ведет нас к границам нового мира. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 352 с.
22. Barnett R.M. Review of Particle Physics / R.M. Barnett, C.D. Carone, D.E. Groom et al. // Phys. Rev. D54. – 1996. – No 1. – P. 1.
23. Индурайн Ф. Квантовая хромодинамика: Введение в теорию кварков и глюонов / Ф. Индурайн. – Москва: Мир, 1986. – 288 с.
24. Crivellin A. Accumulating Evidence for the Associate Production of a Neutral Scalar with Mass around 151 GeV / A. Crivellin, Y. Fang, O. Fischer et. al. // arXiv:2109.02650v1 [hep-ph] 6 Sep 2021.

*Поступила в редакцию 17.03.2022 г.*

### ACTIVE NANOPARTICLES, AGGREGATES AND HIGGS BOSON IN THE QUARK-GLUON MODEL

*V.S. Abramov*

To describe the relations and main characteristics of active nanoparticles with the Higgs boson the quark-gluon model is proposed. The wavelengths of active nanoparticles by the Schwarzschild gravitational radii of light quarks are determined. The possibility of the Higgs boson decay into lepton pairs (such as electron-electron hole, muon-muon hole) and a photon is shown. Estimates of energy gaps (energies of vibrational modes) and effective temperatures depend on the states of the Higgs antineutrino field associated with the baryon density of matter. The possibility of the formation of aggregates with long wavelengths based on the Schwarzschild gravitational radii of the effective atom and the Higgs boson is shown. It is shown, that the presence of contributions from heavy quarks can lead to changes in the effective Cabibo angles, the Higgs field, and vibrational mode energies. Accounting for the Higgs field for the energies of composite particles leads to the appearance of particles with energies like heavy, light Higgs bosons.

**Keywords:** active nanoparticles, Higgs boson and Higgs field, quark-gluon model, lepton pairs, photon, aggregates.

**Абрамов Валерий Сергеевич**

Кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник,  
ГУ «Донецкий физико-технический институт  
имени А.А. Галкина», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: vsabramov2018@gmail.com

**Abramov Valeriy Sergeevich**

Candidate of Physics and Mathematical Sciences,  
Senior Research Officer  
SI “Donetsk Institute for Physics and Engineering  
named after A.A. Galkin”, Donetsk, DPR.  
E-mail: vsabramov2018@gmail.com

## ТЕРМИЧЕСКИЙ ГИСТЕРЕЗИС МАКРООБЪЕКТОВ ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ ПЕРВОГО РОДА

© 2022. Е.А. Покинтелица

На основании термограмм нагревания и охлаждения, с учетом фазовых превращений типа плавление-кристаллизация, проанализированы различные термические гистерезисные процессы для макрообъектов. Выявлено три вида термического гистерезиса: первого типа (ТГ-I) - при сопоставлении равновесного процесса плавления с процессом неравновесной кристаллизации; второго типа (ТГ-II) - при сопоставлении равновесных процессов плавления и кристаллизации с отличающимися друг от друга температурами плавления и кристаллизации, а также комбинированный, сочетающий в себе оба вида гистерезиса. Разработаны схемы изменения энтальпий и энергий Гиббса при различных видах гистерезисных явлений.

**Ключевые слова:** плавление; равновесная и неравновесная кристаллизация; термограммы; термический гистерезис; энтальпия; энергия Гиббса.

**Введение.** Температурным гистерезисам (ТГ) при плавлении и кристаллизации малых частиц [1–6] уделяется большое внимание. Как правило, его связывают с размерными зависимостями различных физических характеристик (температуры и энтальпии плавления, теплоёмкости, поверхностного натяжения и др.). Рассмотрим макрообъекты и проанализируем их на наличие ТГ. Исследования в этом направлении представляют большой интерес с фундаментальной точки зрения. Если гистерезисные эффекты имеют место, то возникает вопрос о том, чем они могут быть обусловлены, поскольку о влиянии размерных факторов в данном случае говорить не приходится.

**Предыстория вопроса.** Анализ многочисленных работ по изучению процессов плавления и кристаллизации указывает на возможность наличия, либо отсутствия ТГ [7–12]. Термограммы плавления и кристаллизации в координатах температура  $T$  - время  $\tau$  обычно записываются в одном направлении. На рис. 1 в качестве примера приведены термограммы нагревания и охлаждения воды [13], характеризующие плавление, равновесную и неравновесную кристаллизации. Эти данные получены на образце массой 0.5 г, нагреваемом и охлаждаемом со скоростью порядка 0.25 К/с [11]. На этом рисунке показаны температуры плавления льда  $T_L = 0^\circ\text{C}$ , кристаллизации воды  $T_S = 0^\circ\text{C}$ , а также минимальная температура  $T_{min} = -8^\circ\text{C}$  на начало кристаллизации из переохлажденного состояния  $\Delta T^- = 8^\circ\text{C}$ .

Кривая охлаждения  $dcbg$ , характеризующая равновесную кристаллизацию, есть зеркальное отражение кривой нагревания  $abcd$ , т.к. температура равновесной кристаллизации  $T_S$  совпадает с температурой плавления  $T_L$ .

При неравновесной кристаллизации начало этого процесса происходит из переохлажденного ( $\Delta T_L^- = T_L - T_{min}$ ) состояния, начиная от температуры  $T_{min}$  (т.е. из «критической» точки  $e_k$ ). В данном случае кристаллизация начинается при температуре  $T_{min}$  (точка  $e_k$ ), затем за счёт «взрывной» кристаллизации температура поднимается до температуры плавления  $T_L$ . В результате затвердевает лишь часть  $\beta$  жидкой фазы. Далее идет изотермическая докристаллизация оставшейся части  $(1 - \beta)$  расплава за время  $\tau_3$  по пути  $e \rightarrow b$  при температуре  $T_S = T_L$ . Если уменьшать массу вещества, то кристаллизация может завершиться либо в точке  $e$ , либо в точке  $e_k$  и т.д. Для микро- и наночастиц

температура  $T_{min}$  может опускаться гораздо ниже  $T_{min}$ . Аналогичные термограммы были получены также на висмуте, свинце, сурьме, антимониде висмута, антимониде сурьмы, теллуре, бензоле, нафталине, дифениле, феноле, пирокатехине и др. [11].

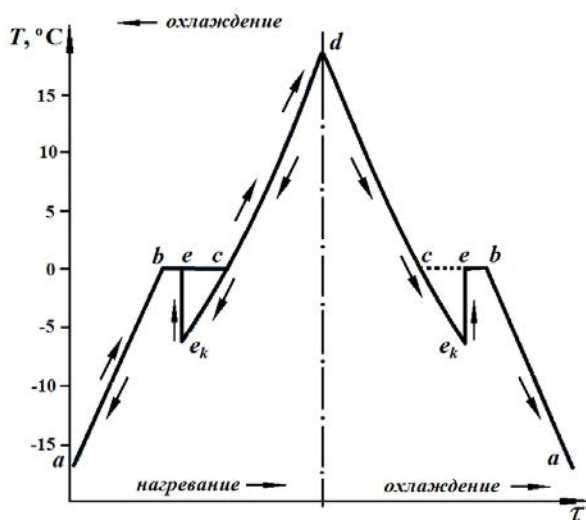


Рис. 1. Термограмма, характеризующая плавление льда и кристаллизацию воды. Стрелками показаны направления процессов нагревания и охлаждения.

Петля гистерезиса формируется при совмещении кривых нагревания и охлаждения с записью прямого и обратного фазовых переходов. Для зарисовки петель гистерезиса, например по рис. 1 для воды, запись кривой охлаждения (начиная с верхней точки  $d$ ) проводили в противоположном направлении. При равновесной кристаллизации ожидать гистерезисного эффекта не приходится.

При развороте кривой охлаждения  $de_k eba$ , характеризующей неравновесную кристаллизацию, и ее совмещении с кривой нагревания  $abcd$  видна разница между этими линиями с образованием петли гистерезиса в виде треугольника  $see_k c$ . Похожая форма петли образуется и при сопоставлении друг с другом кривых охлаждения с учетом равновесной и неравновесной кристаллизации. Поскольку известны условия перехода от равновесной кристаллизации [11] к неравновесной, появляется возможность изменения величины гистерезисного эффекта различными способами: изменением массы, влиянием перегрева жидкой фазы, внешними воздействиями, использованием ингибиторов и др. Назовем вид термического гистерезиса, разобранный нами по рис. 1, гистерезисом первого рода (ТГ-I). Подобный гистерезис характерен только для начальной стадии кристаллизации макрообъектов, т.е. для этапа зародышеобразования за инкубационный период  $\tau_1$  и время  $\tau_2$  коагуляции зародышей.

При ТГ-I общая энтальпия при неравновесной кристаллизации состоит из трех составляющих (энтальпий  $\Delta H_1$  зародышеобразования,  $\Delta H_2$  коагуляции зародышей и  $\Delta H_3$  докристаллизации оставшейся части жидкости), которые в сумме дают значение общей энтальпии  $\Delta H_{SL}$  затвердевания  $\Delta H_{SL} = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$  (рис. 2). Расчеты для той же воды показывают, что суммарная энтальпия кристаллизации  $\Delta H_{SL}$  при ТГ-I примерно совпадает как с энтальпией плавления  $\Delta H_{LS}$ , так и с энтальпией равновесной кристаллизации. Таким образом, ТГ-I формируется при сопоставлении равновесного процесса плавления с процессом неравновесной кристаллизации из переохлажденного состояния.

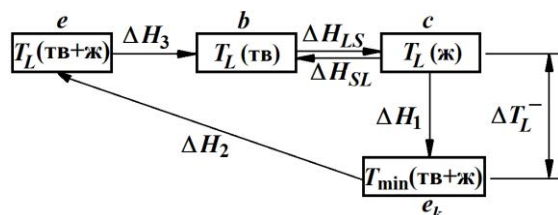


Рис. 2. Схема изменения энтальпий при формировании ТГ-I.

Для целого ряда веществ установлено, что кристаллизация происходит изотермически при температуре  $T_S < T_L$ , либо неравновесно с переохлаждениями  $\Delta T_S^- = T_S - T_{min}$  относительно  $T_S$ . К таким веществам относятся сера, двухлористый свинец, прустит, *o*-терфенил, *m*-терфенил, кристаллогидраты  $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ ,

$Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ ,  $Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$ ,  $Na_2SO_3 \cdot 7H_2O$  и др. [11].

На рис. 3 в качестве иллюстрации приведены две термограммы для *o*-терфенила, характеризующие подобные фазовые превращения [14].

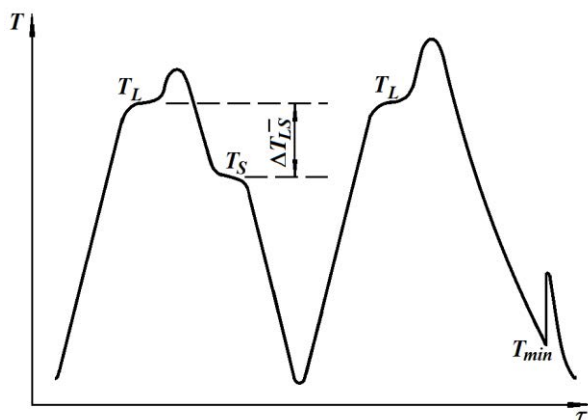


Рис. 3. Термограммы, характеризующие квазиравновесную (слева) и неравновесную кристаллизацию (справа) *o*-терфенила.

Левая термограмма свидетельствует о квазиравновесных процессах плавления при средней температуре  $T_L \approx 57^\circ\text{C}$  и кристаллизации при  $T_S \approx 48^\circ\text{C}$  с разницей  $\Delta T_{LS}^- \approx 9^\circ$ . Правая термограмма показывает, что кристаллизация начинается при температуре  $T_{min} \approx 23^\circ\text{C}$  и носит неравновесно-взрывной характер. В данном случае имеет место переохлаждение как относительно температуры плавления  $\Delta T_L^- \approx 34^\circ\text{C}$ , так и относительно температуры равновесной кристаллизации  $\Delta T_S^- \approx 25^\circ\text{C}$ .

Проанализируем термограммы нагрева и охлаждения, когда равновесная кристаллизация происходит при постоянной температуре  $T_S < T_L$ . Нарисуем схематические термограммы, характеризующие равновесный характер плавления при  $T_L$  и равновесную кристаллизацию при  $T_S$  (рис. 4). Сопоставляя кривую нагрева  $abcd$  с кривой охлаждения  $dhka$ , записанную в противоположном направлении, видим фигуру петли гистерезиса в форме  $chkbcs$ . Отметим тот факт, что как плавление, так и кристаллизация являются изотермическими. Таким образом, при наличии своеобразного переохлаждения  $\Delta T_{LS}^-$  имеет место равновесная кристаллизация при  $T_S$ .

Назовем это явление термическим гистерезисом второго рода (ТГ-II). Схема изменения энтальпий при ТГ-II представлена на рис. 5 в виде прямоугольника  $chkbcs$ .

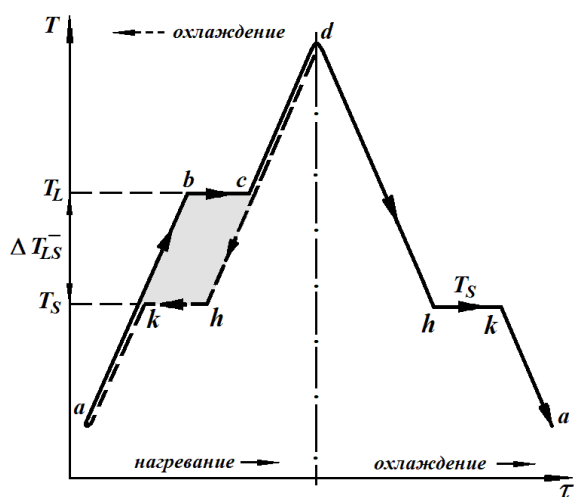


Рис. 4. Схематическая термограмма, характеризующая термический гистерезис второго рода.

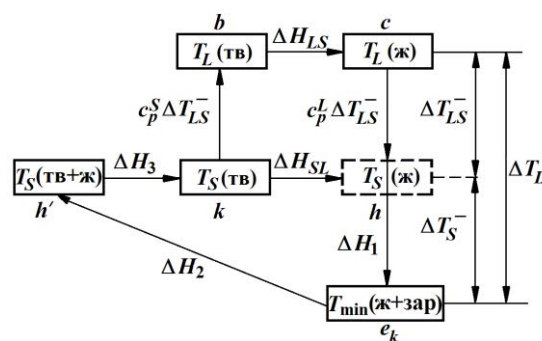


Рис. 5. Схема изменения энтальпий плавления и кристаллизации при ТГ-I, ТГ-II и комбинированном гистерезисе.

При ТГ-II энтальпия плавления  $\Delta H_{LS}$  отличается от энтальпии кристаллизации  $\Delta H_{SL}$ . Петля гистерезиса  $bchkb$  состоит из двух изотерм  $bc$ ,  $hk$  и двух участков с нагревом ( $k \rightarrow b$ ) твердой фазы и охлаждением ( $c \rightarrow h$ ) жидкой фазы. Тогда для

кругового процесса  $k \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow h \rightarrow k$  очевидно  $c_p^S \Delta T_{LS}^- + \Delta H_{LS} = c_p^L \Delta T_{SL}^- + \Delta H_{SL}$ , где  $c_p^L$  и  $c_p^S$  – удельные теплоемкости жидкой и твердой фаз. Откуда в первом приближении энтальпия кристаллизации  $\Delta H_{SL}$  будет равна  $\Delta H_{SL} = \Delta H_{LS} - \Delta c_p \Delta T_{LS}^-$ .

Еще более замысловатые фигуры вырисовываются при наложении друг на друга кривых нагревания и охлаждения, сочетающих термические гистерезисы первого и второго рода (рис. 6) при  $T_S < T_L$ , в соответствии с правой термограммой для *o*-терфенила (рис. 3).

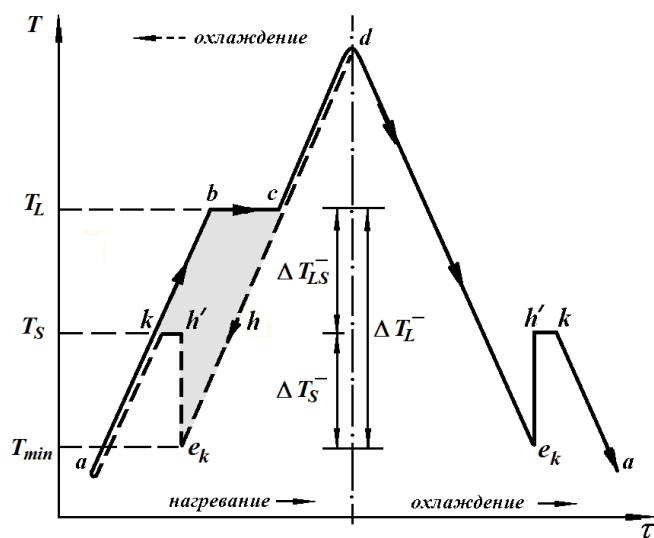


Рис. 6. Термограммы, характеризующие комбинированный гистерезис, на основе ТГ-I и ТГ-II.

а при неравновесной  $ce_k h' kb$ .

Проанализируем пути изменения энергий Гиббса для жидкой  $G_L$  и твердой  $G_S$  фаз при нагревании и охлаждении с формированием ТГ-I и ТГ-II (рис. 7). Вначале рассмотрим первый вариант с ТГ-I.

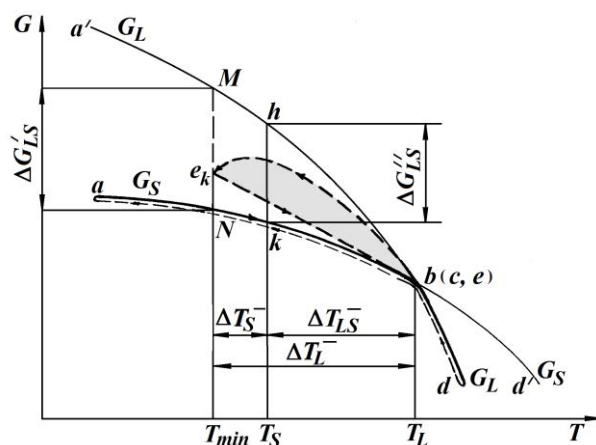


Рис. 7. Зависимость энергий Гиббса для жидкой ( $G_L$ ) и твердой ( $G_S$ ) фаз от температуры.

то ход линий  $G_L(T)$  будет зависеть от типа кристаллизации. Если точка  $e_k$  совпадает с точкой  $M$ , то в процессе взрывной кристаллизации за счет теплоты кристаллизации температура должна подняться от точки  $M$  (при  $T_{min}$ ) до температуры плавления  $T_L$ . Если

В этом случае общая петля  $ce_k h' kb$  состоит из участков  $chkbc$  для ТГ-II и  $he_k h' h$  для ТГ-I (относительно температуры  $T_S$ ). В таком комбинированном варианте видим три переохлаждения:  $\Delta T_L^-$ ,  $\Delta T_S^-$  и  $\Delta T_{LS}^-$ . При комбинированном гистерезисе (КГ)  $\Delta H_{LS} \neq \Delta H_{SL}$ ,  $T_S < T_L$ ,  $\Delta T_L^- = \Delta T_{LS}^- + \Delta T_S^-$ , где  $\Delta T_L^-$  и  $\Delta T_S^-$  – переохлаждения относительно температур  $T_L$  и  $T_S$ , а  $\Delta T_{LS}^- = T_L - T_S$ . Схема изменения энтальпий плавления и кристаллизации при КГ показана на рис. 5: при плавлении по пути  $bc$ , при изотермической кристаллизации при  $T_S$  по направлению  $chkb$ ,

В отсутствие ТГ-I путь  $d \rightarrow c(\rightarrow b) \rightarrow a$  изменения энергии Гиббса при понижении температуры  $T$  (с учетом равновесной кристаллизации) совпадает с направлением  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$  в обратную сторону при повышении температуры  $T$  (с учетом равновесного процесса плавления).

После охлаждения расплава и его перевода в переохлажденное состояние кривая  $G_L(T)$  пройдет через точки  $d \rightarrow b(\rightarrow c) \rightarrow a'$ , а кривая  $G_S(T)$  – через точки  $d' \rightarrow b(\rightarrow c) \rightarrow a$ . Если кристаллизация начнется при температуре  $T_{min}$  в произвольной точке  $e_k$  на линии  $MN$ ,

кристаллизация завершится при  $T_L$ , то ход функции  $G_L(T)$  пройдет по точкам  $d \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow M \rightarrow c(\rightarrow b) \rightarrow a$  без образования петли гистерезиса с кривой  $G_S(T)$   $d' \rightarrow b(\rightarrow c) \rightarrow a$ , что не согласуется с термограммами на рис. 1. Кроме того, в данном случае не учитываются процессы зародышеобразования, а структура жидкости остается идеальной как ниже, так и выше температуры плавления. С учетом процесса зародышеобразования кривая  $G_L(T)$  отображает характеристику жидко-твёрдого состояния, поэтому ниже температуры плавления  $T_L$  она должна сближаться к кривой  $G_S(T)$  по пути  $b \rightarrow e_k$ . Коагуляция зародышей начинается только в случае достижения критической границы метастабильного состояния, т.е. температуры  $T_{min}$  в одной точке  $e_k$  с последующим быстрым подъёмом температуры до  $T_L$  (по прямой  $e_k \rightarrow e$ ). Эти этапы и особенности должны также быть отражены на графиках  $G_L(T)$  и  $G_S(T)$ . Если же кристаллизация будет полностью происходить по линии  $MN$  при  $T_{min}$ , то непонятно за счет чего температура должна подниматься от  $T_{min}$  до  $T_L$ . Поэтому остаётся один вариант, показанный на рис. 7, поскольку согласно рис. 1 температура из точки  $e_k$  скачком поднимается до  $T_L$ , что характеризует один из этапов кристаллизации, а именно второй.

Что касается ТГ-II, то петля очевидно будет иметь вид фигуры  $bhkb$  в соответствии с рис. 3 (левая термограмма), т.к. весь процесс, например, равновесной кристаллизации происходит изотермически при температуре  $T_S$  по линии  $hk$ , а процесс плавления при  $T_L$  по линии  $bc$ . При комбинированном (также как при ТГ-I) гистерезисе в соответствии с правой термограммой на рис. 3 после начала взрывной кристаллизации температура от  $T_{min}$  (т.е. точки  $e_k$ ) в зависимости от условий эксперимента (массы, скорости охлаждения и пр.) может подняться до определенной точки на линии  $Nb$  с образованием соответствующей формы петли гистерезиса.

Из рис. 7 видно, что движущими силами кристаллизации являются разности энергий Гиббса:  $\Delta G'_{LS}$  для ТГ-I и  $\Delta G''_{LS}$  для ТГ-II. Но если для ТГ-I  $\Delta G_{LS}$  есть функция переохлаждения  $\Delta T_L^-$ , а кристаллизация является неравновесной (во всяком случае на этапе зародышеобразования), то для ТГ-II при наличии переохлаждения  $\Delta T_{LS}^-$  кристаллизация происходит равновесно и изотермически. Это обстоятельство не совсем понятно с точки зрения, как термодинамики равновесных процессов, так и термодинамики неравновесных явлений.

Имеется аргумент трактовки термического гистерезиса ТГ-I, исходя из того факта, что твёрдые тела при плавлении практически не перегреваются, а жидкости кристаллизуются после достижения определённых переохлаждений. В работе [15] было показано, что при образовании зародышей жидкой фазы при плавлении и зародышей кристаллов при кристаллизации, имеет место гистерезисный эффект, связанный с дефектами кристалла. Наличие дефектов в кристалле «облегчает» их плавление, а для образования кристалла с дефектами и их удержания в зародыше требуется дополнительная энергия, что затрудняет и задерживает процесс формирования реальных кристаллов.

Гистерезисный эффект второго рода относится, в основном, к веществам, испытывающим при затвердевании переходы от одной кристаллической модификации к другой. К таковым можно отнести серу, имеющую две модификации  $\alpha$ -S,  $\beta$ -S с разными температурами плавления, кристаллогидраты пятиводного тиосульфата натрия, десятиводных сульфатов и карбонатов натрия, переходящих при плавлении в другую твёрдую фазу с пониженными температурами кристаллизации, по сравнению с температурами плавления первичной фазы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самсонов В.М. О причинах гистерезиса плавления и кристаллизации наночастиц / В.М. Самсонов, С.А. Васильев, И.В. Талызин, Ю.А. Рыжков // Письма в ЖЭТФ. – 2016. – Т. 103, вып. 1 – 2. – С. 100–105.
2. Мотт Н.Ф. Переходы металл-изолятор / Н.Ф. Мотт. – М.: Наука, 1979. – 342 с.
3. Шаяпов В.Р. Характеристики фазового перехода в пленках диоксида ванадия, полученных химическим осаждением из газовой фазы / В.Р. Шаяпов, Л.В. Яковкина // Журнал физической химии. – 2019. – Т. 93, № 8. – С. 1153–1158.
4. Климов В.А. Формирование петли температурного гистерезиса при фазовом переходе металл-полупроводник в плёнках диоксида ванадия / В.А. Климов, И.О. Тимофеева, С.Д. Ханин, Е.Б. Шадрин и др. // Журнал технической физики. – 2002. – Т. 72, № 9. – С. 67–74.
5. Борыняк Л.А. Температурный гистерезис при плавлении и кристаллизации нанообъектов / Л.А. Борыняк, А.П. Чернышов // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2014. – № 1 (54). – С. 172–179.
6. Голубев В.Г. Гистерезис фотонной зоны в фотонном кристалле VO<sub>2</sub> при фазовом переходе полупроводник-металл / В.Г. Голубев, Д.А. Курдюков, А.Б. Певцов, А.В. Селькин и др. // Физика и техника полупроводников. – 2002. – Т. 36, вып. 9. – С. 1122–1127.
7. Берг Л.Г. Введение в термографию / Л.Г. Берг. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
8. Chalmers B. Principles of Solidification / B. Chalmers – New York. London. Sidney: John Wiley Sons Inc., 1968. – 288 p.
9. Уббеллоде А.Р. Расплавленное состояние вещества / А.Р. Уббеллоде. – М: Металлургия, 1982. – 376 с.
10. Данилов В.И. Строение и кристаллизация жидкости / В.И. Данилов. – К.: АН УССР, 1956. – 520 с.
11. Александров В.Д. Кинетика зародышеобразования и массовой кристаллизации переохлажденных расплавов и растворов. Сборник избранных трудов. Часть 2. / В.Д. Александров, В.А. Постников, С.А. Фролова, О.В. Соболев и др. – Донецк: Донбасс, 2018. – 413 с.
12. Кидяров Б.И. Кинетика образования кристаллов из жидкой фазы / Б.И. Кидяров. – Новосибирск: СО АН УССР, 1979. – 132 с.
13. Александров В.Д. Термические эффекты при кристаллизации капель воды в естественных условиях / В.Д. Александров, А.А. Баранников // Журнал физической химии. – 2000. – Т. 74, № 4. – С. 595–599.
14. Александров В.Д. Особенности кристаллизации о-терфенила при охлаждении жидкой фазы / В.Д. Александров, Е.А. Покинтелица, Н.В. Щебетовская // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Сер.: Хімія і хімічна технологія. – 2014. – Вип. 1. – С. 54–62.
15. Александров В.Д. Сопоставление перегрева кристаллов при плавлении и переохлаждении расплавов при кристаллизации / В.Д. Александров, О.В. Соболев // Журнал физической химии. – 2007. – Т. 81, № 11. – С. 2100–2103.

*Поступила в редакцию 07.04.2022 г.*

## THERMAL HYSTERESIS OF MACROOBJECTS DURING FIRST-KIND PHASE TRANSFORMATIONS

***O.A. Pokyntelytsia***

On the basis of heating and cooling thermograms, taking into account phase transformations of the melting-crystallization type, various thermal hysteresis processes for macroobjects are analyzed. Three types of thermal hysteresis have been identified: the first type (TH-I) - when comparing the equilibrium melting process with the process of nonequilibrium crystallization; the second type (TH-II) - when comparing the equilibrium processes of melting and crystallization with different melting and crystallization temperatures, as well as combined, combining both types of hysteresis. Schemes for changing enthalpies and Gibbs energies for various types of hysteresis phenomena have been developed.

**Key words:** melting; equilibrium and nonequilibrium crystallization; thermograms; thermal hysteresis; enthalpy; Gibbs energy.

**Покинтелица Елена Анатольевна**

кандидат технических наук, доцент ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, ДНР.  
E-mail: lnk0013@gmail.com

**Pokyntelytsia Olena Anatoliyivna**

candidate of technical sciences, associate professor SEI HPE «Donbas national academy of civil engineering and architecture», Makeyevka, DPR  
E-mail: lnk0013@gmail.com

## НУКЛЕАЦИОННЫЙ МЕХАНИЗМ ВЗРЫВНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

© 2022. С.А. Фролова, Н.В. Щебетовская, О.В. Соболев, А.Ю. Соболев

Дан анализ различных этапов взрывной кристаллизации: кластеризации жидкой фазы, зародышеобразования и коагуляции зародышей. Сделана попытка объяснения явления взрывной кристаллизации с позиции известных положений теории цепных реакций. В качестве «строительного» материала образования кристаллов предложено считать кристаллоподобные кластеры и наноразмерные зародыши кристаллов. Показано, что при коагуляции даже двух зародышей выделяется энергия эквивалентная квантам электромагнитного излучения, способствующим активации присоединения других зародышей по цепному механизму. Расчеты показали, что при коагуляции множества зародышей выделяется теплота достаточная для быстрого прогрева вещества из области переохлаждения до температуры плавления. По аналогии с известной диаграммой теплового взрыва по Н.Н. Семенову построена и проанализирована подобная диаграмма зависимости тепловыделения и теплоотвода от времени. Найден критический значения начала взрывного процесса и скорости охлаждения жидкой фазы.

**Ключевые слова:** плавление, расплав, перегрев, переохлаждение, кластеры, зародыши, нуклеация, активация, коагуляция, взрывная кристаллизация.

**Введение.** Из литературы [1–8] хорошо известны явления взрывной кристаллизации. Подобная кристаллизация наблюдается не только в массивных веществах, но и в пленках (в основном, аморфных) [9–11]. В последнем случае обсуждаются самые разнообразные механизмы такого явления, адаптированные к конкретному веществу. Вместе с тем, механизм самопроизвольной кристаллизации взрывного типа при охлаждении жидкости далеко не ясен. В данной работе предлагается т.н. нуклеационный механизм взрывной кристаллизации при коагуляции наноразмерных зародышей кристаллов.

Эффекты взрывного типа основаны на энергии, выделяющейся в результате химических и ядерных реакциях. Для осуществления таких реакций необходима активация процесса либо за счет повышения температуры, либо облучения и других воздействий. При кристаллизации подобные реакции отсутствуют. Кроме того, взрывная кристаллизация наступает при понижении температуры и происходит самопроизвольно. Для адаптации известных положений теории взрывных процессов к взрывной кристаллизации необходимо: во-первых, определиться с типами размножающихся частиц; во-вторых, с причинами их размножения; в-третьих, с источниками энергии для этого процесса.

**Теоретическая часть.** Рассмотрим, в качестве примера, серию термоциклов сурьмы, отражающих взрывной характер кристаллизации (рис. 1) [1]. Образец массой 2 г, находящийся в вакуумированном (до  $\sim 10^{-3}$  Па) кварцевом сосудике Степанова, нагревался и охлаждался со скоростями  $0.08 \div 0.12$  К/с.

Как видно из этого рисунка, при охлаждении ниже температуры плавления  $T_L \approx 630$  К самопроизвольная кристаллизация наступает из переохлажденного ( $\Delta T^- \approx 60$  К) состояния при температуре  $T_m \approx 570$  К. Затем температура стремительно в течение  $0.5 \div 0.6$  с поднимается от  $T_m$  со скоростью  $\sim 100$  К/с, что примерно на три порядка выше скорости охлаждения. Такой подъем температуры может быть связан с некоей реакцией, в результате которой теплоты, выделяющиеся при ней, достаточно для прогрева всего образца на  $55\text{--}60$  К. Устойчивая повторяемость термоциклов

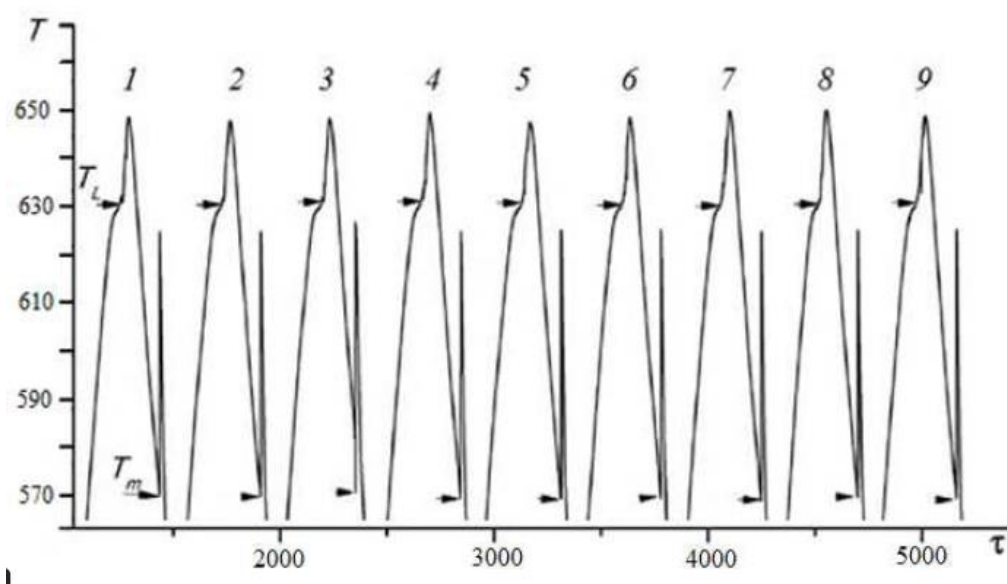


Рис. 1. Серия термоциклов плавления и кристаллизации олова с постоянной температурой перегрева.

свидетельствует также о том, что с веществом никакой деградации не происходит в отличие от взрывных процессов химического и ядерного происхождения.

Проследим за ходом охлаждения расплава по пути *abcdef* по схематичной термограмме охлаждения (рис. 2, а), характеризующей различные изменения в структуре жидкой фазы и неравновесно-взрывной характер кристаллизации. При охлаждении

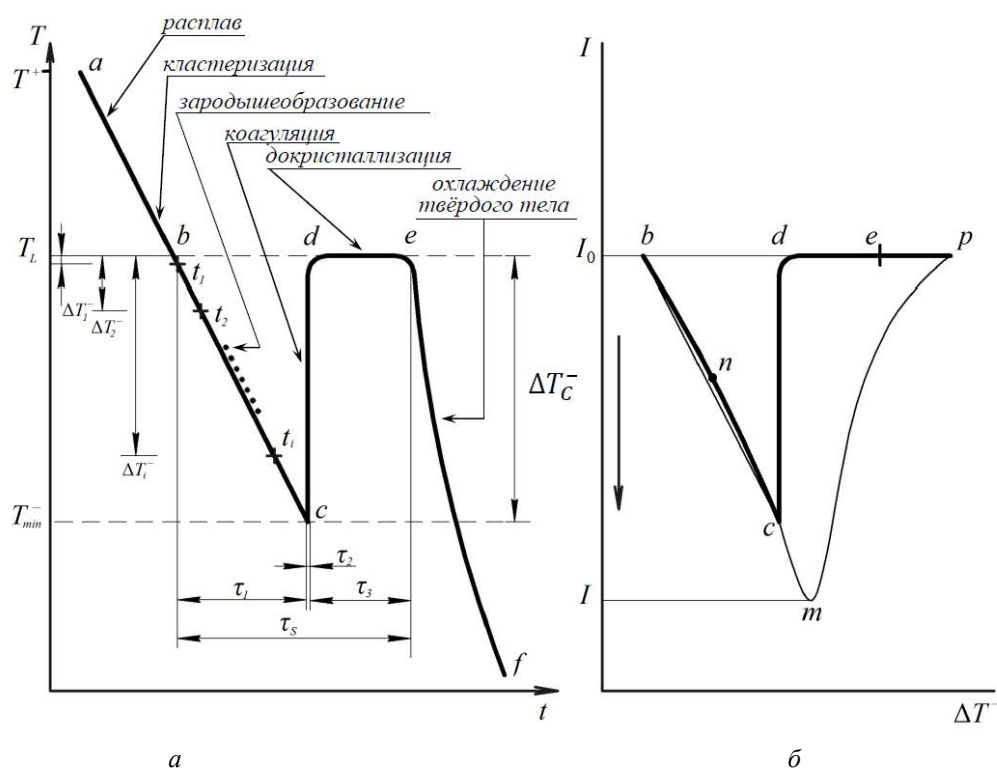


Рис. 2. а – Схематическая термограмма охлаждения при неравновесной кристаллизации.  
б – Зависимость скорости зародышеобразования и от переохлаждения  $\Delta T^-$ .

расплава происходит процесс формирования кристаллоподобных кластеров вблизи температуры плавления [12]. Особый интерес представляет структура частиц при переходе жидкости в переохлажденное состояние. С термодинамических позиций [13, 14], как только расплав охлаждается ниже  $T_L$ , при любом переохлаждении  $\Delta T^-$  возникают условия образования кристаллических зародышей. Это условие определяется разностью свободных энергий Гиббса  $\Delta G_{LS}$  между жидкой  $G_L$  и твердой  $G_S$  фазами, напрямую зависящая от величины переохлаждения. Если проследить за охлаждением по линии  $bc$  (рис. 2, а), то в каждый момент времени в пределах инкубационного периода  $\tau_1$  должен идти непрерывный процесс образования зародышей. И хотя на этапе охлаждения от температуры плавления  $T_L$  до  $T_m$  признаков экзоэффектов не наблюдается, тем не менее это не означает, что в метастабильной области никаких процессов не происходит. Слишком малочисленное и медленное формирование зародышей создает впечатление об отсутствии каких-либо фазовых превращений. Элементарные расчеты показывают, что при образовании десятков или сотен зародышей выделяется теплота, способная нагреть весь образец на  $\sim 10^{-8}$  и  $10^{-9}$  К, что намного ниже чувствительности измеряемых приборов. О процессах частичного медленного накопления зародышей кристаллов за индукционный период  $\tau_1$  свидетельствует тот факт, что при длительной изотермической выдержке за время  $\tau_{\text{выд}}$  жидкой фазы ниже температуры плавления через определенное время  $\tau_1 + \tau_{\text{выд}}$  наступает самопроизвольная кристаллизация с выделением большого количества теплоты [1, 2].

Зависимость скорости нуклеации  $I$  от переохлаждения  $\Delta T^-$  дается уравнением [15, 16]

$$I = I_0 \exp\left[-(\Delta G + \Delta G_\eta)/RT\right], \quad (1)$$

где  $I_0$  – предэкспоненциальный множитель;  $R = 8.31$  Дж/моль·К;  $\Delta G = A_k$  – работа образования зародышей;  $\Delta G_\eta = E$  – энергия активации самодиффузии,  $I = \frac{1}{V} \frac{dN}{dt}$  ( $N$  – число зародышей).

Вид функции  $I = f(\Delta T^-)$  показан на рис. 2, б (см. кривую  $bncstr$ ). Для ее сопоставления с термограммой на рис. 1 эта зависимость представлена для удобства в перевернутом виде. В общем виде зависимость  $I$  от  $\Delta T^-$  по пути  $bncstr$  характерна для вязких жидкостей, у которых не наблюдается взрывная кристаллизация. Для невязких жидкостей, как видим по рис. 2 (а), процесс, во всяком случае, первичного зародышеобразования заканчивается при температуре  $T_{\min}$ , т.е. в точке  $c$ .

При непрерывном возникновении зародышей (рис. 2, а) в метастабильной области нарастает степень кристалличности  $\eta = V_x/V$  (где  $V_x$  – объем, занимаемый зародышами). В данном случае используется уравнение Аврами-Колмогорова [17]

$$\eta = 1 - \exp(-Z \cdot t^\nu), \quad (2)$$

для нахождения константы зародышеобразования  $Z$  и показателя Аврами  $\nu$ .

Например, по термограмме на рис. 1 путем измерения  $\eta_i$  на линии  $bc$  за промежутки времени  $t_i$  (рис. 2, а) и их подстановки в уравнение (2) были вычислены значения  $Z = 2.35 \cdot 10^{-3}$  и  $\nu = 1.66$ .

При образовании зародышей выделяется скрытая теплота кристаллизации, которая может стимулировать появление новых зародышей из соседних группировок малоактивных близких к друг другу молекул или кластеров (рис. 3, а).

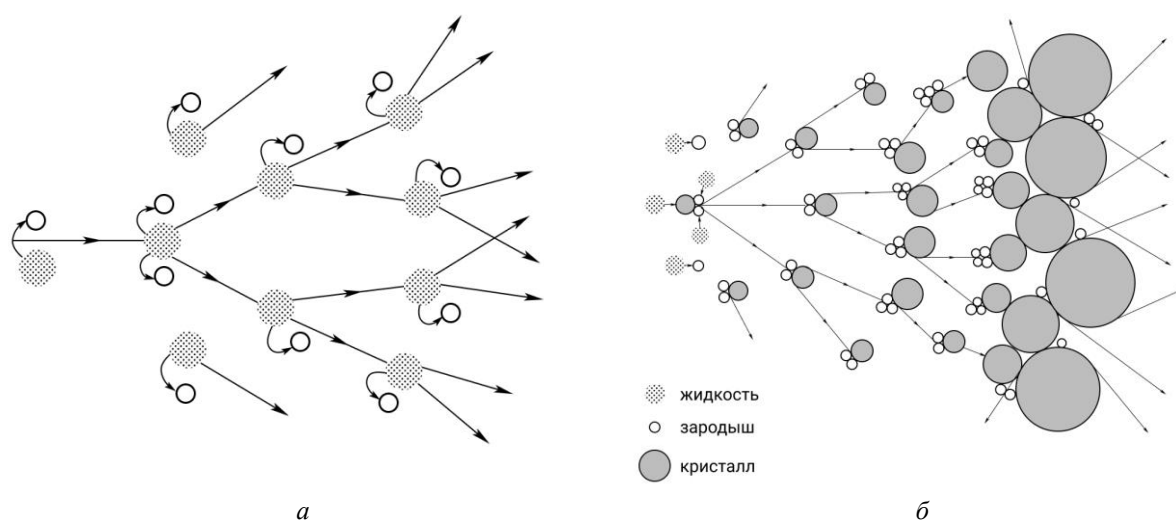


Рис. 3. Схема цепной реакции образования зародышей (а) и их коагуляции (б).

При коагуляции зародышей за время  $\tau_2$  их число в объеме  $V_k$  уменьшается, образуя начальный твердый конгломерат. Этот процесс можно описать уравнением [18]:

$$n_k = n_{k0} \cdot \exp(-K/(t - \tau_1)), \quad (3)$$

где  $n_{k0} = N_k/V_k$  – концентрация зародышей в объеме  $V_k$  на начало коагуляции,  $N_k$  – число зародышей перед их коагуляцией,  $n_k$  – критическая концентрация зародышей через время  $t - \tau_1$  от начала коагуляции. Константу коагуляции  $K$  можно найти из термограммы (рис. 2, а) на основании уравнения (3), считая  $\eta_k = n_k/n_{k0}$ , где  $\eta_k = m_x/m = c_p \Delta T^- / \Delta H_{LS}$  [1]:

$$K = \frac{\ln(c_p \Delta T^- / \Delta H_{LS})}{\tau_2}. \quad (4)$$

Расчеты величин  $Z$  и  $K$  по формулам (2) и (3) с использованием соответствующих термограмм для сурьмы, олова и висмута, показали, что процесс коагуляции зародышей за время  $\tau_2$  в  $\sim 10^6$  раз превышает медленное их образование за время  $\tau_1$ .

Завершающая стадия затвердевания относится к изотермическому процессу докристаллизации оставшейся части  $1 - \alpha$  расплава по пути  $de$  (рис. 2, а), происходящей за счет поглощения оставшихся и вторичных зародышей за время  $\tau_3$ .

Рассмотрим возможную причину резкого скачка температуры от  $T_{\min}$  до  $T_L$  на втором этапе кристаллизации за время  $\tau_2$ . Самопроизвольный быстрый скачок температуры может быть следствием определенной экзотермической реакции. Такой адиабатный эффект можно объяснить тепловыделением за счет излишней межфазной энергии при коагуляции частиц. В работе [19] дана оценка энергии объединения  $n$  зародышей кубической формы с размером ребра  $l_k$ , соответствующего размеру критического зародыша. Расчеты на примере Sb показали, что этой энергии достаточно, чтобы прогреть образец массой  $\sim 2$  г на величину  $\sim 50-60^\circ$ , т.е. от точки  $c$  до точки  $d$  (рис. 2, а), что достаточно близко к экспериментально наблюдаемому.

В работе [20] установлено, что критические размеры  $l_k$  и работы  $A_k$  их образования выражаются следующими формулами:

$$l_k = \frac{4\sigma_{LS}}{\rho_S \Delta H_{LS} - c_P \Delta \rho (T_L - \Delta T^-)}, \quad (5)$$

$$A_k = \frac{32\sigma_{LS}^3}{(\rho_S \Delta H_{LS} - c_P \Delta \rho (T_L - \Delta T^-))^2}, \quad (6)$$

где  $\sigma_{LS}$  – межфазная поверхностная энергия,  $\rho_S$  – плотность твердой фазы,  $\Delta H_{LS}$  – энтальпия плавления,  $c_P$  – удельная теплоемкость жидкой фазы.

Как показали расчеты для некоторых веществ (олово, висмут, сурьма, вода, нафталин, дифенил и др.) по формулам (5) и (6), величины  $l_k$  и  $A_k$  оказались слабозависящими функциями от  $\Delta T^-$ . Кроме того, значения  $l_k$  достаточно близки к параметрам соответствующих кристаллических решеток, а  $A_k$  к энергиям связей между молекулами. Например, для олова в интервале переохлаждений от 0 до 100 К величины  $l_k$  меняются от 0.613 до 0.604 нм, висмута от 0.484 до 0.474 нм, для сурьмы от 0.389 до 0.388 нм. Для сравнения приведем параметры решеток тетрагонального олова  $a = 0.583$  нм,  $c = 0.318$  нм, ромбоэдрического висмута  $a = 0.475$  нм и ромбоэдрической сурьмы  $a = 0.451$  нм [21]. Получается, что в некоторых случаях зародыш кристалла может состоять всего из одной или двух элементарных ячеек.

Учитывая малый размер зародышей, примем за «строительные кирпичики» роста кристаллов наряду с молекулами кристаллоподобные кластеры и наноразмерные зародыши. Допустим, что зародыш кубической формы имеет линейный размер, сопоставимый с параметрами элементарной ячейки. Межфазная поверхностная энергия на границе подобного кристалла с жидкостью будет равна  $W_3 = 6l_k^2 \cdot \sigma_{LS}$ , где  $l_k$  – критический размер зародыша,  $\sigma_{LS}$  – удельная поверхностная энергия. В качестве примера выберем висмут, для которого  $l_k = 0.485$  нм, а  $\sigma_{LS} = 54.4 \cdot 10^{-3}$  Дж/м<sup>2</sup> и сурьму, для которой  $l_k = 0.451$  нм, а  $\sigma_{LS} = 101 \cdot 10^{-3}$  Дж/м<sup>2</sup>. Межфазная поверхностная энергия одной грани такого кубика будет равна для Вi  $W_1 = l_k^2 \cdot \sigma_{LS} \approx 1.28 \cdot 10^{-20}$  Дж, а для Sb –  $2.05 \cdot 10^{-20}$  Дж. Если две подобные грани двух соседних зародышей объединятся, то энергия, выделяющаяся за счет сокращения их общей поверхности, будет равна  $W_{12} = 2W_1 \approx 2.56 \cdot 10^{-20}$  Дж для Вi и  $4.1 \cdot 10^{-20}$  Дж – для Sb. Эти энергии эквивалентны энергиям квантов электромагнитного излучения с длиной волны  $\sim 7.32$  и  $\sim 11.7$  мкм, что соответствует инфракрасной области спектра [4]. При объединении таких зародышей по всем граням исходного зародыша высвободится энергия в 6 раз больше  $\sim 11.55 \cdot 10^{-20}$  и  $18.49 \cdot 10^{-20}$  Дж соответственно. Этой энергии достаточно для образования 5-6 новых зародышей, т.к. работа образования одного зародыша висмута равна  $\sim 3.1 \cdot 10^{-20}$  Дж и  $\sim 7.8 \cdot 10^{-20}$  Дж для сурьмы.

Энергия  $E_i$ , высвобождающаяся при образовании зародышей и их коагуляции, должна способствовать активации «замороженных» кластеров в активные, активных кластеров в устойчивые зародыши (рис. 3, а), а также стимулировать коагуляцию соседних зародышей (рис. 3, б). В инкубационный период эти переходы могут происходить медленно, т. к. часть активных частиц дезактивируется, либо исчезает за счет их превращения в устойчивые зародыши, а зародышей в более крупные кристаллиты. В конце инкубационного периода процесс накопления активных кластеров и зародышей кристаллов резко возрастает, что должно привести к их коагуляции и взрывной кристаллизации.

Таким образом, процессы зародышеобразования и массовой кристаллизации можно уподобить цепной реакции с автономными и разветвляющимися «звеньями», в

которой исходным «материалом» служат молекулы и кластеры, а продуктами реакции – зародыши и их группировки. В этой связи попытаемся адаптировать основные положения теории цепных реакций [22] к процессу кристаллизации переохлажденной жидкости. Согласно этой теории, скорость реакции со временем увеличивается по экспоненциальному закону. Скачок скорости в ходе реакции не связан с внешними случайными воздействиями, а определяется закономерно процессами внутренней структурной перестройки в течении определенного индукционного периода  $\tau$ . Таким образом, в периоде т.н. «ложного» равновесия имеют место не состояния равновесия и отсутствие реакции, а, наоборот, в этот период происходит медленное непрерывное накопление новых частиц. В конечном итоге это накопление приводит к эффекту самовозбуждения, т.е. автогенезису цепного взрыва, когда по всему объему с большой скоростью часть исходного вещества превращается в промежуточное, а затем в конечные продукты [23]. В этой работе вместо общепринятого экспоненциального закона [22] цепной реакции

$$U^+ \approx \frac{U_0}{\varphi} e^{\varphi t / \tau_0}, \quad (7)$$

был предложен закон кинетики автогенетических процессов типа

$$U^+ = \frac{U_0}{1 - t/t_1}, \quad (8)$$

где  $U_0$  – предэкспоненциальный множитель характеризующий частоту присоединения частиц из жидкой фазы к поверхности кристалла;  $\varphi$  – коэффициент, характеризующий ускорение ( $\varphi > 0$ ), либо замедление ( $\varphi < 0$ ) реакции;  $t_1$  – время между двумя последовательными стадиями цепной реакции.

Закон в виде уравнения (8) ближе всего отражает кинетику развития цепной реакции образования и коагуляции зародышей при кристаллизации, поскольку этот процесс происходит за время  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  (рис. 2, а), охватывающий индукционный период  $\tau_1$  медленного развития реакции и ее ускорения за время  $\tau_2$ .

Тепловой эффект цепной реакции при кристаллизации на основании уравнения (8) представим в виде [24]

$$q^+ = \Delta H_{LS} U^+ m, \quad (9)$$

где  $\Delta H_{LS}$  – скрытая теплота кристаллизации,  $m$  – масса вещества.

Подставляя выражение (9) в (8), получим

$$q^+ = U_0 \Delta H_{LS} m / (1 - t/\tau). \quad (10)$$

Упростим формулу (10) и запишем ее в виде

$$q^+ = \frac{q_0 \tau}{\tau - t}, \quad (11)$$

где  $q_0 = U_0 \Delta H_{LS} m$ .

Из (11) видно, что при  $t \rightarrow 0$   $q \rightarrow q_0$ , а при  $t \rightarrow \tau$   $q^+ \rightarrow \infty$ .

Одновременно с тепловыделением происходит теплоотвод. Согласно закону Ньютона [25] скорость теплоотвода

$$q^- = S \chi (T - T_0), \quad (12)$$

где  $S$  – площадь стенки сосуда,  $\chi$  – коэффициент теплопередачи,  $T_0$  – температура окружающей среды.

Свяжем перепад температур  $T - T_0$  со скоростью охлаждения  $v_{охл} = (T - T_0)/t$ . Тогда получим

$$q^- = S\chi v_{охл} \cdot t. \quad (13)$$

В зависимости от скорости охлаждения (при  $S = \text{const}$ ,  $\chi = \text{const}$ ), будет меняться наклон прямых  $q^- = f(t)$ , показанных на рис. 4 (линии  $q_1^-$ ,  $q_2^-$ ,  $q_3^-$ ). Если совместить эти линии с кривой  $q^+(t)$ , получим известную диаграмму теплового взрыва по Семенову [22]. Если в работах [22–25] эта диаграмма строится в координатах  $q$  – температура  $T$ , то в нашем случае ее строим в координатах  $q$  – время  $t$ . Пересечение графиков  $q^+(t)$  и  $q_1^-(t)$  в точке  $A_1$  означает, что теплоприход и теплоотвод равны между собой, т.е.  $q^+ = q^-$ . Следовательно, в точке  $A_1$  можно приравнять уравнения (11) и (12):

$$\frac{q_0\tau}{\tau - t} = S\chi v_{охл} t. \quad (14)$$

Аналогичная картина наблюдается при пересечении кривых  $q^+(t)$  и  $q_2^-(t)$  в точке  $A_2$ . Таким образом, любая точка  $A_i$  на участке  $A_1C$  характеризует устойчивую реакцию образования и накопления активных кластеров и зародышей.

При дальнейшем уменьшении скорости охлаждения точка пересечения  $A_i$  смещается до касания в точке  $C$ . Условие касания графиков  $q^+(t)$  и  $q^-(t)$  в точке  $C$  является критическим, которое разделяет спокойную реакцию (СР) от теплового взрыва (ТВ). Условие касания определяется не только равенством (14), но и равенством производных левой и правой частей этого выражения  $(dq^+)/dt$  и  $(dq^-)/dt$ :

$$\frac{q_0\tau}{(\tau - t)^2} = S\chi v_{охл}. \quad (15)$$

Поделив равенство (14) на (15), получим «критическое» время  $t_k$  перехода от СР к ТВ

$$t_k = \frac{\tau}{2}. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (11), находим «критическое» значение начала взрывного процесса в точке  $C$ .

$$q_k^+ = 2q_0, \quad (17)$$

«Критическую» скорость охлаждения для начала ВК определяем из равенства (14) с учетом (16)

$$v_{охл}^+ = 2q_0/S\chi\tau, \quad (18)$$

Выше точки  $C$  кривая  $q^+(t)$  лежит выше прямой  $q^-(t)$ , т.е. тепловыделение превышает теплоотвод, а со временем разрыв между ними стремительно растет, что приводит к взрывной кристаллизации.

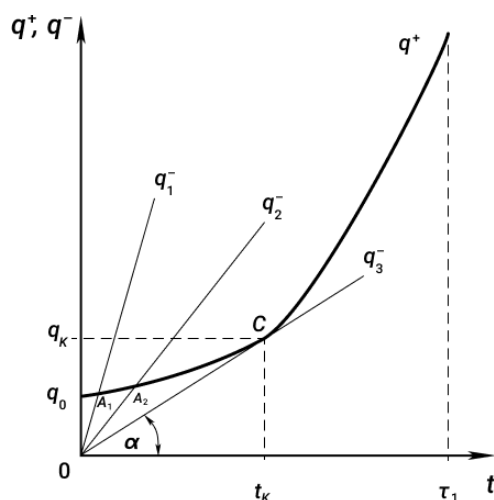


Рис. 4. Зависимость теплоприхода  $q^+$  и теплоотвода  $q_1^-$ ,  $q_2^-$ ,  $q_3^-$  от времени  $t$  протекания цепной реакции

**Выводы.** На основании термограмм охлаждения предложен и проанализирован механизм взрывной кристаллизации переохлажденных расплавов, основанный на процессе коагуляции наноразмерных зародышей кристаллов. Результаты трактуются с точки зрения известной теории цепных реакций взрывного типа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.Д. Кинетика зародышеобразования и массовой кристаллизации переохлажденных жидкостей и аморфных сред (Сборник избранных трудов) / В.Д. Александров. – Донецк: Донбасс, – 2011. – 590 с.
2. Коверда В.П. Спонтанная кристаллизация переохлажденных жидкостей / В.П. Коверда, В.П. Скрипов – М.: Наука, 1984. – 232 с.
3. Кидяров, Б.И. Кинетика образования кристаллов из жидкой фазы / Б.И. Кидяров. – Новосибирск: СО АН СССР, 1979. – 132 с.
4. Шибков А.А. Электромагнитная и акустическая эмиссия при взрывной кристаллизации переохлажденной капли воды / А.А. Шибков, М.А. Желтов, А.А. Королев и др. // Вестник Томского государственного университета. – 1999. – Т. 4. – С. 395-398.
5. Александров В.Д. Новые экзо- и эндотермические эффекты в расплаве теллура, обнаруженные методом ЦТА / В.Д. Александров, В.И. Петренко // Расплавы. – 1988. – Т. 2, № 5. – С. 29-34.
6. Александров В.Д. Термические эффекты при кристаллизации капель воды в естественных условиях / В.Д. Александров, А.А. Баранников // Журн. физ. химии. – 2000. – Т. 74, № 4. – С. 595-599.
7. Александров В.Д. Исследование влияния термической предыстории капель олова и свинца на их кристаллизацию методом циклического термического анализа / В.Д. Александров, А.А. Баранников // Хим. физ. – 1998. – Т. 17, № 10. – С. 140-147.
8. Александров В.Д. Исследование предкристаллизационных переохлаждений капель уксусной кислоты / В.Д. Александров, В.А. Постников, Н.В. Щебетовская // Новосибирского государственного университета. – 2014. – № 61. – С. 64-68.
9. Шкловский В.А. Взрывная кристаллизация аморфных веществ / В.А. Шкловский, В.М. Кузьменко // Успехи физ. наук. – 1989. – Т. 157, № 2. – С. 311-338.
10. Когай В.Я. Спонтанная взрывная кристаллизация и фазообразование в наноразмерной гетероструктуре селен/индий / В.Я. Когай, А.В.Вахрушев // Письма в Журнал технической физики. – 2013. – Т. 39, № 23. – С. 34-38.
11. Зубарев Е.И. Взрывная кристаллизация пленок аморфного кобальта на подслое углерода / Е.И. Зубарев, А.Ю. Девизенко, В.В. Кондратенко и др. // Металлофизика и новейшие технологии. – 2018. – Т. 40, № 3. – С. 359-379.
12. Уббелоде А.Р. Расплавленное состояние вещества / А.Р. Уббелоде – М.: Металлургия, 1982 – 376 с.
13. Chalmers, B. Principles of Solidification / B. Chalmers. – New York. London. Sidney: John Wiley Sons Inc., 1968. – 288 p.
14. Perepezko I.H. Nucleation in undercooled liquids / I.H. Perepezko // Materials Science and Engineering. – 1984. – Vol. 65, Iss. 1. – P. 125-135.
15. Volmer M. Kinetik der Phasenbildung / M. Volmer – Dresden-Leipzig, Steinkopf, 1982.
16. Christian J.W. The theory of Transformations in Metals and Alloys. P.1. Equilibrium and General Kinetic Theory / J.W. Christian – Pergamon Press, 1975.
17. Wunderlich B. Macromolecular Physics. V. 2 Crystal Nucleation, Annealing / B. Wunderlich –Academic Press. A Subsidiary of Harcourt Brace Sovanovich, Publishers, 1975.
18. Стромберг, А.Г. Физическая химия / А.Г. Стромберг, Д.П. Семченко. – М.: Высшая школа, 2001. – 529 с.
19. Александров В.Д. Анализ кинетики зародышеобразования и массовой кристаллизации переохлажденного расплава в соответствии с термограммами плавкости / В.Д. Александров, А.П. Зогуля, А.Ю. Соболев // Расплавы. Екатеринбург. – 2018. – № 3. – С. 350-358.
20. Александров В.Д. Метод расчета размеров зародышей при гомогенной кристаллизации из переохлажденной жидкости / В.Д. Александров, Е.А. Покинтелица // Журнал физической химии. – 2016. – Т. 90, № 9. – С. 1385-1388.
21. Свойства элементов: Справочник / Под ред. М.Е. Дрица – М.: Металлургия, 1985. – 672 с.
22. Семенов Н.Н. Цепные реакции / Н.Н. Семенов – Л.: Госхимтехиздат, 1934. – 556 с.
23. Акулов Н.С. Теория цепных реакций / Н.С. Акулов – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 336 с.
24. Андреев К.К. Теория взрывчатых веществ / К.К. Андреев, А.Ф. Беляев – М.: Оборонгиз, 1960. – 595 с.

25. Теория горения и взрыва / Под ред. А.В. Тотая и О.Г. Казакова – М.:Юрайт. 2018. – 295 с.

*Поступила в редакцию 18.05.2022 г.*

# NUCLEATION MECHANISM OF EXPLOSIVE CRYSTALLIZATION

S.A. Frolova, N.V. Shchebetovskaya, O.V. Sobol, A.Yu Sobolev

The analysis of the various stages of explosive crystallization: liquid phase clusterization, nucleation and coagulation of the nuclei are given. An attempt is made to explain the explosive crystallization phenomenon from the standpoint of the well-known principles of the chain reactions theory. It is proposed to consider crystal-like clusters and nanoscale crystal nuclei as the “building” material for crystal formation. It is shown that during coagulation of even two nuclei, energy equivalent to quanta of electromagnetic radiation is released, which contributes to the activation of the attachment of other nuclei by a chain mechanism. Calculations showed that during coagulation of many nuclei, sufficient heat is released to quickly heat the substance from the overcooling region to the melting temperature. By analogy with the well-known diagram of a thermal explosion according to Semenov, a similar diagram of the dependence of heat release and heat removal on time was constructed and analyzed. The critical values of the onset of the explosive process and the cooling rate of the liquid phase are found.

**Keywords:** melting, melt, superheating, overcooling, clusters, nuclei, nucleation, activation, coagulation, explosive crystallization.

## Фролова Светлана Александровна

кандидат химических наук, доцент кафедры физики и физического материаловедения ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, ДНР. E-mail: [primew65@mail.ru](mailto:primew65@mail.ru)

## Frolova Svetlana Alexandrovna

Candidate of Chemical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Physical Materials Science, SEI HPE «Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture», Makeevka, DPR. E-mail: [primew65@mail.ru](mailto:primew65@mail.ru)

## Щебетовская Наталья Витальевна

кандидат химических наук, доцент кафедры физики и физического материаловедения ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, ДНР. E-mail: [nvs\\_phyz@mail.ru](mailto:nvs_phyz@mail.ru)

## Shchebetovskaya Nataly Vitalievna

Candidate of Chemical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Physical Materials Science, SEI HPE «Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture», Makeevka, DPR. E-mail: [nvs\\_phyz@mail.ru](mailto:nvs_phyz@mail.ru)

## Соболь Оксана Викторовна

кандидат химических наук, доцент кафедры физики и физического материаловедения ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, ДНР. E-mail: [cluck@mail.ru](mailto:cluck@mail.ru)

## Sobol Oksana Viktorovna

Candidate of Chemical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Physical Materials Science, SEI HPE «Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture», Makeevka, DPR. E-mail: [cluck@mail.ru](mailto:cluck@mail.ru)

## Соболев Александр Юрьевич

кандидат технических наук, доцент кафедры физики и физического материаловедения ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, ДНР. E-mail: [a.u.sobolev@donnasa.ru](mailto:a.u.sobolev@donnasa.ru)

## Sobolev Alexander Yurievich

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Physical Materials Science, SEI HPE «Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture», Makeevka, DPR. E-mail: [a.u.sobolev@donnasa.ru](mailto:a.u.sobolev@donnasa.ru)

## Х И М И Ч Е С К И Е   Н А У К И

УДК 546.96:66.046.4:621.316.8

РОЛЬ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ФАЗ В ФОРМИРОВАНИИ  
ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТОЛСТОПЛЕНОЧНЫХ  
РУТЕНИЕВЫХ РЕЗИСТОРОВ© 2022. *Н.С. Лозинский, Я.А. Мороз, А.Н. Лопанов*

Методом рентгенофазового анализа определено содержание кристаллических фаз в рутениевых толсто пленочных резисторах, модифицированных оксидными соединениями титана(IV), ниобия(V) и вольфрама(VI). Изучены их электрофизические свойства – удельное поверхностное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления. Установлено, что с увеличением концентрации оксидных соединений титана(IV), ниобия(V) и вольфрама(VI) в резисторах увеличивается содержание кристаллических фаз:  $\alpha$ -кварца,  $\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$  и  $\text{PbWO}_4$ . Степень химического превращения  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$  в  $\text{RuO}_2$  в толсто пленочных резисторах зависит от состава стекла, модификатора и содержания других кристаллических фаз. Температурный коэффициент сопротивления толсто пленочных рутениевых резисторов в области отрицательных значений и удельное поверхностное сопротивление тем выше, чем больше содержание кристаллических фаз со свойствами диэлектрика (или полупроводника) образуется или вводится в качестве модификатора, а также, чем меньше образуется  $\text{RuO}_2$  из рутенита свинца при вжигании резистивных паст.

**Ключевые слова:** толсто пленочные рутениевые резисторы, оксидные соединения титана(IV), ниобия(V), вольфрама(VI).

**Введение.** Не смотря на более чем полувековую практику применения толсто пленочных рутениевых резисторов (ТПР) в электронной технике, вопросы о механизме проводимости, участия кристаллических фаз в этом процессе и их влияния на электрофизические свойства резисторов окончательно не решены [1, 2]. Очевидно, что это сдерживает темпы развития данной отрасли, вынуждая разработчиков толсто пленочных материалов использовать эмпирический подход для улучшения свойств ТПР [3–4]. Положительным следствием выполнения таких работ стало накопление значительного объема данных о модифицирующем действии ряда оксидных соединений на свойства ТПР [4–12]. В тоже время эти данные противоречивы, односторонне трактуют механизм регулирующего действия модификаторов, в них не уделено должного внимания роли других кристаллических фаз, кроме токопроводящей фазы (ТПФ), участвующих в формировании свойств ТПР [10, 13–26].

**Постановка задачи.** В настоящее время установлено, что рутениевые ТПФ вступают во взаимодействие с постоянными связующими (ПС) резистивных паст в процессе их вжигания. Характер взаимодействия определяется кислотно-основными свойствами (КОС) неорганических компонентов (НК), а появление продуктов взаимодействия с более высокой проводимостью приводит к падению удельного поверхностного сопротивления ( $\rho_s$ ) и росту в области положительных значений температурного коэффициента сопротивления (ТКС) толсто пленочных резисторов [15, 23, 27, 28]. Модификаторы  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  и  $\text{WO}_3$  со стеклами состава, мол.%  $\text{PbO}$  24,  $\text{SiO}_2$  59,  $\text{V}_2\text{O}_3$  14,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  3 с орбитальной электроотрицательностью Малликена  $\chi_M = 6,36$  и кислотностью  $K = 3,24$  увеличивают  $\rho_s$  резисторов и сдвигают их ТКС в область отрицательных значений независимо от содержания ТПФ в образцах. Эффект действия добавки  $\text{TiO}_2$  зависит от соотношения ТПФ/стекло в толсто пленочных резисторах. При отношении ТПФ/стекло = 20/80 эффект действия  $\text{TiO}_2$  аналогичен регулирующему действию модификаторов  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  и  $\text{WO}_3$ , тогда как при отношении ТПФ/стекло = 50/50

добавка  $\text{TiO}_2$  уже мало влияет на удельное поверхностное сопротивление резистора, но компенсирует его ТКС [4, 5, 11, 29, 30].

При этом, модифицирующий эффект соединений титана(IV), ниобия(V) или вольфрама(VI) объясняют следующими факторами: низким удельным сопротивлением как самого модификатора [29], так и продуктов взаимодействия соответствующего оксида –  $\text{PbWO}_4$  [9, 32] и  $\text{PbTiO}_3$  [25]; высокой растворимостью модификатора  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  в стекле, приводящей к изменению физико-химических свойств исходного стекла [5]; уменьшением локальной растворимости ионов рутения в стекле, разрыхлением структуры его сетки вследствие замещения  $\text{Si}^{4+}$  на  $\text{Ti}^{4+}$  и образованием изолирующего слоя на поверхности зерен ТПФ [11, 30, 31].

Сведения о поведении соединений ниобия(V) и вольфрама(VI) в резистивных пастах при термообработке противоречивы. Например, доказано, что оксид вольфрама(VI) вступает во взаимодействие, как с оксидом свинца, так и со стеклом состава: мол. %:  $\text{PbO}$  39,  $\text{SiO}_2$  15, и  $\text{B}_2\text{O}_3$  46 ( $\chi_M=6,17$ ,  $K=1,56$ ) с образованием  $\text{PbWO}_4$  [7, 9]. Однако в работах [29, 33–35] показано, что  $\text{WO}_3$  индифферентен к стеклам составов: мол. %:  $\text{PbO}$  41,  $\text{SiO}_2$  39,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  4,  $\text{B}_2\text{O}_3$  6 и  $\text{TiO}_2$  10 ( $\chi_M=6,43$ ,  $K=1,42$ );  $\text{PbO}$  33,  $\text{SiO}_2$  24,  $\text{B}_2\text{O}_3$  43 ( $\chi_M=6,21$ ,  $K=1,98$ );  $\text{PbO}$  30 и  $\text{B}_2\text{O}_3$  70, ( $\chi_M=6,14$ ,  $K=2,33$ ), а также в системе  $35\text{Pb}_3\text{O}_4\text{--}60\text{SiO}_2\text{--}(5\text{--}x)\text{ZnO--}x\text{WO}_3$  ( $0 \leq x \leq 5$  мол. %).

Известно, что в системе  $\text{PbO--Nb}_2\text{O}_5$  в интервале температур 500–700 °C образуются несколько ниобатов свинца, в том числе  $\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$  [36, 37]. Кроме того, взаимодействие протекает в стеклах систем  $\text{Na}_2\text{O--PbO--Nb}_2\text{O}_5\text{--SiO}_2$  и  $\text{PbO--BaO--Na}_2\text{O--Nb}_2\text{O}_5\text{--SiO}_2$  в интервале температур от 750 до 900 °C [38, 39]. В системе  $\text{Pb}_2\text{O}_3\text{--RuO}_2\text{--Nb}_2\text{O}_5$  при термообработке образцов при 650 °C оксид ниобия образует твердый раствор с рутением свинца и соединение  $\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$  [6, 24]. Однако в работах [5] и [40] в резистивных пастах со стеклом системы  $\text{PbO--SiO}_2\text{--Al}_2\text{O}_3$ , модифицированных  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  [5], а также в стеклах системы  $\text{Pb}_2\text{P}_2\text{O}_7\text{--Nb}_2\text{O}_5$ , содержащих до 60 мол. %  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  [40], химического взаимодействия не обнаружено. Сведения о системах  $\text{RuO}_2\text{--M}_x\text{O}_y$ , где  $M$  –  $\text{Ti}$ ,  $\text{Nb}$ ,  $\text{W}$ ;  $\text{PbO--RuO}_2\text{--TiO}_2$ ;  $\text{PbO--SiO}_2\text{--RuO}_2$ ;  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_{6,5}\text{--PbO--SiO}_2\text{--B}_2\text{O}_3$ ;  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_{6,5}\text{--}m\text{PbO--}n\text{B}_2\text{O}_3$  систематизированы в работах [28, 41].

Целью данной работы является выяснение роли кристаллических фаз на основе соединений титана(IV), ниобия(V) и вольфрама(VI) на формирование электрофизических свойств резисторов.

**Экспериментальная часть.** Методики получения, нанесения и вжигания резистивных паст, измерения их электрофизических свойств ( $\rho S$  и ТКС) и проведения рентгенофазового анализа (РФА) приведены в работе [27]. В качестве ТПФ выбран рутенит свинца ( $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$ ) и диоксид рутения ( $\text{RuO}_2$ ). Составы и кислотность использованных стекол приведены в табл. 1. Пасты с ПС одного состава содержали одинаковую объемную долю ТПФ (например, мас. %:  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6/\text{стекло } C_2 = 35/65$  и  $\text{RuO}_2/\text{стекло } C_2 = 31/69$ ). Модификаторы вводили в ТПФ резистивных пленок в количествах 0,5–10 мас. % в пересчете на оксиды.

Таблица 1

Код, состав и кислотно-основные свойства (КОС) стекол

| Код стекла | Состав, мол. % |                  |                                                                                                                                          | КОС  |               |
|------------|----------------|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|---------------|
|            | PbO            | SiO <sub>2</sub> | Другие оксиды                                                                                                                            | K    | $\chi_M$ , эВ |
| C1         | 70,78          | 29,22            | –                                                                                                                                        | 0,41 | 6,16          |
| C2         | 32,30          | 39,90            | $\text{B}_2\text{O}_3$ 17,20; $\text{Al}_2\text{O}_3$ 4,70 $\text{CdO}$                                                                  | 1,89 | 6,25          |
| C3         | 12,44          | 53,98            | $\text{B}_2\text{O}_3$ 7,89; $\text{Al}_2\text{O}_3$ 0,62; $\text{MgO}$ 2,88; $\text{BaO}$ 16,66; $\text{SrO}$ 3,16; $\text{ZrO}_2$ 2,40 | 1,82 | 6,11          |

Синтез  $\text{PbWO}_4$ ,  $\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$ ,  $\text{PbTiO}_3$  осуществляли по керамической технологии спеканием при температуре 900 °C в течение 4 часов из соответствующих оксидов

квалификации "осч", взятых в стехиометрическом соотношении, и идентифицировали методом РФА.

### Результаты и обсуждение.

Результаты по определению содержания кристаллических фаз в ТПР, модифицированных оксидными соединениями титана(IV), ниобия(V) и вольфрама(VI), показаны на рис. 1–4, свойства этих материалов ( $\rho_s$  и ТКС) приведены на рис. 5 и в табл. 2–5.

Вжигание резистивных паст сопровождается комплексом физико-химических и химических процессов между ингредиентами паст, зависящих от их кислотно-основных свойств, протекающих по схемам [1, 15, 27, 28]:

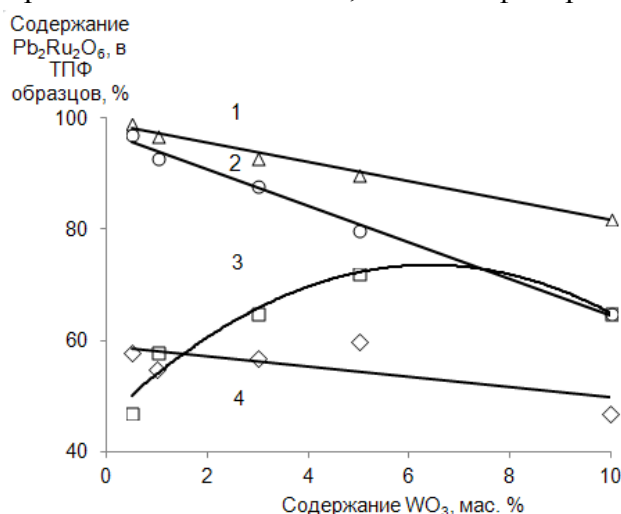
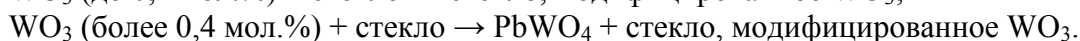
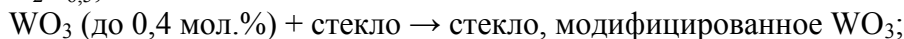
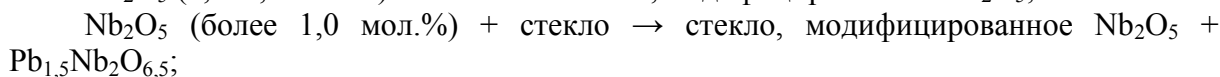
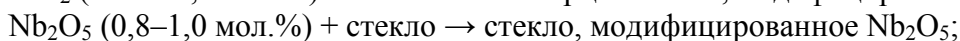
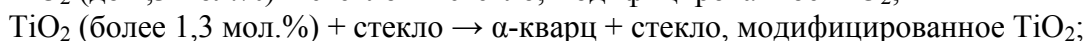
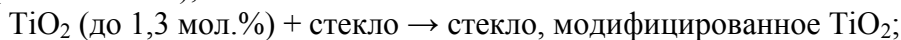
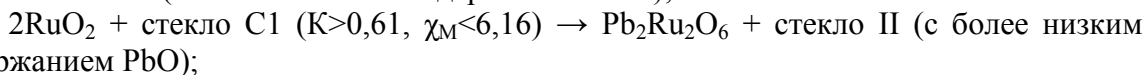
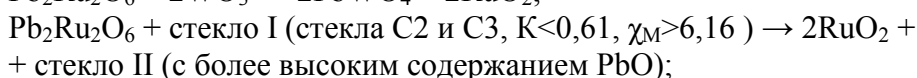
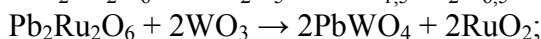
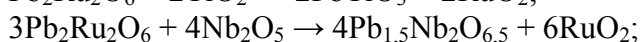
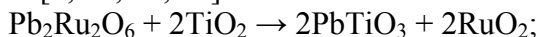
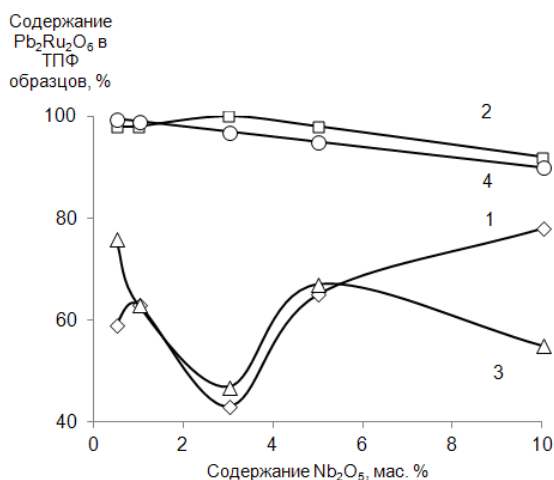
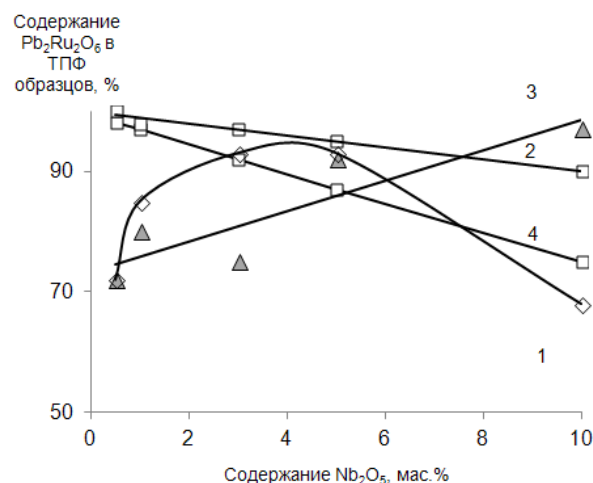


Рис. 1. Влияние модификаторов  $\text{WO}_3$  (4) и  $\text{PbWO}_4$  (3) на содержание  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$  в ТПФ резисторов; 1, 2 – содержание  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$  в исходных пастах с добавками  $\text{WO}_3$  и  $\text{PbWO}_4$ .



а



б

Рис. 2. Влияние модификаторов  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  (а) и  $\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$  (б) на содержание  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$  в ТПФ резисторов, на основе стекла C2 (1), C1 (2), C3 (3); 4 – содержание рутенита свинца в пастах до вжигания.

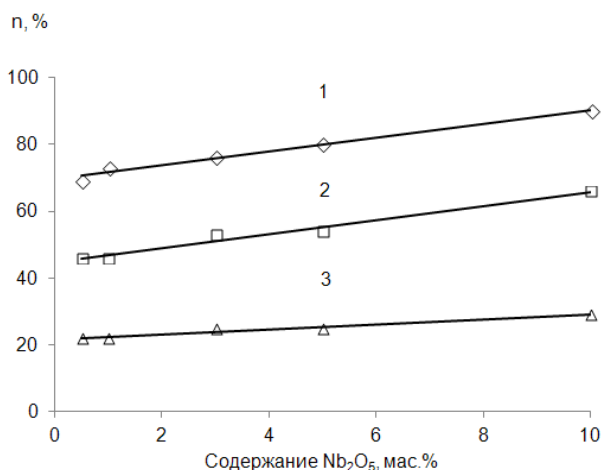


Рис. 3. Определение степени протекания реакции образования  $Pb_{1,5}Nb_2O_{6,5}$  (n, %) в резисторах на основе стекол C1 (1), C2 (2), C3 (3) и  $Nb_2O_5$ .

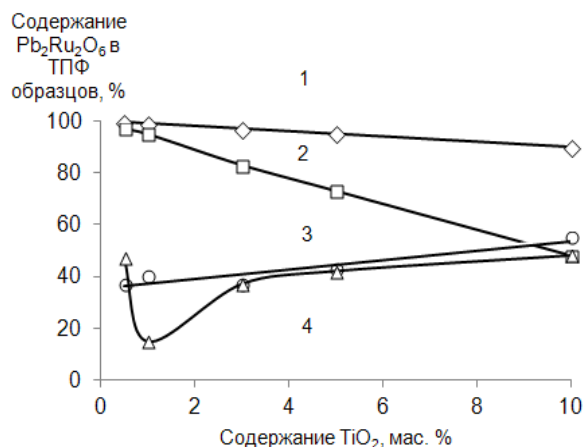


Рис. 4. Характер влияния  $TiO_2$  (4) и  $PbTiO_3$  (3) на содержание  $Pb_2Ru_2O_6$  в ТПФ резисторов на основе стекла C2; 1 – содержание рутенита свинца в пастах до вжигания; 2 – расчетное содержание рутенита свинца при стехиометрическом взаимодействии между ТПФ и  $TiO_2$ .

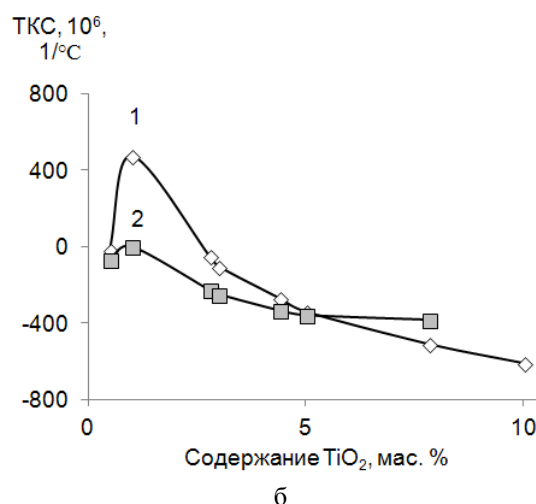
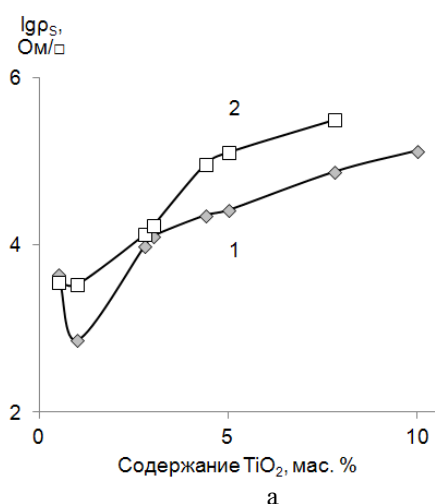


Рис. 5. Характер влияния  $TiO_2$  (1) и  $PbTiO_3$  (2) на удельное поверхностное сопротивление (а) и ТКС (б) модифицированных толсто пленочных резисторов на основе  $Pb_2Ru_2O_6$  и стекла C2.

Таблица 2  
Удельное поверхностное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления (ТКС) модифицированных толсто пленочных резисторов на основе  $Pb_2Ru_2O_6$  и стекла C2

| № п/п | Модификатор (М) | Содержание М в ТПФ, мас. % |                      | $\rho_s$ , кОм/□ | ТКС, $10^6$ , $1/^\circ C$ в интервале температур, $^\circ C$ |        |
|-------|-----------------|----------------------------|----------------------|------------------|---------------------------------------------------------------|--------|
|       |                 | М                          | В пересчете на оксид |                  | 25-125                                                        | -60-25 |
| 1     | 2               | 3                          | 4                    | 5                | 6                                                             | 7      |
| 1     | $WO_3$          | 0,5                        | 0,5                  | 2,01             | 80                                                            | 133    |
|       |                 | 1,0                        | 1,0                  | 1,47             | 120                                                           | 108    |
|       |                 | 3,0                        | 3,0                  | 1,84             | 80                                                            | 105    |
|       |                 | 5,0                        | 5,0                  | 1,74             | 99                                                            | 95     |
|       |                 | 10,0                       | 10,0                 | 1,77             | 83                                                            | 90     |
| 2     | $Nb_2O_5$       | 0,5                        | 0,5                  | 1,14             | 162                                                           | 201    |
|       |                 | 1,0                        | 1,0                  | 1,31             | 157                                                           | 276    |

Продолжение табл. 2

|   |                                                    |      |      |        |      |      |
|---|----------------------------------------------------|------|------|--------|------|------|
|   |                                                    | 3,0  | 3,0  | 6,19   | -56  | -73  |
|   |                                                    | 5,0  | 5,0  | 12,64  | -156 | -102 |
|   |                                                    | 10,0 | 10,0 | 17,88  | -297 | -269 |
| 3 | Nb <sub>2</sub> O <sub>5</sub> в стекле C2         | 1,4  | 1,4  | 0,86   | 543  | 503  |
|   |                                                    | 2,9  | 2,9  | 3,38   | 86   | 63   |
|   |                                                    | 8,6  | 8,6  | 12,46  | 46   | 78   |
|   |                                                    | 14,3 | 14,3 | 165,0  | -77  | -62  |
| 4 | PbWO <sub>4</sub>                                  | 1,0  | 0,5  | 1,89   | 262  | 310  |
|   |                                                    | 2,0  | 1,0  | 1,76   | 108  | 241  |
|   |                                                    | 5,9  | 3,0  | 1,79   | 57   | 152  |
|   |                                                    | 9,8  | 5,0  | 2,59   | -35  | 48   |
|   |                                                    | 19,6 | 10,0 | 4,20   | -192 | -27  |
| 5 | Pb <sub>1,5</sub> Nb <sub>2</sub> O <sub>6,5</sub> | 0,5  | 0,2  | 2,26   | -84  | -64  |
|   |                                                    | 1,0  | 0,4  | 2,66   | -92  | -110 |
|   |                                                    | 3,0  | 1,3  | 6,94   | -176 | -198 |
|   |                                                    | 5,0  | 2,9  | 20,17  | -290 | -316 |
|   |                                                    | 10,0 | 4,4  | 135,90 | -306 | -354 |

Таблица 3

Удельное поверхностное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления  
модифицированных толсто пленочных резисторов на основе RuO<sub>2</sub> и стекла C2

| №<br>п/п | Модификатор (М)                | Содержание М в<br>ТПФ, мас. % | $\rho_s$ , Ом/□ | ТКС, 10 <sup>6</sup> , 1/°C в интервале<br>температур 25-125°C |
|----------|--------------------------------|-------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------|
| 1        | WO <sub>3</sub>                | 0,5                           | 132             | 743                                                            |
|          |                                | 1,0                           | 117             | 625                                                            |
|          |                                | 3,0                           | 247             | 360                                                            |
|          |                                | 5,0                           | 193             | 454                                                            |
|          |                                | 10,0                          | 226             | 412                                                            |
| 2        | Nb <sub>2</sub> O <sub>5</sub> | 0,5                           | 164             | 221                                                            |
|          |                                | 1,0                           | 214             | 74                                                             |
|          |                                | 3,0                           | 235             | -117                                                           |
|          |                                | 5,0                           | 390             | -139                                                           |
|          |                                | 10,0                          | 883             | -219                                                           |

Таблица 4

Удельное поверхностное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления  
модифицированных толсто пленочных резисторов на основе Pb<sub>2</sub>Ru<sub>2</sub>O<sub>6</sub> и стекла C1

| №<br>п/п | Модификатор (М)                                    | Содержание М в ТПФ<br>в пересчете на оксид,<br>мас. % | $\rho_s$ , кОм/□ | ТКС, 10 <sup>6</sup> , 1/°C в интервале<br>температур<br>25-125°C |
|----------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1        | Nb <sub>2</sub> O <sub>5</sub>                     | 0,5                                                   | 0,55             | -70                                                               |
|          |                                                    | 1,0                                                   | 0,62             | -140                                                              |
|          |                                                    | 3,0                                                   | 2,09             | -360                                                              |
|          |                                                    | 5,0                                                   | 3,12             | -480                                                              |
|          |                                                    | 10,0                                                  | 5,04             | -500                                                              |
| 2        | Pb <sub>1,5</sub> Nb <sub>2</sub> O <sub>6,5</sub> | 0,5                                                   | 1,10             | -280                                                              |
|          |                                                    | 1,0                                                   | 1,51             | -300                                                              |
|          |                                                    | 3,0                                                   | 4,52             | -560                                                              |
|          |                                                    | 5,0                                                   | 5,81             | -670                                                              |
|          |                                                    | 10,0                                                  | 8,21             | -760                                                              |

Таблица 5

Удельное поверхностное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления  
модифицированных толстопленочных резисторов на основе стекла СЗ

| №<br>п/п | ТПФ                                            | Модификатор<br>(М)                                 | Содержание М в<br>ТПФ в пересчете<br>на оксид, мас. % | ρ <sub>S</sub> , кОм/□ | ТКС, 10 <sup>6</sup> , 1/°С в<br>интервале температур<br>25-125°С |
|----------|------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1        | Pb <sub>2</sub> Ru <sub>2</sub> O <sub>6</sub> | Nb <sub>2</sub> O <sub>5</sub>                     | 0,5                                                   | 50,12                  | −273                                                              |
|          |                                                |                                                    | 1,0                                                   | 100,00                 | −350                                                              |
|          |                                                |                                                    | 3,0                                                   | 371,54                 | −415                                                              |
|          |                                                |                                                    | 5,0                                                   | 630,96                 | −450                                                              |
|          |                                                |                                                    | 10,0                                                  | 2137,96                | −540                                                              |
| 2        |                                                | Pb <sub>1,5</sub> Nb <sub>2</sub> O <sub>6,5</sub> | 0,5                                                   | 25,12                  | −183                                                              |
|          |                                                |                                                    | 1,0                                                   | 50,12                  | −210                                                              |
|          |                                                |                                                    | 3,0                                                   | 223,87                 | −275                                                              |
|          |                                                |                                                    | 5,0                                                   | 426,58                 | −298                                                              |
|          |                                                |                                                    | 10,0                                                  | 831,76                 | −340                                                              |
| 3        | RuO <sub>2</sub>                               | Nb <sub>2</sub> O <sub>5</sub>                     | 0,5                                                   | 3,02                   | −11                                                               |
|          |                                                |                                                    | 1,0                                                   | 3,98                   | −60                                                               |
|          |                                                |                                                    | 3,0                                                   | 5,02                   | −170                                                              |
|          |                                                |                                                    | 5,0                                                   | 7,94                   | −270                                                              |
|          |                                                |                                                    | 10,0                                                  | 22,91                  | −340                                                              |
| 4        |                                                | Pb <sub>1,5</sub> Nb <sub>2</sub> O <sub>6,5</sub> | 0,5                                                   | 10,00                  | −61                                                               |
|          |                                                |                                                    | 1,0                                                   | 10,47                  | −130                                                              |
|          |                                                |                                                    | 3,0                                                   | 17,78                  | −190                                                              |
|          |                                                |                                                    | 5,0                                                   | 30,20                  | −290                                                              |
|          |                                                |                                                    | 10,0                                                  | 67,61                  | −480                                                              |

В исследованных образцах эти процессы приводят к образованию кристаллических фаз RuO<sub>2</sub>, PbWO<sub>4</sub>, Pb<sub>1,5</sub>Nb<sub>2</sub>O<sub>6,5</sub> и  $\alpha$ -кварца, содержание которых растет с увеличением концентрации оксидных соединений титана(IV), ниобия(V) и вольфрама(VI) [27, 28]. При этом концентрация Pb<sub>1,5</sub>Nb<sub>2</sub>O<sub>6,5</sub> в ТПР, модифицированных Nb<sub>2</sub>O<sub>5</sub>, предопределяется составом стекла и возрастает с увеличением в нем содержания оксида свинца (рис. 3, табл. 1). Степень разрушения Pb<sub>2</sub>Ru<sub>2</sub>O<sub>6</sub> в ТПР предопределяется составом стекла, модификатора и содержанием других кристаллических фаз (рис. 1, 2, 4). Взаимодействие PbTiO<sub>3</sub>, Pb<sub>1,5</sub>Nb<sub>2</sub>O<sub>6,5</sub>, и PbWO<sub>4</sub> с Pb<sub>2</sub>Ru<sub>2</sub>O<sub>6</sub> или стеклами не установлено [27].

Сравнительный анализ данных РФА (рис. 1–4) и электрофизических испытаний (рис. 5, табл. 2–5) показал, что  $\rho_s$  и ТКС резисторов предопределяются составом и содержанием токопроводящей фазы, постоянного связующего, модификатора и других кристаллических соединений. При этом резисторы, полученные из паст на основе RuO<sub>2</sub>, имеют более низкое удельное поверхностное сопротивление и более высокое значение ТКС, чем резисторы на основе Pb<sub>2</sub>Ru<sub>2</sub>O<sub>6</sub> (табл. 2, 3, 5). Резисторы, изготовленные из паст, модифицированных оксидами, имеют более низкие удельное поверхностное сопротивление и ТКС в области отрицательных значений, чем резисторы, пасты которых были модифицированы их свинцовыми солями (табл. 2, 4, 5). Эффективность увеличения  $\rho_s$  резисторов оксидными модификаторами согласуется с удельным объемным сопротивлением ( $\rho_v$ ) соответствующих свинцовых солей: PbWO<sub>4</sub> < PbTiO<sub>3</sub> < Pb<sub>1,5</sub>Nb<sub>2</sub>O<sub>6,5</sub>, образующихся в их массе или вводимых в состав резистивных паст [27]. Удельное поверхностное сопротивление и ТКС (в области отрицательных значений) резисторов растет с уменьшением содержания PbO в составе их постоянных связующих – свинцовосиликатных стекол (табл. 1). При содержании TiO<sub>2</sub> 1 мас.%, направление изменения свойств ТПР меняет знак на противоположный (рис. 4). По-видимому, это

граница раздела двух материалов, различающихся по составу и свойствам, а именно, 1 –  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$  –  $\text{RuO}_2$  – модифицированное стекло [42] и 2 –  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$  –  $\text{RuO}_2$  – модифицированное стекло – кристаллическая фаза; первый резистивный материал содержит две кристаллические фазы, а второй – три.

Помимо рассмотренных, при формировании толстых пленок происходит процесс частичного растворения соединений рутения в стеклах [2, 5, 20, 28]. Однако этот процесс оказывает существенное влияние на формирование электрофизических свойств ТПР при содержании токопроводящей фазы ниже 20 об.% [2].

**Выводы.** Установлена роль кристаллических фаз в формировании электрофизических свойств резисторов на основе рутенита свинца, которые регулируют содержание  $\text{RuO}_2$ , в их составе, образующегося в результате химических взаимодействий, предопределяющихся кислотно-основными свойствами неорганических ингредиентов резистивных паст, и компенсируют проводимость за счет собственных полупроводниковых или диэлектрических свойств. При этом, чем больше содержание кристаллических фаз образуется в ТПР ( $\alpha$ -кварц,  $\text{PbWO}_4$  или  $\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$ ) или вводится в резистивный материал ( $\text{PbWO}_4$ ,  $\text{Pb}_{1,5}\text{Nb}_2\text{O}_{6,5}$  и  $\text{PbTiO}_3$ ) и меньше образуется  $\text{RuO}_2$ , тем выше поверхностное сопротивление и более низкий ТКС резисторов. Кристаллические фазы с более высоким объемным сопротивлением, не зависимо от того вводятся они или образуются при вжигании в резистивной пасте, более эффективно снижают проводимость получаемого толстопленочного резистора.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Murthy K.S.R.C. Evolution of conduction mechanism in thick film resistors // Int. J. Adv. Res. – 2019. – Vol. 7, No 4. – P. 238–256.
2. Abdurakhmanov G. On the conduction mechanism of silicate glass doped by oxide compounds of ruthenium (thick film resistors). 3. The minimum of temperature dependence of resistivity // World J. Condens. Matter Phys. (WJCMP). – 2014. – Vol. 4. – P. 166–178.
3. Недорезов В.Г., Подшибякин С.В., Юрков Н.К. Резистивные пасты на основе нанодисперсных порошков соединения рутения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 133–141.
4. Inokuma T., Taketa Y. Control of electrical properties of  $\text{RuO}_2$  thick film resistors // Active and Passive Elec. Comp. – 1987. – Vol. 12. – P. 155–166.
5. Cheng C.-T., Lin J.-T., Lin H.-C. Addition of  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  on the electrical properties of buried resistors in low-temperature cofired ceramics // J. Mater. Res. – 2003. – Vol. 18, No 5. – P. 1211–1218.
6. Пат. 3778389 США, МКИ H01b 1/06 Electro-conductive material containing  $\text{PbO}$  and  $\text{RuO}_2$  / T.Kasanami, O. Kano; Murata Manufacturing Co., Ltd. – N 101515; заявл. 28.12.70; опубл. 12.12.73.; РЖ Химия. – 1974. – 21Л100. – 8 с.
7. Мороз Я.А., Шевцова Н.А., Волков В.И., Кривобок В.И. Химическое взаимодействие в резисторах на основе рутенита свинца с добавкой оксида вольфрама (VI) // Изв. АН СССР: Неорган. материалы. – 1984. – Т. 20, № 3. – С. 868.
8. Пат. 2033648 РФ, МПК<sup>СН</sup> 01 С 7/00 Паста для изготовления толстопленочных резисторов /Заявитель(и): Башкирский гос. ун-тим.40-летия Октября, НИИ электронных систем коммутации, Гос. центральный научно-исследовательский, проектный и конструкторский институт драгоценных металлов и алмазов. Автор(ы): В.В. Лисицкий, Ш.З. Измайлов, Ю.С. Шориков, Е.А. Румянцева. Патентообладатель(ли): В.В. Лисицкий, Ш.З. Измайлов, Ю.С. Шориков, Е.А. Румянцева. – №4805454/21; заявл.29.12.1989; опубл. 20.04.1995; БИ.– 1995.– №11.– С. 211. – 6 с.
9. Пат. 4464421 США, МКИ H01C 7/00, H01C 17/06, H01C 17/30 Glass frits containing  $\text{WO}_3$  or  $\text{MoO}_3$  in  $\text{RuO}_2$ -based resistors / R.G. Howell; Corning Glass Works. –N 546321; заявл. 28.10.83; опубл. 07.08.84; Изобр. стран мира. – 1985. – Т. 119, №4. – С. 27. – 10 с.
10. Fu S.-L., Hsi C.-S., Kang C.-Y., Chen H.-P., Wang S.-J. Investigations of lead-free glasses for post-fired and embedded thick film resistors// Key Eng. Mater. – 2014. – Vol. 573. – P. 137–142.
11. Cheng C.-T., Lin J.-T., Hung Y.-C. Addition of  $\text{TiO}_2$  on the electrical properties of buried resistors in low-temperature cofired ceramics // J. Mater. Res. – 2003. – Vol. 18, No 9. – P. 2235–2242.

12. Красов В.Г., Могилева Л.Н., Пуронене Э.М., Турчина Г.В. Рутениевые пасты для создания прецизионных постоянных и переменных толстопленочных резисторов // Электронная промышленность. – 1980. – № 8(92)–9(93). – С. 84–87.
13. Hrovat M., Belavič D., Benčan A., Holc J., Dražič G. A characterization of thick-film PTC resistors // Sens. Actuator A Phys. – 2005. – Vol. 117. – P. 256–266.
14. Dimitrov V., Komatsu T. An interpretation of optical properties of oxides and oxide glasses in terms of the electronic ion polarizability and average single bond strength (Review) // J. Univ. Chem. Technol. Metall. – 2010. – Vol. 45, No 3. – P. 219–250.
15. Pešič, L. A review of thick-film glass resistors // Microelectron. J. – 1988. – Vol. 19, No 4. – P. 71–87.
16. Hrovat M., Holc J., Belavič D., Bernard J. Subsolidus phase equilibria in the PbO-poor part of RuO<sub>2</sub>–PbO–SiO<sub>2</sub> system // Mat. Let. – 2006. – Vol. 60, No 20. – P. 2501–2503.
17. Hrovat M., Belavič D., Holc J., Bernard J., Bencan A., Cilenšek J. The interactions of conductive and glass phase in thick-film resistors during firing // Inf. MIDEM – Ljubljana. – 2004. – Vol. 34, No 1. – S. 7–10.
18. LepikhYa.I., Lavrenova T.I. Dependence of nanocomposite system «Glass – Pb<sub>2</sub>Ru<sub>2</sub>O<sub>6</sub>, RuO<sub>2</sub>» electrophysical parameters on properties of a glass and structurally-phase transformations // Inform. Telecom. Sc. – 2016. – Vol. 7, No 2. – P. 5–8.
19. Vionnet-Menot S., Grimaldi C., Maeder Th., Ryser P. Study of electrical properties of piezoresistive pastes and determination of the electrical transport // J. Eur. Ceram. Soc. – 2005. – Vol. 25, No 12. – P. 2129–2132.
20. Adachi K., Kuno H. Decomposition of ruthenium oxides in lead borosilicate glass // J. Am. Ceram. Soc. – 1997. – Vol. 80, No 5. – P. 1055–1064.
21. Ting C.-J., Hsi C.-S., Lu H.-Y. Interactions between ruthenia-based resistors and cordierite–glass substrates in low-temperature co-fired ceramics // J. Amer. Ceram. Soc. – 2004. – Vol. 83, No 12. – P. 2945–2953.
22. Prudenziati M., Morten B., Cilloni F., Ruffi G., Sacchi M. Interactions between alumina and high lead glasses for hybrid components // J. Appl. Phys. – 1989. Vol. 65, No 1. – P. 146–153.
23. Kielbasiński K., Szałapak J., Krzemiński Ja., Młodziński A., Jakubowska M., Szostak S. Stabilność wysokotemperaturowa ekologicznych rezystorów grubowarstwowych // Materiały Elektroniczne (Electronic Materials). – 2016. – T. 44, Nr. 2. – S. 17–26.
24. Asada E., Nakagome M. Electrical resistance composition and resistance element: US Patent 3776772, 1973.
25. Пат. 957284 РФ МПК H01C 7/00 Резистивная композиция Заявитель(и): Предприятие п/я Г-4645. Автор(ы): Ю.П.Тризна, Л.И. Панов, В.Н. Федоров, В.Р. Соколовский, Н.Г. Соколовская. – № 3256727; заявл.05.03.81; опубл.07.09.82; БИ. – 1982. – №33. – С. 243. – 2 с.
26. Пат. 3637530СИАМКИ H01C17/0654 Resistor composition / M.E.A. Casale, O.N. Coiller, G.S. Iles; Johnson Matthey & Co., Ltd. – N 9995; заявл. 10.02.70; опубл. 25.01.72; Изобр. за рубежом. – 1972. – Т. 30, №4. – С. 32. – 10 с.
27. Lopanov A.N., Lozinskyy N.S., Moroz Ya.A. Chemical processes accompanying the formation of modified ruthenium resistors and their functional properties // Russ. Chem. Bull. Int. Ed. – 2020. – Vol. 69, No 9. – P. 1–7.
28. Lozinskii N.S., Lopanov A.N., Moroz Ya.A. Compositions, physical and chemical properties, and compatibility of lead–boron–silicate glass with ruthenium(IV) oxide compounds // Glass Phys. Chem. – 2021. Vol. 47, No 2. – P. 154–165.
29. Lefort M.-H., Djafari V., Jouffrey B., Savary C. Thick film piezoresistive ink: Application to pressure sensors // Int. Microelectron. Packag. Soc. – 2000. – Vol. 23, No 2. P. – 191–202.
30. Chiang Y.-M., Silverman L.A., French R.H., Cannon R.M. Thin glass film between ultrafine conductor particles in thick-film resistors // J. Am. Ceram. Soc. – 1994. – Vol. 77, No 5. – P. 1143–1152.
31. Taketa Y., Haradome M. High-frequency-discharge trimming of RuO<sub>2</sub>-based thick-film resistors. Part II: Mechanism of resistance change // IEEE Trans. Parts. Hybrids Pack. – 1973. – Vol. PHP-9, No 2. – P. 94–104.
32. Boonstra A.H., Mutsaers C.A.H.A., van der Kruijs F.N.G.R. Thick-film resistors with a small TCR value based and lead rhodate and a barium rhodate as conductive materials // Ceram. Bull. – 1980. – Vol. 59, No 8. – P. 842–843.
33. Garde A.S. Nature and behaviour of WO<sub>3</sub> thick film resistors properties when subjected to firing temperature // Adv. Ceram. Sci. Engrg. – 2014. – Vol. 3. – P. 18–24.
34. Singh G.P., Singh D.P. Effect of WO<sub>3</sub> on structural and optical properties of PbO–B<sub>2</sub>O<sub>3</sub> glasses. // Can. J. Phys. – 2011. – Vol. 89, No 12. – P. 1281–1285.
35. Alomairy S., Al-Buriah M.S., Wahab E.A.A., Sriwunkum C., Shaaban K.S. Synthesis, FTIR, and neutron/charged particle transmission properties of Pb<sub>3</sub>O<sub>4</sub>–SiO<sub>2</sub>–ZnO–WO<sub>3</sub> glass system // Ceram. Int. – 2021. – Vol. 47, No 12. – P. 17322–17330.
36. Mirsaneh M., Hayden B.E., Miao S., Pokorny J., Perini S., Furman E., Lanagan M.T., Ubie R., Reaney I.M. High throughput synthesis and characterization of the PbnNb<sub>2</sub>O<sub>5+n</sub> (0.5 < n < 4.1) system on a single chip // Acta Mater. – 2011. – Vol. 59, No 5. – P. 2201–2209.

37. Park H., Lee K.-S. Reaction mechanism in the formation of PMN-PT-BT solid solution // J. Korean Ceram. Soc. – 1994. – Vol. 31, No 12. – P. 1443–1448.
38. Du J., Jones B., Lanagan M. Preparation and characterization of dielectric glass-ceramics in  $\text{Na}_2\text{O-PbO-Nb}_2\text{O}_5\text{-SiO}_2$  system // Mater. Lett. – 2005. – V.59, No 22. – P. 2821–2826.
39. Zhang Q., Luo J., Tang Q., Han D., Zhou Yi, Du J. Nanocomposite dielectrics in  $\text{PbO-BaO-Na}_2\text{O-Nb}_2\text{O}_5\text{-SiO}_2$  system with high breakdown strength for high voltage capacitor applications // J. Nanosci. Nanotechnol. – 2012. – Vol. 12, No 11. – P. 8832–8835.
40. Manzani D., Gualberto T., Almeida J.M.P., Montesso M., Mendonca C.R., Rivera V.A.G., De Boni L., Nalin M., Ribeiro S.J.L. Highly nonlinear  $\text{Pb}_2\text{P}_2\text{O}_7\text{-Nb}_2\text{O}_5$  glasses for optical fiber production // J. Non-Cryst. Solids. – 2016. – Vol. 443. – P. 82–90.
41. Лозинский Н.С., Мороз Я.А. Высокотемпературные твердофазные реакции в оксидных системах с участием соединений рутения (IV) // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 3-4. – С. 114–126.
42. Романенко Д.А., Михалкович Л.М., Мальцев В.Г., Гольцов Ю.И. Электрические свойства спеченных стекол тройных оксидных систем  $\text{PbO-SiO}_2\text{-V}_2\text{O}_5$  ( $\text{CrO}_3$ ,  $\text{WO}_3$ ,  $\text{MoO}_3$ ) // Журн. прикл. химии. – 1981. – Т. 65, №5. – С. 1017–1020.

*Поступила в редакцию 20.05.2022 г.*

## THE ROLE OF CRYSTAL PHASES IN THE FORMATION OF THE ELECTROPHYSICAL PROPERTIES OF THICK FILM RUTHENIUM RESISTORS

*N. Lozinskii, Y. Moroz, A. Lopanov*

The content of crystalline phases in thick-film ruthenium resistors modified with oxide compounds of titanium(IV), niobium(V), and tungsten(VI) was determined by X-ray phase analysis. Their electrophysical properties – specific surface resistance and temperature coefficient of resistance – have been studied. It has been established that with an increase in the concentration of oxide compounds of titanium(IV), niobium(V) and tungsten(VI) in resistors, the content of crystalline phases increases:  $\alpha$ -quartz,  $\text{Pb}_{1.5}\text{Nb}_2\text{O}_{6.5}$  and  $\text{PbWO}_4$ . The degree of chemical transformation of  $\text{Pb}_2\text{Ru}_2\text{O}_6$  into  $\text{RuO}_2$  in thick film resistors depends on the composition of the glass, the modifier, and the content of other crystalline phases. The temperature coefficient of resistance of thick-film ruthenium resistors in the region of negative values and the specific surface resistance are the higher, the greater the content of crystalline phases that have the properties of a dielectric (or semiconductor) or are introduced as a modifier. is formed, and also the less  $\text{RuO}_2$  is formed from lead ruthenite during firing of resistive pastes.

**Keywords:** thick-film ruthenium resistors, oxide compounds of titanium(IV), niobium(V), tungsten(VI).

### **Лозинский Николай Степанович**

кандидат технических наук; старший научный сотрудник, ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: lozinsky58@mail.ru

### **Lozinskii Nikolai**

Candidate of Technical Sciences, Senior Research Worker, State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical-Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

### **Мороз Ярослав Анатольевич**

кандидат химических наук, старший научный сотрудник, ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: jaroslavchem@mail.ru

### **Moroz Yaroslav**

Candidate of Chemical Sciences, Senior Research Worker, State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical-Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

### **Лопанов Александр Николаевич**

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой безопасности жизнедеятельности. ФГБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова», Белгород, РФ.  
E-mail: alopanov@yandex.ru.

### **Lopanov Alexander Nikolaevich**

Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Life Safety. «V.G. Shukhov Belgorod State Technological University», Belgorod, Russia.

УДК 543.42.062

## ЭКСТРАКЦИОННОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТАЛЛОВ В АВТОМОБИЛЬНОМ ТОПЛИВЕ МЕТОДОМ АТОМНО-АБСОРБЦИОННОЙ СПЕКТРОФОТОМЕТРИИ

© 2022. *А.Н. Рокун, Н.С. Лозинский*

---

Исследованы способы пробоподготовки и оптимизированы условия пламенного атомно-абсорбционного определения железа, марганца и молибдена в бензинах. Предложен эффективный способ пробоподготовки, заключающийся в окислении гипохлоритом натрия металлоорганических соединений и извлечении металлов из органической фазы в водную. Выбранные оптимальные условия извлечения положены в основу методик атомно-абсорбционного определения металлов в бензинах, отличающихся от существующих улучшенными метрологическими характеристиками.

**Ключевые слова:** железо, марганец, молибден, гипохлорит калия, экстракция, пламенная атомно-абсорбционная спектрометрия.

---

**Введение.** Актуальность исследуемой проблемы связана с необходимостью контроля содержания металлов в автомобильном топливе в связи с их негативным влиянием на экологическую ситуацию и безаварийную работу автомобильного транспорта.

Металлы поступают в бензин из нефти в процессе ее переработки, при эксплуатации двигателей автомобилей, а также в виде различных антидетонационных присадок. В качестве присадок используются бис(η-циклопентадиенил)железо (ферроцен), трикарбонил(циклопентадиенил)марганец (цимантрен), трикарбонил(метилциклопентадиенил)марганец (ММТ), перспективной антидетонационной присадкой является гексакарбонил молибдена [1].

Стандартный метод определения ферроцена [2] основывается на экстрагировании из бензина и минерализации железосодержащей присадки смесью серной кислоты и пероксида водорода при кипячении с последующим фотоколориметрическим определением железа(III) в виде комплекса с сульфосалициловой кислотой. При наличии в бензине монометиланилина и метилтретбутилового эфира пробу многократно промывают щавелевой кислотой. С учетом операций нагревания, охлаждения, многократного разделения водной и органической фаз, анализ занимает больше 1 часа.

Существующая стандартная методика определения марганца в бензине [3] имеет ряд недостатков: ее нельзя применять к бензинам, содержащим продукты глубокого крекинга; метод ограничивает использование в качестве стандартов марганецорганических соединений; использование дорогих и опасных реагентов. Изготовление металлоорганических стандартных образцов очень ограничивает применение прямых методов определения марганца в бензине.

Международный стандарт предлагает атомно-эмиссионный метод с индуктивно-связанной плазмой для определения молибдена в бензинах и смазочных маслах. Однако применение этого метода сдерживается экономическими факторами [4].

Для определения содержания металлов в нефти и нефтепродуктах методом атомно-абсорбционной и атомно-эмиссионной спектроскопии международные стандарты рекомендуют использование металлосодержащих стандартных образцов и растворителя метилизобутилкетона (МИБК), которые являются дорогостоящими

веществами [5,6]. Недостатком этих метода является также и то, что их нельзя применять к бензинам с содержанием ненасыщенных углеводородов более 18 %об.

**Постановка задачи.** Существующие методы определения металлов имеют ряд недостатков, включая применение дорогостоящего оборудования, разбавление проб токсичными органическими растворителями, приготовление градуировочных растворов из дорогостоящих и труднодоступных эталонных металлоорганических стандартных образцов.

При анализе нефти и нефтепродуктов наиболее точные результаты могут быть получены с применением комбинированных методов, позволяющих выделить аналитические сигналы аналитов из поля матричных помех, обусловленных макрокомпонентным составом пробы. Кроме того, для труднодиссоциирующих в пламенном атомизаторе элементов, таких, как молибден, применение микроэмульсионной подготовки проб не решает проблемы эталонирования. Невозможно применить неорганические соединения молибдена в качестве стандартных образцов при определении металлоорганических или карбонильных соединений в автомобильном топливе. Для определения гексакарбонила молибдена с использованием микроэмульсии необходимо применение стандартного вещества – гексакарбонила молибдена. Кроме того, в фальсифицированных нефтепродуктах добавки различных веществ могут влиять на аналитический сигнал. Одним из путей решения этой проблемы может быть экстракционное извлечение металлов из пробы нефтепродукта в водную фазу.

**Целью данной работы** явилось исследование возможности экстракционного извлечения металлов из проб автомобильного топлива и атомно-абсорбционного определения металлов в полученном водном экстракте с целью достижения экспрессности, снижения предела обнаружения и упрощения пробоподготовки.

**Экспериментальная часть.** Измерения проводили с помощью атомно-абсорбционных спектрофотометров «Сатурн-3» и «Solaar M6» в пламени ацетилен-воздух и ацетилен-дinitроксид. Применяли двухлучевую схему работы прибора. Использовали лампы с полым катодом типа ЛТ-2 и высокочастотные безэлектродные лампы типа ВСБ-2. Стандартный раствор железа готовили из железа металлического особой чистоты растворением в смеси серной, соляной и азотной кислот при нагревании [2]. Стандартный раствор молибдена готовили из молибденовокислого аммония квалификации х.ч. растворением в горячей дистиллированной воде [7]. Для определения марганца использовали стандартный образец состава раствора ионов марганца(II) массовой концентрации 1 г/л. Экстрагент готовили из раствора гипохлорита натрия, концентрацию активного хлора в котором определяли по методике ГОСТ [8]. Исследования проводили на модельных смесях, которые готовили растворением соответствующих металлоорганических соединений растворением в смеси изоктана и гептана.

Разработаны методики экстракционного извлечения железа, марганца, молибдена, входящих в состав антидетонационных присадок к бензинам, раствором гипохлорита натрия. При взаимодействии с гипохлоритом натрия ферроцен, ММТ, ГКМ разрушаются и превращаются в водорастворимые хлоридные комплексы железа, марганца и молибдена, соответственно.

С целью выбора оптимальных условий определения ГКМ, ММТ, ферроцена в бензинах изучали зависимость степени извлечения этих веществ из модельной смеси от концентрации активного хлора в растворе гипохлорита натрия, от концентрации соляной кислоты и времени контакта фаз. Результаты исследований зависимости степени извлечения металлов от концентрации активного хлора в растворе гипохлорита натрия представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты исследований зависимости степени извлечения металлов от концентрации активного хлора в растворе гипохлорита натрия ( $V_o : V_v = 1:2$ ,  $\tau = 5$  мин.)

| Концентрация $\text{NaClO}$ , ммоль/л | R, %     |        |          |
|---------------------------------------|----------|--------|----------|
|                                       | марганец | железо | молибден |
| 1,0                                   | 60,3     | 11,8   |          |
| 2,0                                   | 75,2     |        |          |
| 3,3                                   | 95,0     | 42,1   |          |
| 4,9                                   | 100      | 66,0   |          |
| 7,1                                   | 100      |        |          |
| 10,0                                  | 100      | 82,9   |          |
| 30,1                                  |          | 99,3   |          |
| 65,7                                  |          | 99,9   |          |
| 100                                   |          |        | 67,2     |
| 1000                                  |          |        | 89,6     |
| 1500                                  |          |        | 98,9     |
|                                       |          |        | 99,9     |

Наиболее легко разрушаются соединения марганца. Для полного извлечения марганца достаточно менее 5 ммоль/л активного хлора в растворе экстрагента. Железо извлекается полностью при 30 ммоль/л. Наибольшая концентрация активного хлора в растворе гипохлорита натрия необходима для полного извлечения молибдена – 1000 ммоль/л. В дальнейшем для извлечения металлов при их совместном присутствии использовали экстрагент с таким содержанием активного хлора.

В связи с тем, что из всех исследуемых металлоорганических соединений гексакарбонилмолибден разрушается наиболее тяжело, была изучена зависимость степени извлечения ГKM из модельной смеси от концентрации соляной кислоты соотношения контактируемых фаз и от времени контакта фаз. Результаты представлены в таблицах 2–4.

Таблица 2

Зависимость степени извлечения молибдена от концентрации соляной кислоты в растворе гипохлорита натрия ( $V_o : V_v = 1:2$ ;  $c(\text{NaClO}) = 1,0$  моль/л;  $\tau = 5$  мин.)

| Концентрация $\text{HCl}$ , моль/л | 0,5  | 1,0  | 2,0  | 2,5  |
|------------------------------------|------|------|------|------|
| R, %                               | 65,4 | 71,2 | 99,8 | 99,8 |

Как видно из таблицы 2, наблюдается количественное извлечение молибдена из модельной смеси бензина при концентрации соляной кислоты 2 моль/л и более. Соотношение органической и водной фаз при этом составляло 1:2.

Таблица 3

Зависимость степени извлечения молибдена от времени контакта фаз ( $V_o : V_v = 1:2$ ;  $c(\text{NaClO}) = 1,0$  моль/л;  $c(\text{HCl}) = 2,0$  моль/л)

| $\tau$ , мин | 1,0  | 2,0  | 3,0  | 4,0  | 5,0  | 6,0  |
|--------------|------|------|------|------|------|------|
| R, %         | 76,8 | 97,2 | 98,8 | 99,8 | 99,8 | 99,8 |

Как видно из таблицы 3, наблюдается количественное извлечение молибдена при контактировании модельной смеси бензина с экстрагентом в течение 4 минут и более.

Таблица 4

Зависимость степени извлечения молибдена от соотношения органической и водной фаз ( $\tau = 4$  мин;  $c(\text{NaClO}) = 1,0$  моль/л;  $c(\text{HCl}) = 2,0$  моль/л)

|             |      |      |      |
|-------------|------|------|------|
| $V_o : V_v$ | 1:1  | 1:2  | 1:5  |
| R, %        | 91,3 | 99,8 | 99,8 |

Было установлено что количественное извлечение молибдена, железа и марганца происходит при соотношении бензина и экстрагента 1:2, при этом экстрагент должен содержать кроме гипохлорита натрия еще и 2 моль/л соляной кислоты. В выбранных оптимальных условиях в течение 4 минут все исследуемые соединения экстрагируются полностью.

Методика определения ГKM, MMT и ферроцена в бензине основана на предварительном экстракционном выделении молибдена, марганца и железа в водную фазу и последующем атомно-абсорбционном анализе водного экстракта.

Правильность разработанной методики анализа оценена методом «введено-найденно» при анализе бензина, содержащего 25 об. % олефинов (таблица 5).

Таблица 5

Проверка правильности атомно-абсорбционного определения металлов в бензине методом «введено-найденно» ( $n = 5$ ,  $p = 0.95$ )

| Определяемый элемент | Введено, мг/мл | Найдено                                                         |       |
|----------------------|----------------|-----------------------------------------------------------------|-------|
|                      |                | $\bar{C} \pm \frac{t_{p,f} S}{\sqrt{n}}, \text{мг} / \text{мл}$ | $S_r$ |
| Железо               | 0,040          | 0,040±0,002                                                     | 0,04  |
| Марганец             | 0,020          | 0,019±0,001                                                     | 0,04  |
| Молибден             | 0,080          | 0,080±0,003                                                     | 0,03  |

Экстракционное выделение молибдена проводили следующим образом. Аликвоту анализируемого бензина помещали в делительную воронку и вносили экстракционную смесь гипохлорита натрия и соляной кислоты известных концентраций. Энергично перемешивали в течение 4 минут. Водную фазу сливали в мерные колбы, доводили до метки дистиллированной водой и определяли в ней содержание молибдена методом ААС. Содержание металлов в бензине находили по градуированным зависимостям, полученным с использованием водных стандартных растворов исследуемых металлов. Предварительное экстракционное выделение молибдена, железа, марганца в водную фазу позволило устранить влияние ненасыщенных углеводородов, содержащихся в бензине, на результаты их атомно-абсорбционного определения, исключить необходимость использования дорогих эталонных металлоорганических образцов и органических растворителей, применения опасного пламени ацетилен-динитроксид, благодаря чему повысилась точность определения и улучшились условия труда.

**Выводы.** По сравнению с существующими разработанные методики отличаются селективностью, точностью, экспрессностью, исключают применение дорогостоящего экстрагента (метилизобутилкетона) и малодоступных стандартных образцов металлоорганических соединений, доступностью реагентов и оборудования, улучшением безопасности труда (исключается применение брома, пробоподготовка бензина проводится при комнатной температуре, исключается использование высокотемпературного пламени ацетилен-закись азота), соответствует принципам

«зеленой химии». Разработанные методики позволяют выявлять фальсифицированные бензины и препятствуют их проникновению на рынок автомобильных топлив.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Определение микроэлементного состава нефтей и нефтепродуктов. Состояние и проблемы [Текст] / А.В. Колодяжный [и др.] // Методы и объекты химического анализа. – 2006. – Т. 1, № 2. – С. 90-104.
2. Бензины автомобильные Фотоколориметрический метод определения железа [Текст]: ГОСТ 32514-2013. Введ. 2015-01-01. М.: Стандартинформ, 2019. – 11 с.
3. Бензины. Определение марганца методом атомно-абсорбционной спектроскопии [Текст]: ГОСТ 33158-2014. Введ. 2016-07-01. М.: Стандартинформ, 2015. – 11 с.
4. Standard Test Method for Manganese in Gasoline By Atomic Absorption Spectroscopy [Text]: ASTM D3831-01. Introduced 2012-06-01. West Conshohocken, PA: ASTM Committee on Standards, 2010. – 4 p.
5. Современные способы определения микроэлементов в нефти и ее отдельных фракциях [Текст] / Т.А. Марютина [и др.] // Журн. аналит. химии. – 2017. – Т. 72, № 5. – С. 417-436.
6. Standard Test Method for Determination of Additive Elements, Wear Metals, and Contaminants in Used Lubricating Oils and Determination of Selected Elements in Base Oils by Inductively Coupled Plasma Atomic Emission Spectrometry (ICP-AES) [Text]: ASTM D5185-02e2. Introduced 2001-01-10. West Conshohocken, PA: ASTM Committee on Standards, 2001 – 5 p.
7. Вода питьевая. Метод определения содержания молибдена [Текст]: ГОСТ 18308-72. Введ. 1974-01-01. М.: Стандартинформ, 2010. – 8 с.
8. Натрия гипохлорит. Раствор водный. Технические условия [Текст]: ГОСТ Р 57568-2017. Введ. 2018-02-01. М.: Стандартинформ, 2019. – 60 с.

*Поступила в редакцию 16.05.2022 г.*

## EXTRACTION EXTRACTION AND DETERMINATION OF METALS IN AUTOMOTIVE FUEL BY ATOMIC ABSORPTION SPECTROSCOPY

*A.N. Rokun, N.S. Lozinsky*

The methods of sample preparation are studied and the conditions for the flame atomic absorption determination of iron, manganese, and molybdenum in gasolines are optimized. An effective method of sample preparation is proposed, which consists in the oxidation of organometallic compounds with sodium hypochlorite and the extraction of metals from the organic phase into the aqueous phase. The selected optimal extraction conditions form the basis of the methods for the atomic absorption determination of metals in gasolines, which differ from the existing ones in improved metrological characteristics.

**Keyword:** iron, manganese, molybdenum, potassium hypochlorite, extraction, flame atomic absorption spectrometry.

### **Рокун Антонина Николаевна**

кандидат химических наук, доцент,  
доцент кафедры аналитической химии  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный  
университет», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: [rokun@mail.ru](mailto:rokun@mail.ru)

### **Rokun Antonina Nikolaevna**

Candidate of Chemical Sciences, Docent,  
Associate Professor at the Department of Analytical  
Chemistry, SEI HPE "Donetsk National  
University", Donetsk, DPR.  
E-mail: [rokun@mail.ru](mailto:rokun@mail.ru)

### **Лозинский Николай Степанович**

кандидат технических наук, старший научный  
сотрудник, ГУ «Институт физико-органической  
химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко»,  
г. Донецк, ДНР.  
E-mail: [lozinsky58@mail.ru](mailto:lozinsky58@mail.ru)

### **Lozinsky Mykola**

Candidate of Technical Sciences, Senior Research  
Worker; SI "L.M. Litvinenko Institute of Physical  
Organic and Coal Chemistry", Donetsk, DPR.  
E-mail: [lozinsky58@mail.ru](mailto:lozinsky58@mail.ru)

УДК 541.121: 543(075.8)

## МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ИОННОГО РАВНОВЕСИЯ В СМЕСИ БОЛЬШОГО ЧИСЛА КИСЛОТ ИЛИ ОСНОВАНИЙ

© 2022. В.В. Стецик, О.А. Матвиенко, В.А. Цыбулько

Проведен расчет ионного равновесия в растворе смеси 5-6 компонентов (кислот или оснований) с использованием программы Maple. Система открыта для дополнительного числа компонентов, не влияющих существенно на концентрацию общих для всех компонентов смеси ионов ( $H^+$  для кислот,  $OH^-$  для оснований). Расчет проведен на первом этапе приближенно без учета ионной силы, приравнивая концентрационные значения констант их термодинамическим значениям, а на втором этапе – с учетом ионной силы раствора.

**Ключевые слова:** расчет ионного равновесия, смеси кислот, оснований.

**Введение.** В ряде природных и техногенных систем встречаются смеси, содержащие большое число кислот разных типов или растворимых оснований. Строго рассчитать ионное равновесие с учетом большого числа кислот или оснований затруднительно даже с использованием специальных математических программ. В работах [1, 2] рассмотрены некоторые вопросы методики расчета ионных равновесий в растворах электролитов, однако, например, в пособии [1] задачи расчета многокомпонентных систем не рассматриваются. В работе [2] с использованием математической компьютерной программы *Maple* приведена методика расчета равновесия в смесях, состоящих из трех кислот или оснований. Однако, если компонентов в системе заметно больше, тогда имеет смысл некоторый особый подход, основанный на применении обоснованного приближения.

**Смесь кислот.** В исследуемой системе содержится сильная кислота соляная  $HCl$  в смеси с кислотами средней силы и слабыми  $H_3PO_4$ ,  $H_2C_2O_4$ ,  $HCOOH$ ,  $CH_3COOH$ , а также соль  $NH_4Cl$ , раствор которой имеет кислую среду в результате гидролиза, с известными концентрациями и константами, характеризующими их диссоциацию. На первом этапе в достаточном приближении необходимо сформулировать подход для нахождения общей концентрации ионов водорода в растворе. В растворах, содержащих большое число кислот, их вклад в суммарную концентрацию ионов водорода в растворе, как правило, отличается.

Располагали кислоты в ряд в порядке убывания их приближенно оцениваемого вклада в общую концентрацию ионов водорода в смешанном растворе:

1) 0,1 М  $H_3PO_4$  (0,026 М); 2) 0,01 М  $H_2C_2O_4$  (0,024 М); 3) 0,01 М  $HCl$  (0,01 М); 4) 0,1 М  $HCOOH$  (0,0042 М); 5) 0,1 М  $CH_3COOH$  (0,0013 М); 6) 0,5 М  $NH_4Cl$  ( $1,7 \cdot 10^{-5}$  М) и другие кислоты с меньшими вкладами в общую концентрацию ионов водорода.

В скобках указана приближенная концентрация ионов водорода, создаваемая данной кислотой в ее чистом растворе. Разумеется, в смеси равновесия кислот смещаются в сторону подавления их диссоциации (для сильных кислот подавление заметно не проявляется), но соотношение их вкладов в смеси остается примерно таким, как в чистых растворах.

Оценивание вклада кислот в общую концентрацию ионов водорода проводили следующим образом: для кислот слабых и кислот средней силы по формуле  $\sqrt{K \cdot C}$  (учитывали только первую ступень диссоциации кислоты), для сильных кислот – с учетом их полной диссоциации, для соли 0,5 М  $NH_4Cl$  – по константе гидролиза.

В значениях оценочного вклада для щавелевой кислоты приведено нереально высокое значение концентрации ионов водорода – 0,024 М, но целью данного этапа рассмотрения являлся только отбор кислот для вычисления общей концентрации ионов водорода более точным методом. Щавелевая кислота отбор проходит, а 0,5 М  $\text{NH}_4\text{Cl}$  – нет, поскольку вклад этой соли ( $1,7 \cdot 10^{-5}$  М) составляет менее 1 % от максимального вклада одного из компонентов смеси (0,026 М). Такая точность устроит практически любые вычисления в аналитической химии. Таким образом, при вычислении общей концентрации ионов водорода достаточно учитывать первые пять компонентов рассматриваемой смеси, вносящих наибольший вклад в общую концентрацию ионов водорода.

Рассчитывали ионное равновесие в смеси с помощью математической компьютерной программы *Maple* по методике, изложенной в [2]. Значения констант диссоциации взяты из справочников [3, 4]. Система алгебраических уравнений (алгоритм вычислений) выглядела следующим образом:

1.  $\frac{[H^+] \cdot [H_2PO_4^-]}{[H_3PO_4]} = 7,1 \cdot 10^{-3}$
2.  $\frac{[H^+] \cdot [HPO_4^{2-}]}{[H_2PO_4^-]} = 6,2 \cdot 10^{-8}$
3.  $\frac{[H^+] \cdot [PO_4^{3-}]}{[HPO_4^{2-}]} = 5,0 \cdot 10^{-13}$
4.  $[PO_4^{3-}] + [HPO_4^{2-}] + [H_2PO_4^-] + [H_3PO_4] = 0,1$
5.  $\frac{[H^+] \cdot [HC_2O_4^-]}{[H_2C_2O_4]} = 5,6 \cdot 10^{-2}$
6.  $\frac{[H^+] \cdot [C_2O_4^{2-}]}{[HC_2O_4^-]} = 5,4 \cdot 10^{-5}$
7.  $[C_2O_4^{2-}] + [HC_2O_4^-] + [H_2C_2O_4] = 0,01$
8.  $\frac{[H^+] \cdot [HCOO^-]}{[HCOOH]} = 1,8 \cdot 10^{-4}$
9.  $[HCOO^-] + [HCOOH] = 0,1$
10.  $\frac{[H^+] \cdot [CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} = 1,74 \cdot 10^{-5}$
11.  $[CH_3COO^-] + [CH_3COOH] = 0,1$
12.  $[H^+] = [H_2PO_4^-] + 2[HPO_4^{2-}] + 3[PO_4^{3-}] + [HC_2O_4^-] + 2[C_2O_4^{2-}] + [HCOO^-] + [CH_3COO^-]$
13.  $pH = -\lg[H^+]$

Обозначали концентрации строго в порядке их написания в системе уравнений:  $[H^+] = x_1$ ,  $[H_2PO_4^-] = x_2$ ,  $[H_3PO_4] = x_3$ ,  $[HPO_4^{2-}] = x_4$ ,  $[PO_4^{3-}] = x_5$ ,  $[HC_2O_4^-] = x_6$ ,  $[H_2C_2O_4] = x_7$ ,  $[C_2O_4^{2-}] = x_8$ ,  $[HCOO^-] = x_9$ ,  $[HCOOH] = x_{10}$ ,  $[CH_3COO^-] = x_{11}$ ,  $[CH_3COOH] = x_{12}$ , обозначение  $pH = x_{13}$  не обязательно. Число уравнений равно числу неизвестных, вводили систему уравнений в программу *Maple*. В таблице 1 приведены результаты начального расчета системы, в котором применено упрощение – концентрационные константы приравнены к термодинамическим.

Таблица 1

Равновесные концентрации ионов в смеси 0,1 М  $\text{H}_3\text{PO}_4$ , 0,01 М  $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ ,  
0,01 М  $\text{HCl}$ , 0,1 М  $\text{HCOOH}$ , 0,1 М  $\text{CH}_3\text{COOH}$ , 0,5 М  $\text{NH}_4\text{Cl}$

| Компонент                        | Равновесная концентрация, моль/л     |                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|----------------------|
|                                  | без учета ионной силы раствора смеси | с учетом ионной силы |
| $\text{H}^+$                     | 0,0278                               | 0,0316               |
| $\text{H}_2\text{PO}_4^-$        | 0,020                                | 0,024                |
| $\text{H}_3\text{PO}_4$          | 0,080                                | 0,076                |
| $\text{HPO}_4^{2-}$              | $1,8 \cdot 10^{-7}$                  | $2,9 \cdot 10^{-7}$  |
| $\text{PO}_4^{3-}$               | $3,2 \cdot 10^{-18}$                 | $1,3 \cdot 10^{-17}$ |
| $\text{HC}_2\text{O}_4^-$        | $6,7 \cdot 10^{-3}$                  | $7,1 \cdot 10^{-3}$  |
| $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ | $3,3 \cdot 10^{-3}$                  | $2,9 \cdot 10^{-3}$  |
| $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$      | $1,3 \cdot 10^{-5}$                  | $2,2 \cdot 10^{-5}$  |
| $\text{HCOO}^-$                  | $6,4 \cdot 10^{-4}$                  | $7,8 \cdot 10^{-4}$  |
| $\text{HCOOH}$                   | 0,099                                | 0,099                |
| $\text{CH}_3\text{COO}^-$        | $6,3 \cdot 10^{-5}$                  | $7,6 \cdot 10^{-5}$  |
| $\text{CH}_3\text{COOH}$         | 0,10                                 | 0,10                 |
| pH                               | 1,56                                 | 1,50                 |

Для повышения точности расчета следует учесть ионную силу раствора с учетом 5 кислот и  $\text{NH}_4\text{Cl}$  при условии, что неизвестные дополнительные кислоты не создают значительную ионную силу. По результатам приведенных вычислений ионная сила раствора составила 0,53. Коэффициенты активности разнозарядных ионов находили по формуле Девиса [2]. Их величина составила  $f_1 = 0,85$ ;  $f_2 = 0,53$ ;  $f_3 = 0,23$ . Величину  $f_0$  принимали приближенно равным единице. Катионы  $\text{H}^+$  рассматривали наряду с другими однозарядными ионами, т.е. не выделяли их особые свойства. Находили уточненные константы диссоциации при найденной ионной силе. Значения концентрационных констант составили для фосфорной кислоты  $K_1 = 9,8 \cdot 10^{-2}$ ,  $K_2 = 1,2 \cdot 10^{-7}$ ,  $K_3 = 2,5 \cdot 10^{-12}$ , щавелевой кислоты  $K_1 = 7,8 \cdot 10^{-2}$ , муравьиной  $K = 9,8 \cdot 10^{-4}$  и уксусной  $K = 2,4 \cdot 10^{-5}$ .

Вновь решали такую же систему уравнений, но уже с концентрационными константами, полученные данные приведены в таблице 1. Видно, что учет ионной силы практически не изменил равновесные концентрации  $\text{HCOOH}$ ,  $\text{CH}_3\text{COOH}$ ; незначительно повлиял на концентрации  $\text{H}^+$ ,  $\text{H}_3\text{PO}_4$ ,  $\text{HC}_2\text{O}_4^-$ ,  $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ . Приведенная выше оценочная характеристика равновесных концентраций ионов является необходимым этапом. Она позволяет оценить ионную силу раствора, коэффициенты активности ионов и провести расчет с применением концентрационных констант равновесия, справедливых при данной ионной силе.

Для катиона аммония константа кислотности (константа гидролиза) равна  $5,7 \cdot 10^{-10}$ , диссоциация по кислотному типу выражена очень слабо. Концентрация (в моль/л) недиссоциированного на ионы аммиака во всех формах рассчитывается:

$$\frac{[\text{NH}_4\text{OH}] \cdot [\text{H}^+]}{[\text{NH}_4^+]} = 5,7 \cdot 10^{-10}, [\text{NH}_4\text{OH}] = 1,8 \cdot 10^{-8}, [\text{NH}_4^+] = 9,0 \cdot 10^{-10}.$$

Если в смеси присутствуют и другие неназванные кислоты, не вносящие существенного вклада в общую концентрацию ионов водорода в растворе, концентрации их анионов можно вычислить через мольные доли и известные аналитические концентрации.

Таким образом, рассмотрен теоретический путь установления ионного состава в смеси большого числа кислот. Но существует и другой путь, состоящий в

использовании экспериментального измерения общей активной концентрации ионов водорода в растворе той же смеси вместо расчета этой величины.

**Смесь оснований.** Аналогично оценивали ориентировочный вклад веществ в общую концентрацию  $\text{OH}^-$ -ионов в растворе смеси оснований. Располагали вещества смеси в порядке убывания их оцениваемого вклада. В данном модельном примере рассмотрены следующие основания (в скобках указаны концентрации  $\text{OH}^-$ -ионов, найденные приближенно в чистом растворе каждого вещества):

- 1) 0,1 М  $\text{Na}_3\text{PO}_4$  (0,045 М); 2) 0,1 М  $\text{CH}_3\text{NH}_2$  (0,021 М); 3) 0,01 М  $\text{NaOH}$  (0,01 М);
- 4) 0,1 М  $(\text{CH}_3)_2\text{NH}$  (0,0075 М); 5) 0,1 М  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  (0,0045 М); 6) 0,1 М  $(\text{CH}_3)_3\text{N}$  (0,0026 М);
- 7) 0,1 М  $\text{CH}_3\text{COONa}$  ( $1,7 \cdot 10^{-5}$  М); 8) 0,2 М  $\text{HCOONa}$  ( $3,2 \cdot 10^{-6}$  М).

Для расчета с помощью программы *Maple* общей концентрации  $\text{OH}^-$ -ионов в растворе смеси отбирали первые 6 членов приведенного ряда, а вклад 7 и 8 членов ряда (каждого из них) составил менее 1 % от вклада максимального члена (0,045 М). Система алгебраических уравнений выглядела следующим образом:

1.  $\frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{PO}_4^{3-}]}{[\text{HPO}_4^{2-}]} = 5,0 \cdot 10^{-13}$
2.  $\frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{HPO}_4^{2-}]}{[\text{H}_2\text{PO}_4^-]} = 6,2 \cdot 10^{-8}$
3.  $\frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{H}_2\text{PO}_4^-]}{[\text{HPO}_4^{2-}]} = 7,1 \cdot 10^{-3}$
4.  $[\text{PO}_4^{3-}] + [\text{HPO}_4^{2-}] + [\text{H}_2\text{PO}_4^-] + [\text{H}_3\text{PO}_4] = 0,1$
5.  $\frac{[\text{CH}_3\text{NH}_3^+] \cdot [\text{OH}^-]}{[\text{CH}_3\text{NH}_2]} = 4,6 \cdot 10^{-4}$
6.  $[\text{CH}_3\text{NH}_3^+] + [\text{CH}_3\text{NH}_2] = 0,1$
7.  $[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 1 \cdot 10^{-14}$
8.  $\frac{[(\text{CH}_3)_2\text{NH}_2^+] \cdot [\text{OH}^-]}{[(\text{CH}_3)_2\text{NH}]} = 5,4 \cdot 10^{-4}$
9.  $[(\text{CH}_3)_2\text{NH}_2^+] + [(\text{CH}_3)_2\text{NH}] = 0,1$
10.  $\frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{CO}_3^{2-}]}{[\text{HCO}_3^-]} = 4,8 \cdot 10^{-11}$
11.  $\frac{[\text{H}^+] \cdot [\text{HCO}_3^-]}{[(\text{CO}_2)_{aq}]} = 4,5 \cdot 10^{-7}$
12.  $[\text{CO}_3^{2-}] + [\text{HCO}_3^-] + [(\text{CO}_2)_{aq}] = 0,1$
13.  $\frac{[(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+] \cdot [\text{OH}^-]}{[(\text{CH}_3)_3\text{N}]} = 6,5 \cdot 10^{-5}$
14.  $[(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+] + [(\text{CH}_3)_3\text{N}] = 0,1$
15.  $[\text{Na}^+] + [\text{H}^+] + [\text{CH}_3\text{NH}_3^+] + [(\text{CH}_3)_2\text{NH}_2^+] + [(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+] = 3[\text{PO}_4^{3-}] + 2[\text{HPO}_4^{2-}] + [\text{H}_2\text{PO}_4^-] + [\text{HCO}_3^-] + 2[\text{CO}_3^{2-}] + [\text{OH}^-].$
16.  $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+].$

Обозначали концентрации в порядке их написания в системе уравнений и вводили в программу *Maple*:  $[H^+] = x1$ ,  $[PO_4^{3-}] = x2$ ,  $[HPO_4^{2-}] = x3$ ,  $[H_2PO_4^-] = x4$ ,  $[H_3PO_4] = x5$ ,  $[CH_3NH_3^+] = x6$ ,  $[OH^-] = x7$ ,  $[CH_3NH_2] = x8$ ,  $[(CH_3)_2NH_2^+] = x9$ ,  $[(CH_3)_2NH] = x10$ ,  $[CO_3^{2-}] = x11$ ,  $[HCO_3^-] = x12$ ,  $[(CO_2)aq] = x13$  и т. д. Полученные данные представлены в таблице 2.

Таблица 2

Равновесные концентрации ионов в смеси 0,1 М  $Na_3PO_4$ , 0,1 М  $CH_3NH_2$ , 0,01 М  $NaOH$ , 0,1 М  $(CH_3)_2NH$ , 0,1 М  $Na_2CO_3$ , 0,1 М  $(CH_3)_3N$ , 0,1 М  $CH_3COONa$ , 0,2 М  $HCOONa$

| Равновесная концентрация, моль/л | Компоненты смеси      |              |              |                     |                      |                     |             |            |
|----------------------------------|-----------------------|--------------|--------------|---------------------|----------------------|---------------------|-------------|------------|
|                                  | $H^+$                 | $PO_4^{3-}$  | $HPO_4^{2-}$ | $H_2PO_4^-$         | $H_3PO_4$            | $CH_3NH_3^+$        | $OH^-$      | $CH_3NH_2$ |
|                                  | $2,26 \cdot 10^{-13}$ | 0,069        | 0,031        | $1,1 \cdot 10^{-7}$ | $3,7 \cdot 10^{-18}$ | $1,0 \cdot 10^{-3}$ | 0,044       | 0,099      |
|                                  | $(CH_3)_2NH_2^+$      | $(CH_3)_2NH$ | $CO_3^{2-}$  | $HCO_3^-$           | $(CO_2)aq$           | $(CH_3)_3NH^+$      | $(CH_3)_3N$ | pH         |
|                                  | $1,2 \cdot 10^{-3}$   | 0,099        | 0,10         | $4,7 \cdot 10^{-4}$ | $2,4 \cdot 10^{-10}$ | $1,5 \cdot 10^{-4}$ | 0,10        | 12,64      |

Ионная сила раствора равна 1,0 М, коэффициенты активности согласно [2] приближенно равны между собой и равны единице. Концентрационные константы рассматриваемых процессов равны приближенно термодинамическим.

**Заключение.** При расчете ионного равновесия в растворе с большим числом известных кислот (или оснований) разных типов с известными аналитическими концентрациями целесообразно на первом этапе отобрать из смеси основные компоненты, вносящие главный вклад в общую концентрацию катионов водорода (или гидроксид-ионов) в растворе и с их учетом рассчитать в хорошем приближении общую концентрацию  $H^+$  (или  $OH^-$ ). Далее на основе уже вычисленных значений  $H^+$  (или  $OH^-$ ) и заранее известных аналитических концентраций и констант диссоциации находить молярные доли и концентрации продуктов диссоциации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марьянов, Б. Д. Расчеты ионных равновесий [Текст]: Пособие по аналитической химии / Б.Д. Марьянов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Томск: Изд-во Том ун-та, 2006. – 152 с.
2. Стецик, В. В. Расчет и анализ ионных равновесий в аналитической химии [Текст]: учебное пособие / В. В. Стецик. – 4-е изд. – Донецк: ДонНУ, 2021. – 257 с.
3. Лурье, Ю. Ю. Справочник по аналитической химии [Текст] / Ю. Ю. Лурье. – М.: Химия, 1989. – 448 с.
4. Новый справочник химика и технолога. Химическое равновесие. Свойства растворов [Текст] / Под ред. С. А. Симановой. – С.-Пб.: АНОНПО «Профессионал», 2004. – 998 с.

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.

#### A METHODOICAL APPROACH TO THE CALCULATION OF IONIC EQUILIBRIUM IN A MIXTURE OF A LARGE NUMBER OF ACIDS OR BASES

*V. V. Stetsik, O. A. Matvienko, V. A. Tsybulko*

The calculation of the ionic equilibrium in a solution of a mixture of 5-6 components (acids or bases) was carried out using the Maple program. The system is open to an additional number of components that do not significantly affect the concentration of ions common to all components of the mixture ( $H^+$  for acids,  $OH^-$  for bases). The calculation was carried out at the first stage approximately without taking into account the ionic strength, equating the concentration values of the constants to their thermodynamic values, and at the second stage – taking into account the ionic strength of the solution.

**Keywords:** calculation of the ionic equilibrium, mixture of acids, bases

**Стецик Василий Васильевич**

кандидат химических наук, доцент;  
доцент кафедры аналитической химии  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк, ДНР.  
E-mail: v.stetsik@donnu.ru

**Матвиенко Оксана Артуровна**

заведующий учебной лабораторией кафедры  
аналитической химии ГОУ ВПО «Донецкий  
национальный университет», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: o.matvienko@donnu.ru

**Цыбулько Валерий Андреевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры высшей математики и методики  
преподавания математики ГОУ ВПО «Донецкий  
национальный университет», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: v.tsibulko@donnu.ru

**Stetsik Vasily Vasilievich**

Candidate of Chemical Sciences, Associate Professor  
Associate Professor, Department of Analytical  
Chemistry, SEI HPE "Donetsk National University"  
Donetsk, DPR.

**Matvienko Oksana Arturovna**

Head of the Educational Laboratory of the Department  
of Analytical Chemistry, SEI HPE "Donetsk National  
University", Donetsk, DPR.

**Tsibulko Valery Andreevich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences  
Associate Professor of the Department of Higher  
Mathematics and Methods of Teaching Mathematics  
SEI HPE "Donetsk National University", Donetsk,  
DPR

УДК 544.773.432

## ИЗУЧЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ СШИВКИ ГИДРОГЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ СИНТЕТИЧЕСКИХ И ПРИРОДНЫХ ПОЛИМЕРОВ ОТ ИХ СОСТАВА

© 2022. Т.Г. Тюрина, Т.В. Крюк, Т.И. Завязкина, Т.А. Кудрявцева

На основе смесей «поливиниловый спирт – сополимер малеинового ангидрида с винилацетатом», «кукурузный крахмал – карбоксиметилцеллюлоза» получены гидрогелевые пленки, определены параметры их набухания и сшивки. Изучено влияние на эти параметры иницирующей системы, режима сшивки, природы сшивающих добавок. Установлено, что гели на основе синтетических полимеров при добавке 3,5 мас.% триэтаноламина и биополимеров при сшивке янтарной или глутаровой кислотой и соотношении полисахаридов 80:20 и 85:15 мас.% соответствуют требованиям, предъявляемым для потенциальных матриц систем доставки лекарственных средств.

**Ключевые слова:** гидрогели, набухание, плотность сшивки, размер ячейки, поливиниловый спирт, крахмал.

**Введение.** Биоразлагаемые гидрогели являются перспективными системами доставки биологически активных веществ. В последние годы исследователи проявляют большой интерес к созданию лекарственных матричных форм на основе природных полисахаридов, в частности, возобновляемого и дешевого крахмала (Кр); для получения сетчатых структур крахмал обычно комбинируют с другими полимерами и/или низкомолекулярными веществами или модифицируют [1]. С использованием в качестве сшивающего агента лимонной кислоты (ЛК) были получены крахмальные гидрогели с четко очерченными порами и контролируемой степенью водоудерживающей способности, которые показали зависимость времени высвобождения левофлоксацина от условий синтеза [2]. Установлено, что можно варьировать скорость высвобождения из гидрогелей сополимера крахмала и метакриловой кислоты кетопрофена [3] либо карбендазима [4], изменяя состав полимерной смеси и условия получения гидрогеля. Достаточно продолжительное высвобождение метформина в средах с различным pH было обнаружено для гидрогелей на основе рисового Кр [5].

Среди синтетических полимеров для образования гидрогелей весьма часто используется биоразлагаемый поливиниловый спирт (ПВС), обладающий высокой биосовместимостью и способностью заменять естественные ткани организма [6]. Однако, вследствие недостаточной эластичности и жесткости индивидуальных гидрогелей ПВС, а также для придания системам более широкого спектра свойств, гели получают на основе смеси поливинилового спирта с другими полимерами, в основном, природными, например, желатином, хитозаном, альгинатами. Эффективность использования таких гидрогелей в качестве систем доставки лекарственных средств (ЛС) показана авторами [7-9]. Что касается сочетания ПВС с синтетическими полимерами для получения гидрогелей биомедицинского назначения, то они ограничиваются использованием сравнительно узкого круга компонентов, доминирующим среди которых является поли(винилпирролидон) [10, 11], поэтому представляет интерес изучение новых полимерных композиций.

Возможность контроля диффузии депонированного в гидрогели лекарственного средства имеет большое значение, причем процесс высвобождения ЛС в значительной степени определяется параметрами сшитой сетчатой структуры [12]. Основными

топологическими характеристиками сетки являются: плотность сшивки ( $\rho_c$ ), показывающая долю общего количества звеньев полимера, которые вовлекаются в образование сетчатого полимера; средняя молекулярная масса между двумя соседними поперечными связями цепи полимера – узлами сшивки ( $\bar{M}_c$ ); размер ячейки полимерной сетки ( $\xi$ ). Информация о значении указанных параметров позволит, с одной стороны, предсказать профиль высвобождения ЛС, а с другой – изменять размер ячеек для обеспечения диффузии определенным образом, т.е. гелем можно будет управлять.

Для экспериментальной оценки  $\rho_c$ ,  $\bar{M}_c$  и  $\xi$  известны три основных способа, основанных на измерении температуры стеклования, модуля эластичности или степени набухания в определенном растворителе. Как показал анализ литературных источников по данной тематике, наиболее распространенным подходом является изучение набухания гидрогелей в водной среде, поскольку диффузия ЛС из матричной формы напрямую связана с этим процессом [13].

Целью настоящей работы было определение параметров сшивки гидрогелей на основе поливинилового спирта с сополимером малеиновый ангидрид-винилацетат (МА-ВА) и кукурузного крахмала с карбоксиметилцеллюлозой (КМЦ).

**Экспериментальная часть.** Для исследования использовали: ПВС (AppliChem GmbH, Германия,  $M = 72\,000$  Да, содержание основного вещества 98,0 %), синтезированный по методике [14] МА-ВА ( $M = 99\,000$  Да, содержание основного вещества 95,8 %, ~ 50 мол.% звеньев МА), кукурузный крахмал (ПромАгроПак, РФ), натриевую соль карбоксиметилцеллюлозы (USK Chemical, Турция), лимонную кислоту (Цитробел, РФ), янтарную кислоту (ЯК, Реахим, РФ), глутаровую кислоту (ГК, Асгос Organics, Бельгия), глицерин (Компонент-реактив, РФ), триэтаноламин (ТЭА, Синтез, Украина), персульфат аммония (ПСА, Укрреахим, Украина).

*Методика приготовления гидрогелевых пленок на основе ПВС и МА-ВА.* В водный полимерный раствор (ПВС:МА-ВА = 4:1, массовая доля полимеров ~6 %) вносили инициатор (0,75 мас.% ПСА) или иницирующую систему (ПСА:ТЭА = 0,75:1,8, 0,75:3,5 или 0,75:5,9 мас.%), после растворения инициатора добавляли глицерин (6 или 9 мас.%). Смесь поливали на полистирольные подложки (толщина слоя раствора составляла 2,5–3,0 мм) и сушили по 3 ч при 40, 60 и 80 °С. Дополнительно к этому режиму отверждения применялась выдержка при 100 °С в течение 1 или 2 ч.

*Методика приготовления гидрогелевых пленок на основе Кр и КМЦ.* КМЦ растворяли в количестве 0,6; 0,45 или 0,3 г в 100 мл воды при нагревании и перемешивании. Крахмал желатинировали при внесении 20 мл суспензии, содержащей 2,4; 2,55 или 2,7 г крахмала, в 80 мл воды, нагретой до кипения на масляной бане в трехгорлой колбе, оснащенной механической мешалкой и обратным холодильником, с последующим перемешиванием в течение 40 мин при 95 °С. В полученный вязкий однородный раствор добавляли 1,2 мл пластификатора (глицерин), 0,21 г сшивающего агента (ЯК, ЛК или ГК) и 100 мл раствора КМЦ; перемешивали полученную смесь в течение 30 мин при 95 °С. После охлаждения растворы смеси полимеров оставляли на сутки при комнатной температуре для удаления пузырьков воздуха, после чего поливали на чашки Петри (толщина слоя раствора составляла 5 мм) и сушили при 40 °С (18 ч) и далее по 1 ч при 60, 80, 100 °С.

*Параметры сшивки сеток гидрогелей* рассчитывали, как предложено авторами [15]:

– равновесная степень набухания

$$\alpha_{\infty} = \frac{m_s - m_0}{m_0} \cdot 100, \% \quad (1)$$

– плотность сшивки полимера

$$\rho_c = \frac{1}{\bar{v} \cdot \bar{M}_c}, \text{ моль/см}^3 \quad (2)$$

– средняя молекулярная масса межузловых сегментов

$$\frac{1}{\bar{M}_c} = \frac{2}{\bar{M}_n} - \frac{(\bar{v}/V_1)[\ln(1 - V_{2s}) + V_{2s} + \chi V_{2s}^2]}{V_{2r} \left[ \left( \frac{V_{2s}}{V_{2r}} \right)^{1/3} - \left( \frac{V_{2s}}{2V_{2r}} \right) \right]}, \text{ моль/г} \quad (3)$$

– параметр Флори-Хаггинса

$$\chi = \frac{\frac{dV_{2s}}{dT} \left[ \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{1 - V_{2s}} \right) - \frac{\ln(1 - V_{2s})}{3V_{2s}} \right]}{V_{2s} \left( \frac{V_{2s}}{T} - \frac{5}{3} \frac{dV_{2s}}{dT} \right)} \quad (4)$$

– размер ячейки полимерной сетки

$$\xi = l \cdot V_{2s}^{-1/3} \left[ C_n \cdot \frac{2\bar{M}_c}{\bar{M}_r} \right]^{1/2}, \text{ Å} \quad (5)$$

где  $m_0$  и  $m_s$  – массы исходного и набухшего геля соответственно, г;  $\bar{v}$  – удельный объем полимера, см<sup>3</sup>/г;  $\bar{M}_n$  – молекулярный вес полимерной цепи до сшивания, г/моль;  $V_1$  – молярный объем растворителя, см<sup>3</sup>/моль;  $V_{2s}$  и  $V_{2r}$  – объемная доля полимера в набухом и релаксированном состоянии соответственно;  $T$  – температура опыта, К;  $C_n$  – характеристическое отношение,  $l$  – длина отрезка основной цепи, Å;  $\bar{M}_r$  – молекулярная масса повторяющегося звена, г/моль.

Для расчета  $V_{2s}$  и  $V_{2r}$  использовали результаты гравиметрического способа контроля процесса набухания полимерных пленок в воде, в ходе которого определяли  $m_0$ ,  $m_s$  и  $m_r$  ( $m_r$  – масса релаксированного (отмытого от несвязанных компонентов и высушенного) геля):

$$V_{2s} = \frac{m_0/\rho}{\frac{m_0}{\rho} + \frac{(m_s - m_0)}{\rho_p}} \quad (6)$$

$$V_{2r} = \frac{m_0/\rho}{\frac{m_0}{\rho} + \frac{(m_r - m_0)}{\rho_p}}, \quad (7)$$

где  $\rho$  и  $\rho_p$  – плотность полимера и растворителя соответственно, г/см<sup>3</sup>.

### Результаты и их обсуждение.

Скорость высвобождения лекарственного средства из полимерных сеток определяется, в первую очередь, их способностью к набуханию, поэтому на первом этапе исследования изучали процесс набухания пленок в воде.

Установлено, что для гелей ПВС/МА-ВА данный процесс зависит от ряда факторов, а именно: условий получения и природы инициатора. Степень набухания пленок, полученных в мягких условиях (без прогрева при 80 и 100 °С), возрастает с увеличением времени выдержки образцов

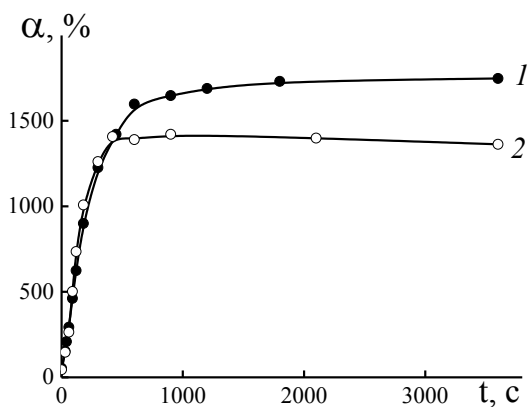


Рис. 1. Зависимость степени набухания от времени выдержки в воде гидрогеля ПВС/МА-ВА при 20 °С (режим отверждения: 40 °С – 3 ч, 60 °С – 3 ч). [ТЭА], мас. % : 1,8 (1), 3,5 (2).

в растворителе, достигая некоторого предельного значения, а для пленок с низкой долей геля (менее 70 %) затем может снижаться (рис. 1), что объясняется низкой степенью сшивки. Использование в качестве инициатора только ПСА приводит к образованию слабо набухающих систем:  $\alpha_{\infty}$  не достигает даже 100 %, при этом включение в состав иницирующей системы добавок ТЭА позволяет получать гели со степенью набухания 500–700 % (табл. 1).

Таблица 1

Результаты определения параметров набухания и сшивки гидрогелей на основе поливинилового спирта и сополимера малеиновый ангидрид-винилацетат

| Параметр                                      | [ТЭА], мас. % (1 ч при 100 °С) <sup>1)</sup> |      |      |      | [Глицерин], мас. % (2 ч при 100 °С) <sup>2)</sup> |      |      |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|------|------|------|---------------------------------------------------|------|------|
|                                               | 0                                            | 1,8  | 3,5  | 5,9  | 0                                                 | 6    | 9    |
| $\alpha_{\infty}$ , %                         | 165                                          | 700  | 515  | 580  | 90                                                | 85   | 90   |
| $\bar{M}_c$ , г/моль                          | 620                                          | 9850 | 6240 | 7750 | 175                                               | 170  | 190  |
| $\rho_c \cdot 10^{-4}$ , моль/см <sup>3</sup> | 21,9                                         | 1,2  | 1,9  | 1,6  | 69,1                                              | 71,5 | 63,5 |
| $\xi$ , Å                                     | 31                                           | 180  | 131  | 151  | 14                                                | 14   | 15   |

<sup>1)</sup> – пленки получены без пластификатора;

<sup>2)</sup> – пленки получены в присутствии инициатора ПСА (без добавления ТЭА).

Степень набухания при комнатной температуре полисахаридных сеток варьируется в диапазоне от 200 до □ 500 %. Как видно из данных, представленных в табл. 2, на параметры набухания влияет как природа сшивающего агента, так и состав полимерной композиции. Наибольшее водопоглощение отмечается для пленок, в которых цепи сшивались в присутствии глутаровой кислоты, наименьшее – в присутствии лимонной кислоты. С увеличением концентрации КМЦ наблюдается повышение степени набухания образцов, содержащих ЯК и ЛК. В целом можно говорить, что наиболее эффективным сшивающим агентом для исследуемых полисахаридных систем является лимонная кислота.

Таблица 2

Результаты определения параметров набухания и сшивки гидрогелей на основе крахмала и карбоксиметилцеллюлозы

| Параметр                                      | Кр/КМЦ 80:20 |      |      | Кр/КМЦ 85:15 |      |      | Кр/КМЦ 90:10 |      |      |
|-----------------------------------------------|--------------|------|------|--------------|------|------|--------------|------|------|
|                                               | ЛК           | ЯК   | ГК   | ЛК           | ЯК   | ГК   | ЛК           | ЯК   | ГК   |
| $\alpha_{\infty}$ , %                         | 340          | 440  | 450  | 270          | 410  | 445  | 200          | 280  | 490  |
| $\bar{M}_c$ , г/моль                          | 2200         | 3900 | 4300 | 1500         | 3400 | 4100 | 900          | 1600 | 5000 |
| $\rho_c \cdot 10^{-4}$ , моль/см <sup>3</sup> | 7,2          | 4,2  | 3,8  | 11,2         | 4,8  | 4,0  | 17,5         | 10,1 | 3,2  |
| $\xi$ , Å                                     | 122          | 172  | 182  | 94           | 159  | 180  | 71           | 101  | 208  |

Результаты набухания показывают, что все изучаемые гидрогели являются сшитыми сетчатыми структурами, поэтому на следующем этапе исследования определяли эффективную плотность сшивки, характеризующуюся величинами  $\bar{M}_c$  и  $\rho_c$ .

На рис. 2 приведены типичные зависимости  $V_{2s}$  от температуры для исследованных систем полимер – растворитель. По наклону полученных прямых найдена величина  $dV_{2s}/dT$ , с использованием которой по формуле (4) рассчитаны константы Флори-Хаггинса для систем «ПВС/МА-ВА – вода» и «Кр/КМЦ – вода»; значения  $\chi$  составили 0,486 и  $0,47 \pm 0,05$  соответственно.

Как известно, величина  $\chi$  зависит от температуры, объемной доли [16], молекулярной массы и природы полимера [17]. При этом следует отметить, что полученное нами значение константы Флори-Хаггинса для системы «ПВС/МА-ВА –

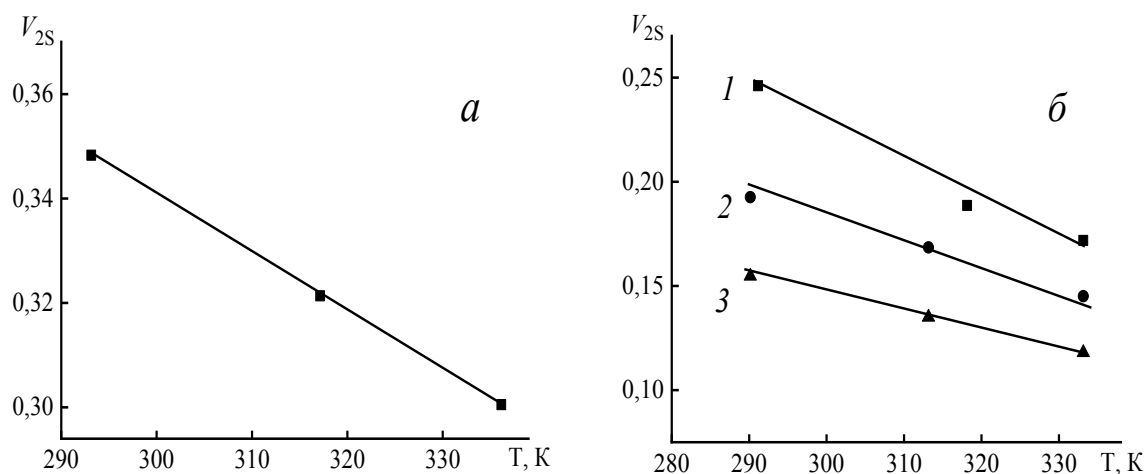


Рис. 2. Зависимость объемной доли полимера  $V_{2s}$  от температуры для систем «ПВС/МА-ВА – вода» (а) и «Кр/КМЦ – вода» (б). Соотношение Кр:КМЦ, мас. %: 85:15 (1), 90:10 (2), 80:20 (3).

вода» сравнимо с параметром взаимодействия между водой и ПВС, определенным авторами [18], – 0,486, что максимально близко к величине  $\chi$  для «идеального» растворителя (0,5 [19]). Что касается взаимодействия между водой и Кр, то представленные в литературных источниках значения  $\chi$  варьируются в широком диапазоне – от 0,40 до 0,80; авторы [20] объясняют такое большое расхождение тем, что система «крахмал – вода» не является простым раствором и может образовывать гелеобразные структуры, которые изменяют ее водосорбционные свойства. В исследованных нами полисахаридных растворах значение  $\chi$  составило  $\square$  0,47; изменение соотношения полисахаридов не оказывает заметного влияния на данный параметр (рис. 1, б).

Рассчитанные по формулам (1) и (2) плотность сшивки и средняя молекулярная масса межузловых сегментов представлены в табл. 1, 2. Установлено, что для гелей ПВС/МА-ВА определяющим фактором для параметров сшивки является время выдержки при 100 °С.  $\bar{M}_c$  пленок одинакового состава (без ТЭА и глицерина) с увеличением периода прогрева изменяется в 3,5 раза (620 и 175 г/моль), что отражается и на разнице значений  $\alpha_\infty$  (165 и 85 % соответственно). Из полученных результатов следует, что увеличение времени прогрева является излишним, так как приводит к получению жестких пленок с большой плотностью сшивки. Добавление глицерина и варьирование его количества не оказывает заметного влияния на характеристики образцов, тогда как действие ТЭА даже в минимальных концентрациях приводит к значительным изменениям параметров сшивки: резко уменьшается  $\rho_c$  (в 18 раз) и увеличивается степень набухания (более, чем в 4 раза). Максимальные значения  $\bar{M}_c$  демонстрируют гидрогели с 1,8 мас. % ТЭА, дальнейшее увеличение его концентрации приводит к получению более жестко сшитых гелей.

Для полисахаридных сеток средняя молекулярная масса межузловых сегментов варьируется в широком диапазоне – от 900 до 5000 г/моль в зависимости от использованного сшивающего агента: минимальный молекулярный вес между узлами сетки у гелей, полученных при использовании ЛК, максимальный – полученных при использовании ГК. Для ЛК и ЯК прослеживается четкая зависимость снижения значений  $\bar{M}_c$  и повышения значений  $\rho_c$  с уменьшением концентрации производного целлюлозы; использование в качестве сшивающего агента ГК не позволило получить

стабильные результаты. Максимальная степень сшивки полисахаридов достигается в гелях с соотношением Кр:КМЦ = 90:10 мас.% в присутствии лимонной кислоты.

В работе [21], посвященной обсуждению свойств гидрогелей на основе ПВС, сделан вывод о том, что умеренной является плотность сшивки в диапазоне  $(2,1\text{--}3,6) \cdot 10^{-4}$  моль/см<sup>3</sup> (что соответствует молекулярному весу между узлами сетки 3500–6000 г/моль), поскольку гели с такими значениями  $\rho_c$  и  $\bar{M}_c$  характеризуются приемлемыми для применения в медицинских целях механическими свойствами. Как видно из представленных в табл. 1, 2 результатов, в полной мере указанным требованиям отвечают только образцы на основе ПВС/МА-ВА/ПСА-ТЭА при концентрации триэтаноламина 3,5 мас.% и биополимеров состава Кр/КМЦ/ЯК и Кр/КМЦ/ГК при соотношении полисахаридов 80:20 и 85:15 мас.%.

Важным параметром, определяющим транспорт ЛС через полимерную сеть, является размер ее ячеек. Известно [12], что большинство гидрогелей, используемых в биомедицинских целях, имеют размер ячеек в набухшем состоянии от 50 до 1000 Å. Для расчета размеров ячеек исследуемых гидрогелей по формуле (5) использовали известные значения характеристического отношения и длины мономерного звена для ПВС и амилозы в воде: 8,3; 1,54 Å [15] и 11,7; 4,4 Å [22] соответственно, полученные результаты представлены в табл. 1, 2. Как видно, и в синтетических гелях на основе ПВС/МА-ВА/ПСА-ТЭА, и в биополимерных матрицах размер ячеек находится в пределах от 100 до 200 Å, что не позволяет нагружать такие системы объемными биологически активными веществами. Тем не менее, полученные данные свидетельствуют о возможности регулирования структуры гидрогелевых матриц путем варьирования состава полимерной композиции, концентрации инициатора, условий получения и природы сшивающего агента.

**Выводы.** Для гидрогелевых систем «поливиниловый спирт – сополимер малеинового ангидрида с винилацетатом» и «кукурузный крахмал – натриевая соль карбоксиметилцеллюлозы» впервые определены плотность сшивки, средняя молекулярная масса между узлами сшивки и размер ячеек полимерной сетки. Показано, что значения параметров сшивки возможно регулировать путем варьирования состава полимерной композиции, природы инициатора, сшивающего агента и условий синтеза. Такие коррективы позволят создавать системы, в полной мере соответствующие требованиям, предъявляемым для потенциальных матриц систем доставки лекарственных средств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biomedical applications of hydrogels in drug delivery system: an update / P. Kesharwani [et al.] // J. Drug Deliv. Sci. Technol. – 2021. – Vol. 66. – P. 102914.
2. Modified starch-based hydrogels cross-linked with citric acid and their use as drug delivery systems for levofloxacin / A. Uliniuc [et al.] // Soft Materials. – 2013. – Vol. 11, № 4. – P. 483-493.
3. Ali A. E. H., AlArifi A. Characterization and in vitro evaluation of starch based hydrogels as carriers for colon specific drug delivery systems // Carbohydr. Polym. – 2009. – Vol. 78, № 4. – P. 725-730.
4. Starch-based hydrogel loading with carbendazim for controlled-release and water absorption / C. Bai [et al.] // Carbohydr. Polym. – 2015. – Vol. 125. – P. 376-383.
5. Sachan N., Bhattacharya A. Modeling and characterization of drug release from glutinous rice starch based hydrogel beads for controlled drug delivery // Int. J. Health Res. – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 93-99.
6. Silver/poly(vinyl alcohol) nanocomposite film prepared using water in oil microemulsion for antibacterial applications / U. K. Fatema [et al.] // J. Colloid Interface Sci. – 2018. – Vol. 514. – P. 648-655.
7. Oun R., Plumb J., Wheate N. A cisplatin slow-release hydrogel drug delivery system based on a formulation of the macrocycle cucurbit[7]uril, gelatin and polyvinyl alcohol // J. Inorg. Biochem. – 2014. – Vol. 134. – P. 100-105.

8. Natural and synthetic materials based CMCh/PVA hydrogels for oxaliplatin delivery: fabrication, characterization, in-vitro and in-vivo safety profiling / K. Ullah [et al.] // *Int. J. Biol. Macromol.* – 2019. – Vol. 22. – P. 538-548.
9. Alginate-polyvinyl alcohol based interpenetrating polymer network for prolonged drug therapy, optimization and in-vitro characterization / H. Anwar [et al.] // *Carbohydr. Polym.* – 2017. – Vol. 166. – P. 183-194.
10. Kamoun E. A., Kenawy E.-R. S., Chen X. A review on polymeric hydrogel membranes for wound dressing applications: PVA-based hydrogel dressings // *J. Adv. Res.* – 2017. – Vol. 8. – P. 217-233.
11. Synthesis of PVA/PVP based hydrogel for biomedical applications: a review / M. S. B. Husain [et al.] // *Energy Sources A: Recovery Util. Environ. Eff.* – 2018. – Vol. 40, № 20. – P. 2388-2393.
12. Singh B., Sharma V. Influence of polymer network parameters of tragacanth gum-based pH responsive hydrogels on drug delivery // *Carbohydr. Polym.* – 2014. – Vol. 101. – P. 928-940.
13. Encapsulation of proteins in hydrogel carrier systems for controlled drug delivery: influence of network structure and drug size on release rate / A. Bertz [et al.] // *J. Biotechnol.* – 2013. – Vol. 163. – P. 243-249.
14. Крюк Т. В., Тюрина Т. Г., Кобцева О. С. Модификация сополимеров малеинового ангидрида с винилацетатом аминокислотами // *Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки.* – 2019. – № 1. – С. 100-102.
15. Peppas N. A., Wright S. L. Drug diffusion and binding in ionizable interpenetrating networks from poly(vinyl alcohol) and poly(acrylic acid) // *Eur. J. Pharm. Biopharm.* – 1998. – Vol. 46. – P. 15-29.
16. Farooq, D., Sukonrat, P. Thermal behavior of water in the selected starch- and cellulose-based polymeric hydrogels // *Int. J. Pharm.* – 2008. – Vol. 352, № 1-2. – P. 152-158.
17. Van der Sman R. G. M., Meinders M. B. J. Prediction of the state diagram of starch water mixtures using the Flory-Huggins free volume theory // *Soft Matter.* – 2011. – Vol. 7, № 2. – P. 429-442.
18. Vapor pressures of polymer solutions. II. Vapor pressure of the poly(vinyl alcohol)-water system / I. Sakurada [et al.] // *J. Polym. Sci.* – 1959. – Vol. 35, № 497. – P. 497-505.
19. Тагер А. А. Физико-химия полимеров. – М.: Научный мир, 2007. – 576 с.
20. Li S., Tang J., Chinachoti P. Thermodynamics of starch-water systems: an analysis from solution-gel model on water sorption isotherms // *J. Polym. Sci. B Polym. Phys.* – 1996. – Vol. 34, № 15. – P. 2579-2589.
21. Peppas N. A., Merrill E. W. Development of semicrystalline poly(vinyl alcohol) hydrogels for biomedical applications // *J. Biomed. Mater. Res.* – 1977. – Vol. 11, № 3. – P. 423-434.
22. Ring S. G., L'Anson K., Morris V. J. Static and dynamic light scattering studies of amylose solutions // *Macromolecules.* – 1985. – Vol. 18, № 2. – P. 182-188.

*Поступила в редакцию 20.05.2022 г.*

#### STUDY OF THE DEPENDENCE OF THE HYDROGEL'S NETWORKS PARAMETERS ON THEIR COMPOSITION FOR THE MATERIALS ON THE BASIS OF SYNTHETIC AND NATURAL POLYMERS

*T.G. Tyurina, T.V. Kryuk, T.I. Zavyazkina, T.A. Kudryavtseva*

Hydrogel films on the basis of mixtures «polyvinyl alcohol–maleic anhydride-co-vinyl acetate», «corn starch–carboxymethylcellulose» were obtained, the parameters of their swelling and crosslinking were determined. The influence of the initiating system, the crosslinking mode, and the nature of the crosslinking additives on these parameters has been studied. It has been established that gels based on synthetic polymers with the addition of 3.5 wt.% triethanolamine and biopolymers cross-linked with succinic or glutaric acid and the ratio of polysaccharides 80:20 and 85:15 wt.% meet the requirements for potential matrices of drug delivery system.

**Keywords:** hydrogels, swelling, cross-linking density, mesh size, polyvinyl alcohol, starch.

**Тюрина Татьяна Григорьевна**

доктор химических наук,

ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.

E-mail: t\_tyurina@mail.ru

**Tyurina Tatyana**

doctor of Chemical Sciences,

SI «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

**Крюк Татьяна Владленовна**

кандидат химических наук,  
ГУ «Институт физико-органической химии и  
углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: ktvl2010@mail.ru

**Kryuk Tatyana**

candidate of Chemical Sciences,  
SI «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and  
Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

**Кудрявцева Таисия Андреевна**

младший научный сотрудник  
ГУ «Институт физико-органической химии и  
углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: tkudryavceva19@gmail.com

**Zavyazkina Tatyana**

post-graduate student, leading engineer  
SI «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and  
Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

**Завязкина Татьяна Ивановна**

аспирант, ведущий инженер  
ГУ «Институт физико-органической химии и  
углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР  
E-mail: tatzavyazkina@gmail.com

**Kudryavtseva Taisiya**

junior researcher  
SI «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and  
Coal Chemistry», Donetsk, DPR.

УДК 544.463:532.612:631.4

## ЭТОКСИЛИРОВАНИЕ НИТРОПРОИЗВОДНЫХ БЕНЗОЙНОЙ КИСЛОТЫ В УСЛОВИЯХ МЕХАНОХИМИЧЕСКОЙ АКТИВАЦИИ

© 2022. С.Л. Хилько, Р.А. Макарова, Р.Г. Семенова, О.И. Невечеря, В.С. Шелест, Т.М. Пехтерева

Показана принципиальная возможность твердофазного механохимического синтеза этоксилированных производных бензойной кислоты и ее нитрозамещенных при взаимодействии с полиэтиленгликолем в энергонапряженном вибрационном аппарате. Продукты реакции охарактеризованы методом ИК- и  $^1\text{H}$  ЯМР спектроскопии, кислотно-основного потенциометрического титрования и тензиометрии. Установлено, что этоксилирование бензойных кислот осуществляется по карбоксильным группам. Соли этоксилированных производных нитробензойных кислот обладают выраженными поверхностно-активными свойствами на границе раздела фаз водный раствор-воздух.

**Ключевые слова:** нитробензойные кислоты; полиэтиленгликоль; механохимическая активация; ИК,  $^1\text{H}$  ЯМР спектроскопия; кислотно-основное потенциометрическое титрование; тензиометрия.

**Введение.** Проблема инициирования химических реакций механическими силами в настоящее время является актуальной, поскольку это связано с перспективами использования таких реакций в области создания новых экологически безопасных и экономически выгодных технологических процессов, которые перспективны в различных областях химии, химической технологии и материаловедения [1, 2].

Применение твердофазных механохимических процессов включает: селективный синтез органических веществ, получение стабилизированных форм метастабильных полиморфных модификаций молекулярных кристаллов, приготовление быстрорастворимых форм лекарственных и других биологически активных веществ, интенсификацию процессов переработки природного и техногенного органического сырья и др. [1–4].

Механохимическим превращениям твердых низкомолекулярных органических соединений посвящено относительно небольшое число исследований. В литературе описан ряд твердофазных механохимических реакций органического синтеза, таких как этерификация, циклизация, галогенирование, замещение галогена, гидрогенолиз, окисление, ацилирование, конденсация и др. [1, 2, 5–7].

Кислотно-основные превращения являются одними из самых распространенных и наиболее простых в экспериментальном плане типов механохимических реакций органических соединений. Такие превращения особенно характерны для карбоксил- и гидроксилзамещенных органических соединений. Вещества с такой функциональной природой широко распространены в природе и во многих случаях обладают биологической активностью [4].

Реакция этоксилирования важна в органическом синтезе, поскольку продукты этой реакции используются в качестве неионогенных ПАВ широкого спектра действия. Получение этоксилатов обычно проводят при продувке газообразного этиленоксида через соединения, содержащие активные карбоксильные, гидроксильные и аминокгруппы [8, 9]. Применение химических методов синтеза достаточно трудоемко и требует выполнения ряда условий: работа с газообразным оксидом этилена под давлением, наличие катализатора (щелочной или кислотный), длительность процесса (часы), высокая температура (до 150 °C) [10–12].

Известно, что нитропроизводные бензойной кислоты применяются как антимикробные средства в медицине, как фунгициды и инсектициды в сельском хозяйстве [13]. В результате реакции этоксилирования таких бензойных кислот возможно получение замещенных неионогенных ПАВ, которые будут обладать биологически активными свойствами.

Целью работы было проведение реакции этоксилирования нитробензойных кислот полиэтиленгликолем (ПЭГ-6000 и ПЭГ-1500) механохимическим методом в вибрационном аппарате и исследование продуктов реакции методами ИК,  $^1\text{H}$  ЯМР спектроскопии, кислотно-основного потенциометрического титрования и тензиометрии.

**Экспериментальная часть.** Механохимические твердофазные реакции проводили в вибрационном аппарате 75Т-ДрМ при частоте вибрации  $\nu = 50$  Гц и амплитуде  $A = 3.0 \div 5.0$  мм. Измельчающая ячейка аппарата состоит из стального стакана с крышкой и рабочего тела, которое представляет собой стальной цилиндр правильной формы массой  $M_T = 1.13$  кг.

Механика вибрационного воздействия на обрабатываемый материал учитывает параметры вибрации и природу материала. Количественные характеристики вибрационного аппарата рассчитывали по следующим формулам:

$$I = A\omega^2 = 4\pi^2 A\nu^2 - \text{виброускорение, м/с}^2;$$

$$V = A\omega = 2\pi\nu A - \text{виброскорость, м/с,}$$

где  $A$  – амплитуда механических колебаний, мм;  $\nu$  – частота механических колебаний, Гц;  $\omega = 2\pi\nu$  – угловая частота механических колебаний, Гц.

Расчетные параметры работы вибрационного аппарата:  $I = 296 \div 493$  м/с<sup>2</sup>;  $V = 0.942 \div 1.57$  м/с

Регистрацию ИК спектров проводили на спектрометре Bruker Tensor 37 FTIR Spectrometer в таблетках KBr.  $^1\text{H}$  ЯМР спектры записаны на спектрометре Bruker Avance II (400 МГц) в растворе дейтерированного хлороформа.

Количество карбоксильных групп определяли методом кислотно-основного потенциометрического титрования. Степень превращения исходных компонентов реакционной смеси в продукты реакции (%) определяли как отношение разностей концентраций карбоксильных групп в растворах реакционной смеси до механохимической активации  $[\text{COOH}]_K$  и в растворах продуктов реакции  $[\text{COOH}]_П$  к концентрациям растворов  $[\text{COOH}]_K$ :

$$\text{Степень превращения (\%)} = \frac{[\text{COOH}]_K - [\text{COOH}]_П}{[\text{COOH}]_K} \times 100$$

Динамическое поверхностное натяжение водных растворов при постоянной концентрации измеряли методом формы висячей капли (тензиометр PAT-2P SINTERFACE Technologies, Germany).

**Результаты и их обсуждение.** В спектрах реакционных смесей после механоактивации присутствуют полосы поглощения исходных реагентов и новые полосы, которые можно отнести к продуктам реакции. В области валентных колебаний карбонильной группы регистрируются две полосы, одна из которых относится к исходной кислоте, а другая, смещенная в высокочастотную область на  $30\text{--}45$  см<sup>-1</sup>, может быть отнесена к валентным колебаниям  $\text{C}=\text{O}$  группы образующегося соединения (рис. 1, таблица). Изменения претерпевает область поглощения деформационных колебаний ОН-групп в диапазоне  $960\text{--}890$  см<sup>-1</sup>. Вместо широкой полосы поглощения

ПЭГ с максимумом при  $960\text{ см}^{-1}$  регистрируются новые полосы при  $950\text{--}940\text{ см}^{-1}$ , что, возможно, связано как с наличием у ПЭГ второй, непрореагировавшей, ОН-группы, так и со структурными изменениями в результате твердофазной реакции.

Это дает возможность предполагать, что в условиях механохимического синтеза бензойные кислоты взаимодействуют с ПЭГ, однако реакция не проходит до конца – степень превращения исходных реагентов в продукты реакции различается для разных нитробензойных кислот (таблица).

Как следует из таблицы для *орто*-нитробензойной кислоты характерна большая степень превращения исходных компонентов в продукты реакции по сравнению с *мета*- и *пара*-производными, что может быть связано с ее большей реакционной способностью в механохимической реакции.

В спектрах  $^1\text{H}$  ЯМР продуктов взаимодействия *орто*-нитробензойной кислоты с ПЭГ-1500 (рис. 2) протоны концевых  $\text{CH}_2$  групп смещаются в слабое поле, изменяются и химические сдвиги протонов колец бензойных кислот. Это, вместе с данными ИК

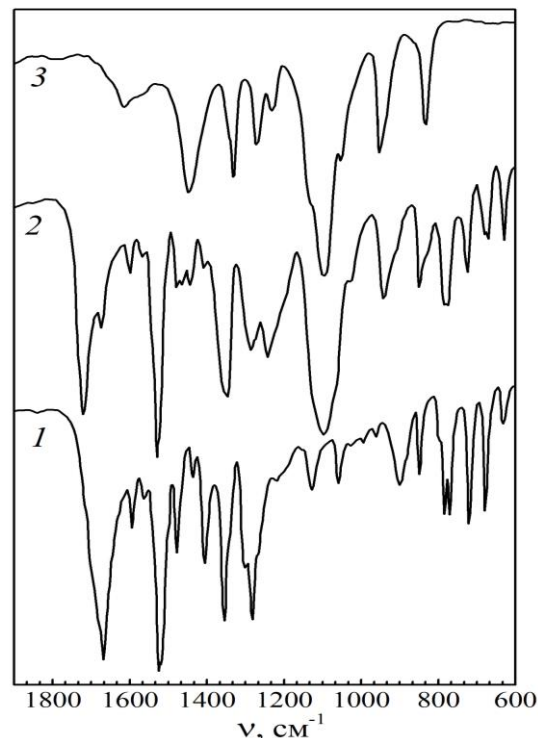


Рис. 1. ИК спектры образцов:  
1 – *орто*-нитробензойная кислота;  
2 – *орто*-нитробензойная кислота+ПЭГ-6000;  
3 – ПЭГ-6000.

спектроскопии и потенциометрического титрования растворов, указывает на то, что этоксилирование нитробензойных кислот протекает по карбоксильной группе кислоты.

Таблица  
Характеристики нитробензойных кислот и продуктов их механохимического этоксилирования при взаимодействии с ПЭГ-6000

| Кислота                     | Степень превращения, % | Частоты полос поглощения C=O-колебаний в ИК спектре, $\text{см}^{-1}$ |                 |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------|
|                             |                        | исходная кислота                                                      | продукт реакции |
| Бензойная                   | 18                     | 1688                                                                  | 1714            |
| <i>орто</i> -нитробензойная | 40                     | 1683                                                                  | 1728            |
| <i>мета</i> -нитробензойная | 32                     | 1694                                                                  | 1726            |
| <i>пара</i> -нитробензойная | 19                     | 1697                                                                  | 1727            |

Присоединение фрагментов полиэтиленгликоля к карбоксильным группам при механосинтезе может быть связано со структурой кристаллов нитробензойных кислот [14, 15]. При этом, чем прочнее связи в молекулярных кристаллах, тем с меньшей степенью превращения исходных компонентов в продукты реакции будет протекать механохимическая реакция.

Полученные результаты этоксилирования нитробензойных кислот показывают, что для *орто*-производных характерна большая реакционная способность в механохимических реакциях. Это может быть связано с меньшей прочностью ее кристаллической формы.

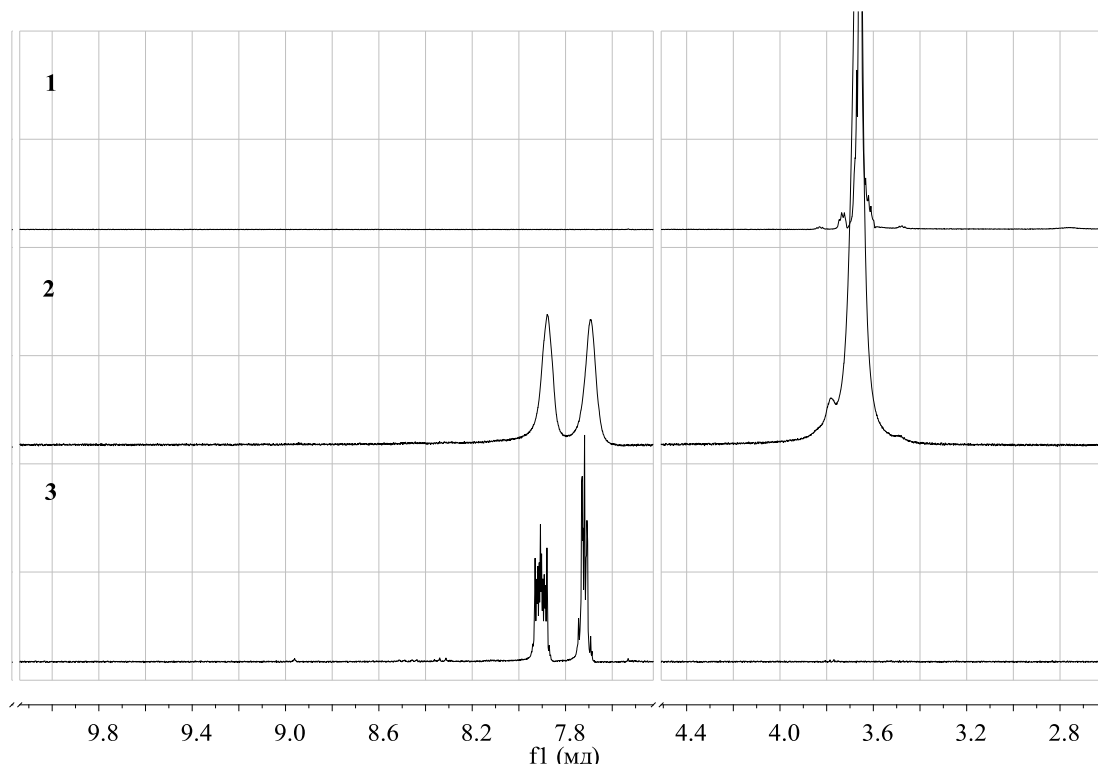


Рис 2.  $^1\text{H}$  ЯМР спектры в дейтерированном хлороформе: 1 – ПЭГ-1500; 2 – *орто*-нитробензойная кислота+ПЭГ-1500; 3 – *орто*-нитробензойная кислота.

Растворы солей этоксилированных производных нитробензойных кислот были исследованы методом тензиометрии.

Как следует из рис. 3, этоксилированные производные бензойных кислот обладают более выраженными поверхностно-активными свойствами по сравнению с полиэтиленгликолем.

Такое поведение связано с тем, что формирование поверхностных слоев ионогенных ПАВ, молекулы которых имеют выраженную дифильность структуры, отличается от неионогенных ПАВ без гидрофобного центра. Появление гидрофобного центра в молекулах этоксилированных производных бензойных кислот приводит к изменению механизма адсорбции полученных ПАВ на межфазной границе раздела водный раствор – воздух.

#### Выводы.

1. Методом механохимического твердофазного синтеза в энергонапряженном вибрационном аппарате показана возможность протекания реакции этоксилирования

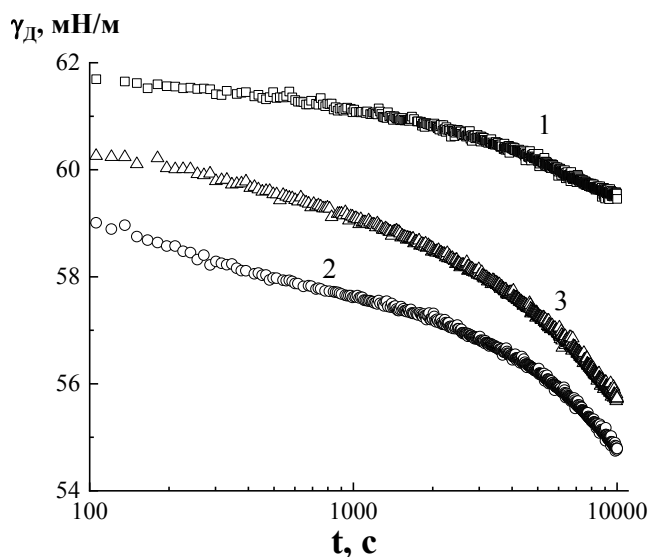


Рис. 3. Изменение динамического поверхностного натяжения от времени для систем: 1 – ПЭГ-6000; 2 – *орто*-нитробензойная кислота + ПЭГ-6000; 3 – бензойная кислота + ПЭГ-6000. Концентрация растворов – 1.0 %.

при взаимодействии нитробензойных кислот с полиэтиленгликолем.

2. Внедрение этоксигрупп в структуру молекул бензойных кислот подтверждено методами ИК-, <sup>1</sup>H ЯМР спектроскопии, кислотно-основного потенциометрического титрования и тензиометрии.

3. Для *орто*-производных нитробензойной кислоты характерна большая реакционная способность в реакциях этоксилирования по сравнению с *мета*- и *пара*-производными.

4. Растворы натриевых солей этоксилированных образцов бензойных кислот проявляют более выраженные поверхностно-активные свойства на границе раздела жидкость-газ по сравнению с растворами полиэтиленгликоля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдырев В.В. Механохимия и механохимическая активация твердых веществ / В.В. Болдырев // Успехи химии. – 2006. – Т. 75, № 3. – С. 203-216.
2. Balaz P. Hallmarks of mechanochemistry: from nanoparticles to technology / P. Balaz [et al.] // Chem. Soc. Rev. – 2013. – Vol. 42. – P. 7571- 7637.
3. Korolev K.G. Mechanochemical preparation of water-soluble forms of triterpene acids / K.G. Korolev, O.I. Lomovsky, O.A. Rozhanskaya, V.G. Vasil'ev // Chem. Natural Compounds. – 2003 – Vol. 39. – No 4. – P 366-372.
4. Do J.-L. Mechanochemistry: A Force of Synthesis / J.-L. Do, T. Friscic // ACS Cent. Sci. – 2017. – Vol. 25. – No 3(1). – P. 13–19.
5. Ляхов Н.З. Механохимический синтез органических соединений и композитов с их участием / Н.З. Ляхов, Т.Ф. Григорьева, А.П. Барина, И.А. Ворсина // Успехи химии. – 2010. – Т. 79. – № 3. – С. 218-233.
6. Achar T.K. Mechanochemical synthesis of small organic molecules / T.K. Achar, A. Bose, P. Mal // Beilstein J. Org. Chem. – 2017. – Vol. 13. – P.1907-1931.
7. Wang G.-W. Mechanochemical organic synthesis / G.-W. Wang // Chem. Soc. Rev. – 2013. – Vol. 42. – P. 7668-7700.
8. Umbach W. Continuous alkoxylation process / W. Umbach, W. Stein // J. Am. Oil Chem. Soc. – 1971. – Vol. 48. – No 8. – P. 394-397.
9. Sallaya P. Novel General Procedure for the Preparation of Homogeneous Nonionic Surfactants / P. Sallaya [et al.] // J. Surfactants Deterg. – 2002. – Vol. 5. – No 4. – P. 353-358.
10. Salzano E. The evaluation of risks of ethoxylation reactors / E. Salzano, M. Serio, E. Santacesaria // Process Safety Progress. – 2007. – Vol. 26 (4). – P. 304-311.
11. Boeva R.S. Catalytic ethoxylation of phenol and phenol derivatives / R.S. Boeva, K.M. Markov, S.V. Kotov // React. Kinet. Catal. Lett. – 1980. – Vol. 13. – No 4. – P. 323-329.
12. Serio M. Ethylene Oxide Solubility and Ethoxylation Kinetics in the Synthesis of Nonionic Surfactants / M. Serio, R. Tesser, F. Felippone, E. Santacesaria // Ind. Eng. Chem. Res. – 1995. – Vol. 34. – P. 4092-4098.
13. Антимикробные композиции, содержащие ароматические карбоновые кислоты и спиртовой растворитель: пат. 2325203 РФ: МПК А 61 Q 17/00, А 61 К 8/36/ Тейлор Т.Т., Сейтц Э.П.Мл., Фокс П.С., Фалс Дж.Л.; заявитель и патентообладатель ЭЭ Дайалкорпорейшн (US). – № 2006117688/15; заяв. 23.11.04; опубл. 27.05.08, Бюл. №15 – 16с.
14. Zhurov V.V. Inter- and Intramolecular Interactions in Crystalline 2-Nitrobenzoic Acid – An Experimental and Theoretical QTAIM Analysis / V.V. Zhurov, A.A. Pinkerton // J. Phys. Chem. A. – 2015. – Vol. 119 (52). – P. 13092-13100.
15. Ibragimov A. Conformation dimorphism in o-nitrobenzoic acid: alternative ways to avoid the O...clash / A. Ibragimov [et al] // Acta Cryst. – 2016. – Vol. C72. – P. 566-571.

Поступила в редакцию 20.05.2022 г.

ETOXYLATION OF NITRODERIVATIVES OF BENZOIC  
ACID UNDER THE CONDITIONS OF MECHANOCHEMICAL ACTIVATION

*S.L. Khil'ko, R.A. Makarova, R.G. Semenova, O.I. Nevecherya, V.S. Shelest, T.M. Pekhtereva*

The fundamental possibility of solid-phase mechanochemical synthesis of ethoxylated derivatives of benzoic acid and its nitro-substituted derivatives by interaction with polyethylene glycol in an energy-intensive vibratory apparatus is shown. The reaction products were characterized by IR and  $^1\text{H}$  NMR spectroscopy, acid-base potentiometric titration, and tensiometry. It has been established that ethoxylation of benzoic acids occurs at carboxyl groups. Salts of ethoxylated derivatives of nitrobenzoic acids have pronounced surface-active properties at the aqueous solution-air interface.

**Keywords:** nitrobenzoic acids; polyethylene glycol; mechanochemical activation; IR,  $^1\text{H}$  NMR spectroscopy; acid-base potentiometric titration; tensiometry.

**Хилько Светлана Леонидовна**

кандидат химических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: sv-hilko@yandex.ru

**Khil'ko Svetlana Leonidovna**

Candidate of Chemical Sciences, Senior Researcher, Leading Researcher, SI "The L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk, DPR.  
E-mail: sv-hilko@yandex.ru

**Макарова Раиса Александровна**

кандидат химических наук, старший научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: makarova.ra@yandex.ru

**Makarova Raisa Aleksandrovna**

Candidate of Chemical Sciences, Senior Researcher, SI "The L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk, DPR.  
E-mail: \_makarova.ra@yandex.ru

**Семенова Римма Григорьевна**

кандидат химических наук, старший научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР  
E-mail: reemma2010@yandex.ru

**Semenova Rimma Grigor'yevna**

Candidate of Chemical Sciences, Senior Researcher, SI "The L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk, DPR.  
E-mail: reemma2010@yandex.ru

**Невечеря Оксана Ивановна**

Младший научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: nevecherya@bk.ru

**Nevecherya Oksana Ivanovna**

Junior Researcher SI "The L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk, DPR.  
E-mail: nevecherya@bk.ru

**Шелест Валентина Сергеевна**

Младший научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: valya.any@gmail.com

**Shelest Valentina Sergeevna**

Junior Researcher, State institution "The L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk, DPR.  
E-mail: valya.any@gmail.com

**Пехтерева Татьяна Михайловна**

Научный сотрудник ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: t.pechtereva@yandex.ru

**Pekhtereva Tat'yana Mikhaylovna**

Researcher, SI "The L.M. Litvinenko's Institute of Physical Organic and Coal Chemistry", Donetsk, DPR.  
E-mail: t.pechtereva@yandex.ru

## БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 574.22

ИЗМЕНЧИВОСТЬ БАРХАТНИЦЫ *MINOIS DRYAS* (SCOPOLI, 1763)  
(LEPIDOPTERA, SATYRIDAE) В ГЕОГРАФИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2022. М. А. Копылов

В статье приводится подробное описание морфологической изменчивости структурных элементов крыла бабочки *Minois dryas* (Scopoli, 1763) (Lepidoptera, Satyridae). Половая специфика имаго проявляется в более крупных размерах самок. Географические различия между исследованными группировками *M. dryas* не существенны и не имеют направленный характер. Вероятно, это объясняется сходными условиями обитания бабочек в разных частях ареала.

**Ключевые слова:** изменчивость; размеры крыла; бабочка; *Minois dryas*; распространение; географическая изоляция.

**Введение.** Внутривидовая фенотипическая изменчивость представляет собой сложное явление, обусловленное сочетанием генетического потенциала и факторов среды. В случае изучения на популяционном уровне она отражает норму реакции и может служить маркером реализации генетической программы, а, следовательно, и оптимальности условий существования.

Цель работы – дать подробное описание фенотипических отличий популяций бабочек *Minois dryas* (Scopoli, 1763) (Lepidoptera, Satyridae) в географическом пространстве. Сатир дриада занимает умеренные широты Евразии. Оседлый вид. Лёт с конца июня до сентября. Одно поколение в год. Гусеницы питаются на злаках и осоках [1]. Бархатница *Minois dryas* мозаично представлена на Алтае (рис. 1). Основная область распространения вида приходится на северную периферию рассматриваемого региона. Наиболее плотно заселены разнотравные суходольные и пойменные луга, умеренно сухие степные участки. Сходные местообитания вид занимает в других частях ареала [2].

**Материалы и методы.** Основой для анализа послужили сборы бархатницы *M. dryas* на Алтае, в Хакасии и Красноярском крае за период 2003–2010 гг. по градиенту высот от предгорий до низкогорий включительно:

1. Алтай: Быстрый Исток (БИ) – Предалтайская провинция, предгорье (296♂, 145♀);
2. Алтай: Горно-Алтайск (ГА) – Северный Алтай, низкогорье (110♂);
3. Хакасия: Минусинская котловина (ХК), предгорно-низкогорный пояс (7♂);
4. Красноярский край: Усинская котловина (КР), предгорно-низкогорный пояс – предгорье (13♂, 9♀).

Для оценки характера изменчивости структурных элементов крыла изучены следующие признаки (рис. 2):

- 1) расстояние от корня до апикального угла переднего крыла (далее п.к.);
- 2) расстояние от корня до анального угла п.к.;
- 3) расстояние от апикального до анального угла п.к.;
- 4) ширина центральной ячейки п.к.;
- 5) длина центральной ячейки п.к.;
- 6) расстояние от конца центральной ячейки до апикального угла п.к.;

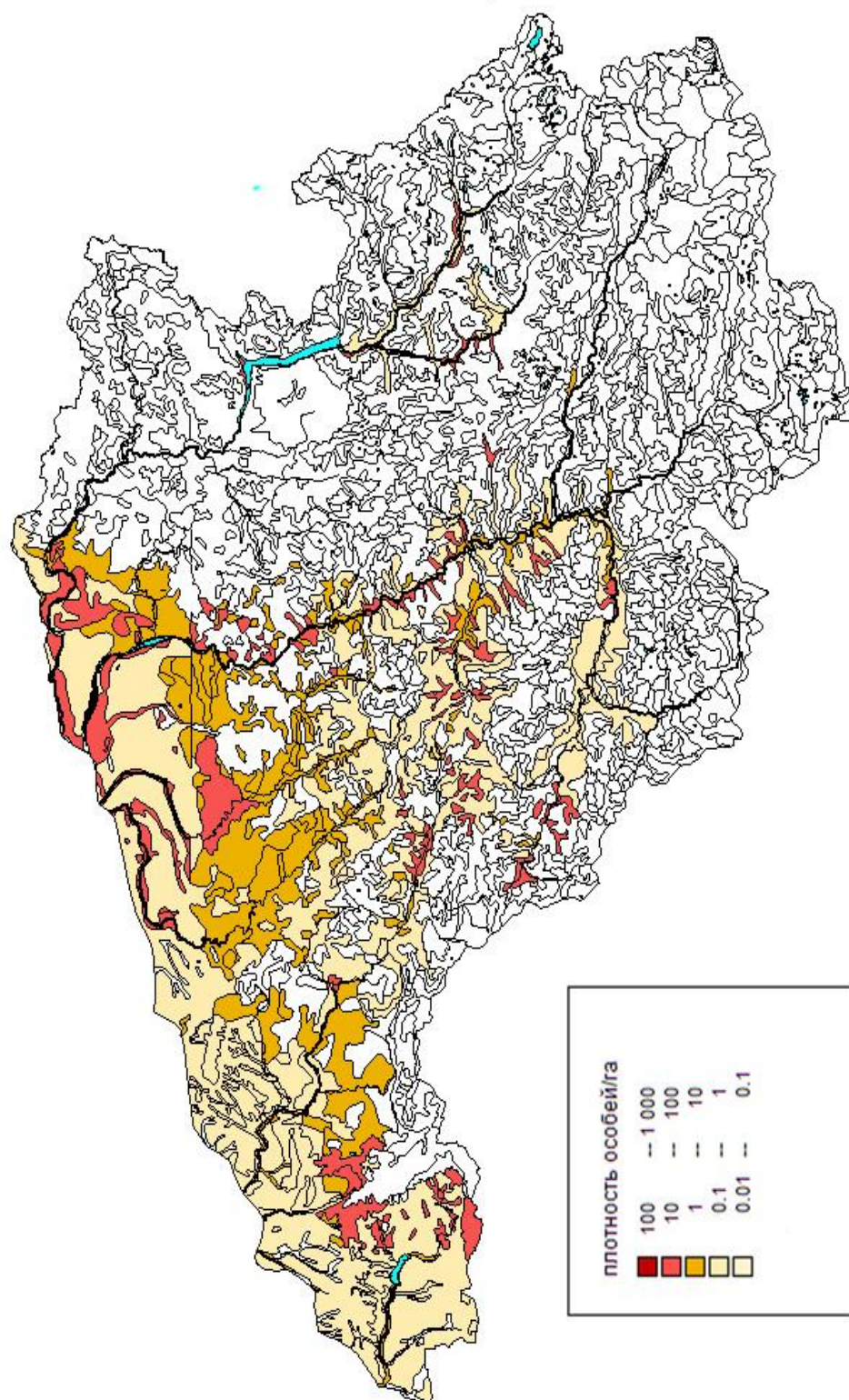


Рис. 1. Неоднородность распределения *Minois dryas* на Алтае

- 7) расстояние от апикального до анального угла заднего крыла (далее з.к.);
- 8) расстояние от корня до апикального угла з.к.;
- 9) расстояние от корня до конца второй анальной жилки з.к.;
- 10) расстояние от корня до конца третьей анальной жилки з.к.;
- 11) ширина центральной ячейки з.к.;
- 12) длина центральной ячейки з.к.

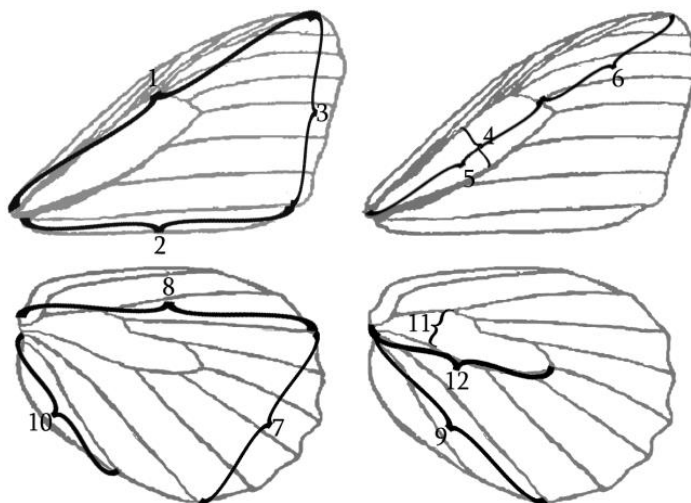


Рис. 2. Схема принятых в работе промеров крыла

Распределение вида анализируется на основе заимствованных из литературных источников [3–5] и собственных данных полученных в ходе маршрутных учетов 1975–2010 гг. во всех физико-географических провинциях Российского Алтая. Методика учетов опубликована [6]. Материалы учетов хранятся в банке данных лаборатории зоомониторинга ИСиЭЖ СО РАН (Новосибирск) и на кафедре зоологии ГАГУ (Горно-Алтайск). Обработка данных осуществлялась в ГИС MapInfo 6.5 на основе эколого-фитоценотической карты юга Западной Сибири. В случае несовпадения градаций в исходных материалах и на карте, а также при отсутствии сведений по некоторым выделам данные экстраполировались по типологического принципу.

Замеряли правое крыло. Измерения проводились с помощью программы tpsDig 2.12 [7]. Основная функция дигитайзера tpsDig – расстановка меток с целью последующей обработки методами геометрической морфометрии [8]. Одной из второстепенных возможностей программы является измерение линейных размеров, она и использована в данной работе.

Исходные данные обработаны методом главных компонент [9]. Главные компоненты рассматривались как интегральные характеристики, на основе которых для каждой выборки рассчитывались средние, их ошибки и достоверность различий [10]. Выборки самцов и самок в многомерном анализе рассматривались совместно, что позволяет выявить межполовые различия по совокупности признаков.

Предметный смысл главных компонент детально освещен применительно к морфологии позвоночных [10, 11]. Показано, что первую компоненту, в которую в большинстве случаев все признаки вносят положительный и примерно одинаковый вклад, можно интерпретировать как размерно-возрастную. Однако у имаго бабочек отсутствует возрастная изменчивость морфологических признаков в связи с неспособностью хитина к растяжению. Следовательно, анализируя имаго одного

поколения по градиенту первой компоненты, мы имеем дело с размерными различиями в “чистом” виде. Вторая компонента отражает менее явные отличия, связанные преимущественно с соразмерностью признаков. Существенно, что отличия по второй компоненте, как правило, связаны с различиями в корреляционных структурах [11] и имеют генетически детерминированный характер [12].

**Результаты и обсуждение.** Целостную картину изменчивости *Minois dryas* дает анализ расположения модельных выборок в компонентном пространстве (рис. 3). Все признаки вносят в первую компоненту примерно равный положительный вклад, следовательно, ее можно интерпретировать как переменную, отражающую отличия в линейных размерах структурных элементов крыла. Вдоль ее оси четко прослеживаются половые различия.

Самки из одного локалитета всегда крупнее самцов. Превосходство самок в размерах весьма характерно не только для бархатниц, но и в целом дневных чешуекрылых [13–15].

Вдоль вектора первой главной компоненты значимых географических отличий не выявлено. К примеру, алтайские (БИ) и красноярские самцы (КР) по этому показателю достаточно однородны. Различия в общих размерах крыла алтайских (БИ) и красноярских самок (КР) также несущественны.

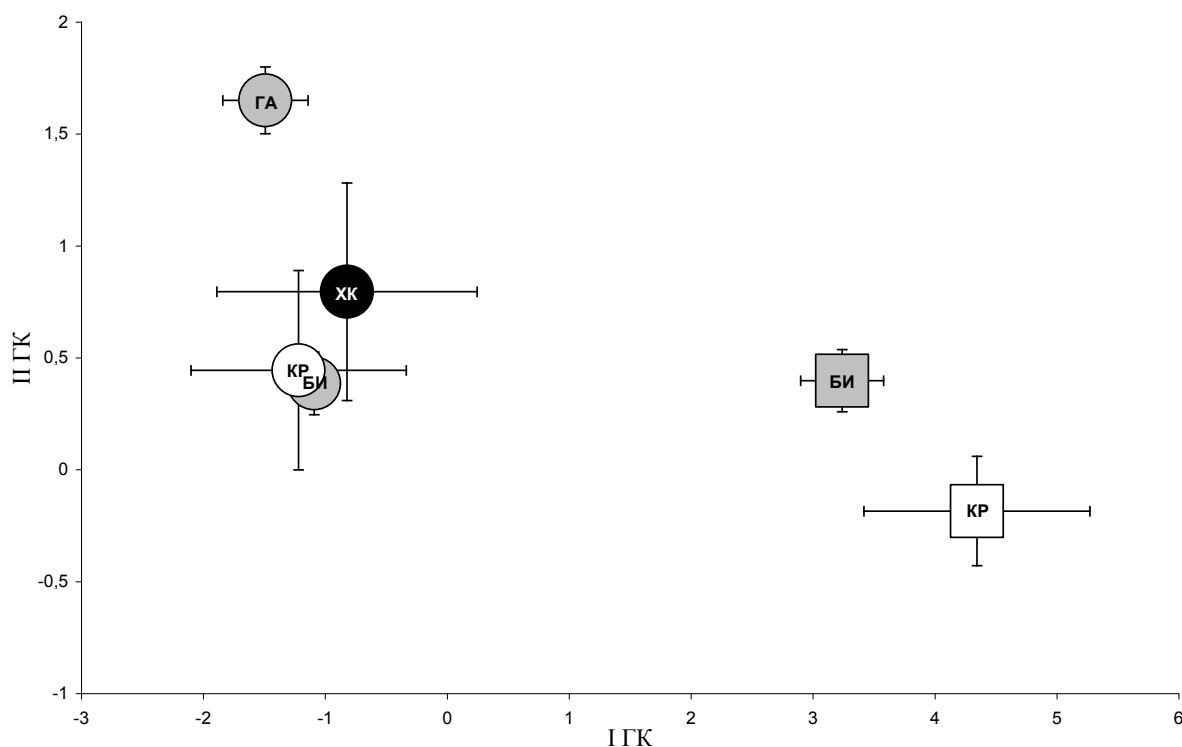


Рис. 3. Распределение центроидов *Minois dryas* в компонентном пространстве.

Условные обозначения: (БИ) – Быстрый Исток; (ГА) – Горно-Алтайск; (КР) – Красноярский край; (ХК) – Хакасия. Выборки самцов показаны кругом, самок – квадратом. Белым цветом обозначены красноярские бабочки, серым – алтайские, черным – хакасские особи

Отсутствие направленных перестроек фенотипа популяций регистрируется и по второй переменной. Алтайские (БИ) и красноярские самцы (КР) обладают сходными пропорциями крыла. Отдельным достоверным различиям между модельными выборками нам не удалось найти предметного объяснения. Основной причиной сходства популяций в относительных размерах крыла, по всей вероятности, можно

считать похожие условия обитания бабочек в разных частях ареала, что, в конечном итоге приводит к аналогичным морфологическим следствиям. Обращает внимание принципиально иной вектор географических различий у бархатницы *Aphantopus hyperantus* L. [16].

**Заключение.** Таким образом, проведенный анализ показал на слабую географическую изменчивость абсолютных размеров и формы крыла бархатницы *Minois dryas* в пределах алтайских, хакасских и красноярских популяций, что подтверждает мнение систематиков, объединяющих их в единый подвид *Minois dryas septentrionalis* Wnukowsky, 1929 [1, 2].

Автор выражает слова искренней благодарности проректору Горно-Алтайского государственного университета, докт. биол. наук А.В. Бондаренко за любезно предоставленные серии бабочек с Красноярского края и Хакасии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gorbunov P.Y. The butterflies of Russia: classification, genitalia, keys for identification (Lepidoptera: Hesperioidea and Papilionoidea) / P.Y. Gorbunov – Ekaterinburg, 2001. – 320 p.
2. Коршунов Ю.П. Булавоусые чешуекрылые Северной Азии / Ю.П. Коршунов. – Москва: КМК, 2002. – 424 с.
3. Бондаренко А.В. Булавоусые чешуекрылые Юго-Восточного Алтая (кадастр) / А.В. Бондаренко. – Горно-Алтайск, 2003. – 200 с.
4. Малков Ю.П. Фоновые булавоусые чешуекрылые нижней части бассейна р. Катунь / Ю.П. Малков // Пауки и насекомые Сибири. – Новосибирск, 1985. – С. 118-128.
5. Малков Ю.П. Булавоусые Еландинской котловины / Ю.П. Малков // Булавоусые чешуекрылые СССР. – Новосибирск, 1987. – С. 76-78.
6. Малков Ю.П. К методике учета булавоусых чешуекрылых / Ю.П. Малков // Животный мир Алтае-Саянской горной страны. – Горно-Алтайск, 1994. – С. 33-36.
7. Rohlf F.J. tpsDig2.12 (program). / Rohlf F.J. Department of Ecology and Evolution. SUNY at Stony Brook. – 2008.
8. Павлинов И.Я. Геометрическая морфометрия – новый аналитический подход к сравнению компьютерных образцов / И.Я. Павлинов // Информационные и телекоммуникационные ресурсы в экологии и ботанике. – СПб., 2001. – С. 65-90.
9. Ефимов В.М. Многомерный анализ биологических данных: учебное пособие – 2-е изд-е. исп. и дополн. / В.М. Ефимов, В.Ю. Ковалева. – Санкт-Петербург, 2008. – 86 с.
10. Васильев А.Г. Реализация морфологического разнообразия в природных популяциях млекопитающих / А.Г. Васильев, В.И. Фалеев, Ю.К. Галактионов, В.Ю. Ковалева, В.М. Ефимов, Л.Ю. Епифанцева, А.А. Поздняков, Т.А. Дупал, С.А. Абрамов. – Новосибирск: Наука, 2004. – 232 с.
11. Венгеров П.Д. Экологические закономерности изменчивости и корреляции морфологических структур птиц / П.Д. Венгеров. – Воронеж: ВГУ, 2001. – 248 с.
12. Tanaka Y. Polygenic analyses on morphological characters of *Pieris rapae crucivora* (Pieridae: Lepidoptera). II. Phenotypic, genetic and environmental correlations / Tanaka Y. // Jpn. J. Genet. – 1987. Vol. 62. – P. 59-67.
13. Захарова Е.Ю. Протандрия и изменчивость размеров в популяциях моновольтильных видов бархатниц (Lepidoptera: Satyridae) / Е.Ю. Захарова // Евразийский энтомологический журнал. – 2004. – № 3. вып. 1. – С. 59-65.
14. Кулакова О.И. К познанию фенотипической изменчивости чернушки *Erebia rossii* (Curtis, 1834) (Lepidoptera, Satyridae) на полярном Урале / О.И. Кулакова, А.Г. Татаринов // Зоология. Ботаника. Экология. 2005. – С. 70-78.
15. Gotthard K. Adaptive growth decisions in butterflies / K. Gotthard // BioScience. – 2008. – Vol. 58. #3. – P. 220-230.
16. Копылов М.А. Изменчивость бархатницы *Aphantopus hyperantus* (Lepidoptera, Satyridae) в долготном градиенте / М.А. Копылов // Биоразнообразие, проблемы экологии Горного Алтая и сопредельных регионов: настоящее, прошлое, будущее. Материалы IV Международной конференции 26-30 сентября 2016 г., Горно-Алтайск. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2016. – С. 102-105.

Поступила в редакцию 08.02.2022 г.

VARIABILITY OF THE MARIGOLD MINOIS DRYAS (SCOPOLI, 1763) (LEPIDOPTERA, SATYRIDAE) IN GEOGRAPHICAL SPACE

*M. A. Kopylov*

The article provides a detailed description of the morphological variability of the structural elements of the butterfly wing *Minois dryas* (Scopoli, 1763) (Lepidoptera, Satyridae). The sexual specificity of the imago is manifested in the larger sizes of females. Geographical differences between the studied *M. dryas* groupings are not significant and do not have a directional character. This is probably due to the similar living conditions of butterflies in different parts of the range.

**Key words:** variability; wing size; butterfly; *Minois dryas*; spread; geographic isolation.

**Копылов Максим Анатольевич**

Кандидат биологических наук,  
сотрудник кафедры биологии и химии  
ФГБОУ ВО «Горно-Алтайский государственный  
университет», г. Горно-Алтайск, РФ.  
E-mail: kopilov.m@mail.ru

**Kopylov Maxim Anatolyevich**

Candidate of Biological Sciences FSBEI HE "Gorno-Altai State University", employee of the Department of Biology and Chemistry Gorno-Altaysk, RF.

УДК 581.15 : 581.4 (477.60)

## СТРУКТУРНЫЕ АСПЕКТЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ФИТОИНДИКАЦИИ ЛАНДШАФТОВ ДОНБАССА (К 100-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА М.Л. РЕВЫ)

© 2022. А. И. Сафонов

---

Впервые опубликованы данные о структурных анатомо-морфологических исследованиях профессора кафедры ботаники и экологии М.Л. Ревы из музейного фонда Донецкого национального университета (к 100-летию выдающегося ученого Донбасса). Выделены актуальные тенденции в изучении пластичности растений техногенных экотопов в качестве индикаторных видов. Совмещены позиции классификации техногенных экотопов М.Л. Ревы с современными результатами фитомониторинга в донецком экономическом регионе.

**Ключевые слова:** структурная ботаника, экологическая пластичность растений, фитоиндикация, экологический мониторинг, Донбасс, М.Л. Рева

---

**Введение.** В числе выдающихся ученых Донбасса, чья жизнь была связана с изучением природных и техногенных ландшафтов в XX веке, выделяется профессор Михаил Лукич Рева [1–2]. Актуализация ретроспективных анализов в свете новых достижений ученых профильных кафедр биологического факультета проходит также в качестве профориентационного и научно-исторического мероприятия по оценке жизненного пути знаменитых людей донецкого региона как пример нравственных ориентиров в созидательном процессе для научной консолидации в решении задач развития промышленных и трансформированных территорий [3–5].

Цель работы – на основании накопленного опыта изучения ландшафтного и ботанико-экологического разнообразия техногенных территорий Донбасса [6–9], выделив иллюстративную часть структурно-ботанических разработок М.Л. Ревы, представить современные данные о состоянии фитообъектов из контекста индикаторной гетерогенности в условиях антропогенной трансформации среды.

**Материал и методика исследования.** Для оценки растительных объектов по структурно-адаптационным критериям использовали методические подходы мировых научных школ [10–12]. Ландшафтно-геостратегические методики были реализованы в проекции аналогичных разработок местностей, трансформированных в результате развития горнодобывающей промышленности [13, 14]. Эксперименты по анатомо-морфологическим исследованиям представляют актуальные разработки в качестве фитоиндикационных манипуляций мониторингового назначения [15–18], что также востребовано и в научно-образовательном процессе при дидактическом оснащении специализированных курсов ботанико-экологического содержания [19]. Анализ данных систематизировали по сетевым закономерностям геоинформационного поля на основании существующих методик оценки риска в местах геохимически контрастных сред [20].

**Анализ результатов.** Основа для получения данных об анатомо-морфологических преобразованиях растительных организмов в Донбассе, как с середины XX века, так и на сегодняшний день, – световая микроскопия. В классическом обозначении были проанализированы и прокомментированы оттиски данных о строении разных растений, имеющих значение в фиторекультивационных работах на техногенных объектах Донбасса (рис. 1–2).

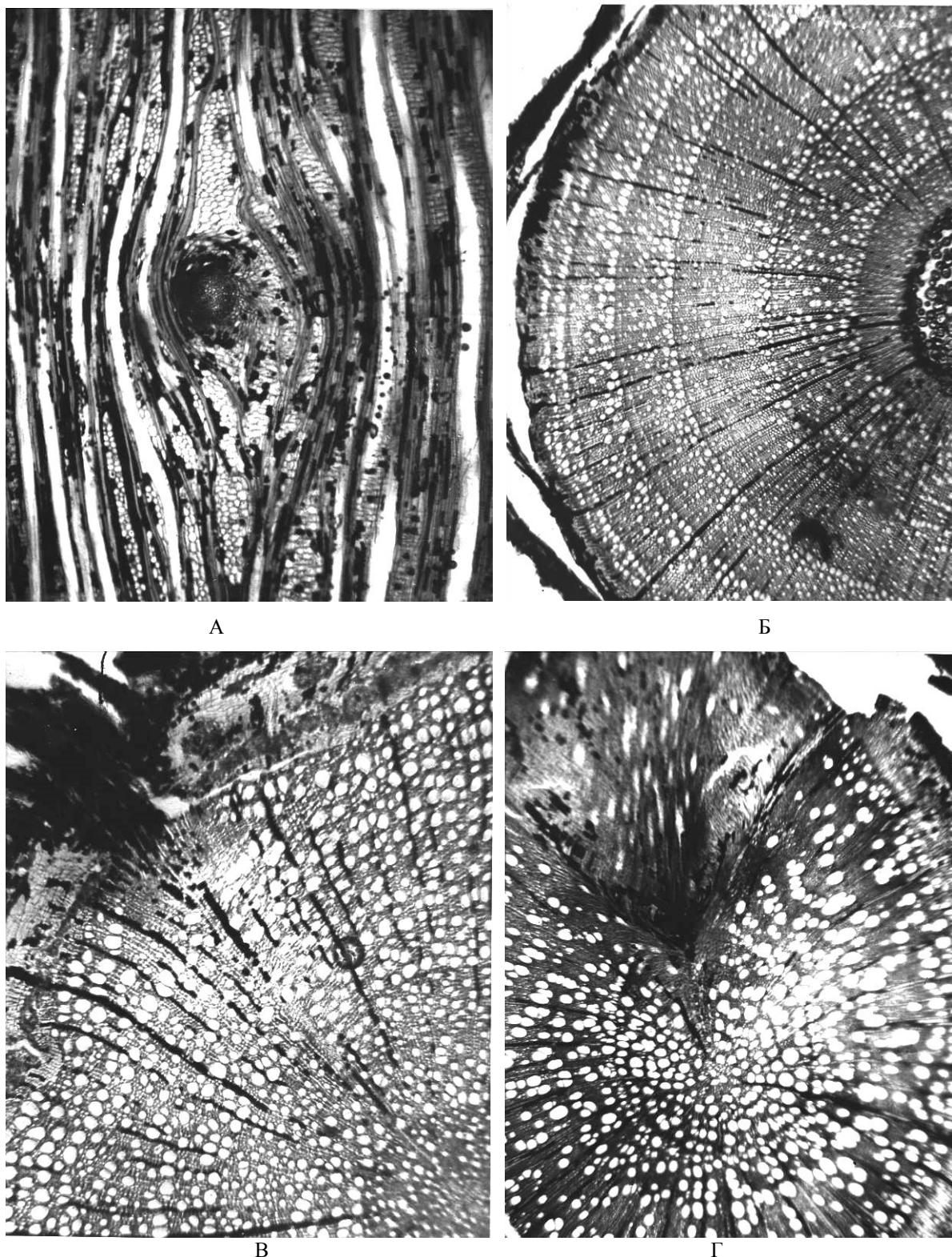


Рис. 1. Срезы древесных и кустарниковых растений:

А – тангентальный срез корня свидины (сосудистый пучок связывает придаточную почку с центральным цилиндром), Б – поперечный срез специализированного отводка бирючины, В – заложение бокового корня в паренхиме коры свидины (связь корня с ксилемой осуществляется по сердцевинному лучу), Г – заложение бокового корня из перикампа малины обыкновенной.

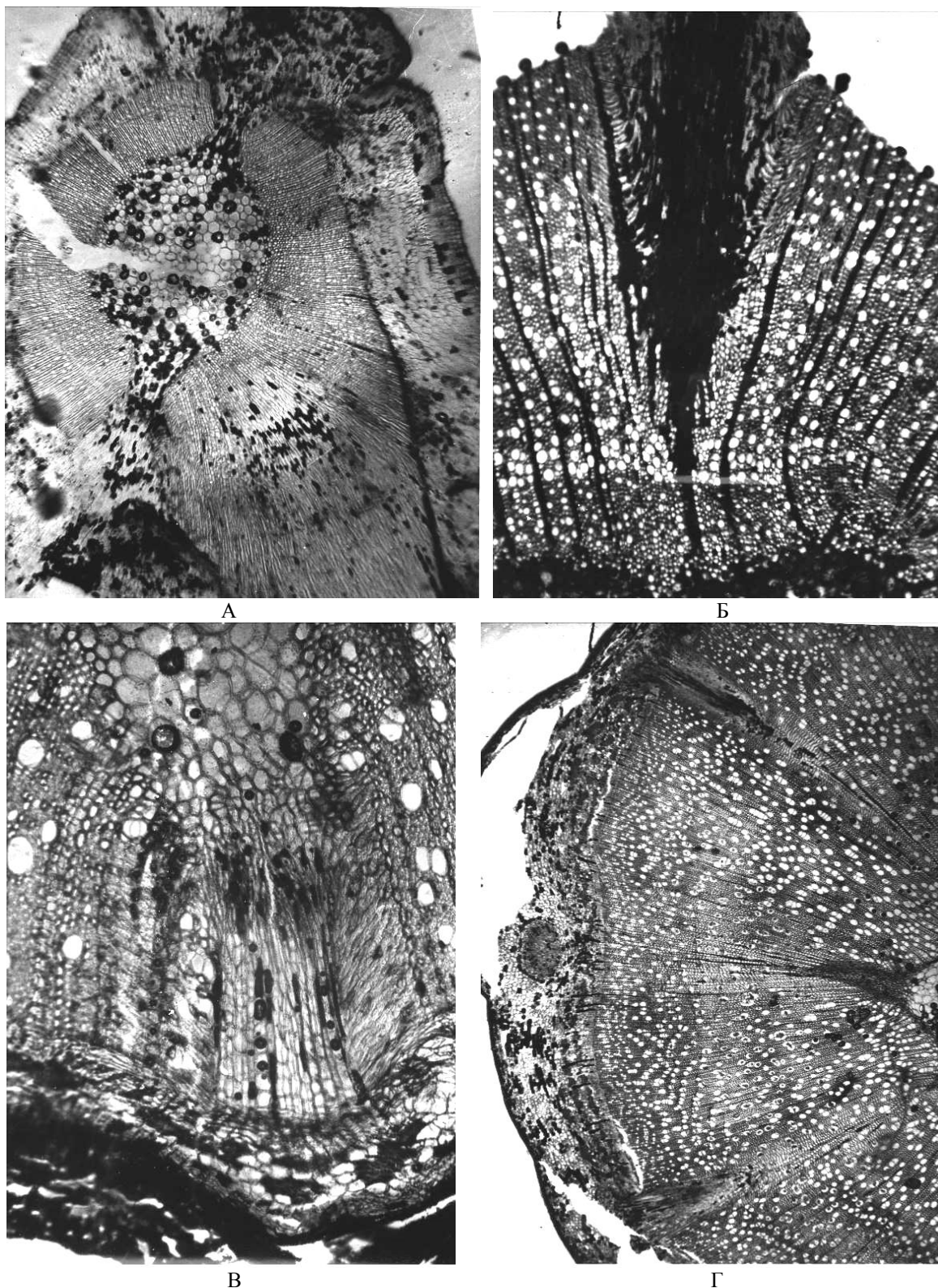


Рис. 2. Детальные срезы инициации меристем растений:

А – поперечный срез шагающего отводка форзиции в зоне узла, на котором образовался придаточный корень, а из пазушных почек вырастают побеги возобновления, Б – поперечный срез корневища сирени в месте образования придаточного корня, В – эндогенное развитие пазушной почки на корневище шиповника, Г – поперечный срез побега ивы, меристематические очаги образовались во флоэме в зоне камбия сердцевинных лучей.

Указанные на рисунках 1 и 2 ботанические объекты представляют собой интерес в экспериментах по вегетативному размножению растений при инициации отдельных структур, позволяющих в дальнейшей дифференциации увеличить фитомассу или создать дополнительную побеговую систему. Такие доказательства важны для понимания механизма адаптации растений к неблагоприятным экологическим факторам или в случае использования видов в технологиях рекультивации нарушенных экотопов.

На современном этапе научных интерпретаций анатомо-морфологические данные могут проходить процесс шкалообразования с учетом всего диапазона пластичности конкретного признака гистологической, цитологической или органно-морфологической структуры. Обоснование меристематических активностей было рассмотрено в предыдущих публикациях [15, 16], поэтому имеет смысл провести данные учета частоты встречаемости стратегически важных преобразований у растений-индикаторов техногенного загрязнения в контексте принадлежности к разным ландшафтно-классификационным системам:

– в группе селитебных ландшафтов отмечены категории: 1) сельских селитебных ландшафтов (12–15 % от индицируемых фитодиагностикой территорий современного центрального Донбасса); 2) поселковых одноэтажных селитебных ландшафтов (не более 7 %); 3) городских многоэтажных селитебных ландшафтов (11 % исследуемой территории), – важным примером реализации фитомониторинга в указанных экотопах является структурно-корреляционный критерий видов сорно-рудеральной фракции урбанофлор анализируемых учетных площадок;

– в группе промышленно-индустриальных ландшафтов учет проведен для следующих категорий (типов) природно-территориальных комплексов: 1) карьерно-отвалы ландшафты составляют не более 10% от исследуемой всей территории мониторинговой сети, в этой системе доминирующая группа – отвалы горных вскрышных пород и промышленный карст, осуществляется учет жизненных форм и реализации популяционных и онтогенетических стратегий выживания видов, представляющих собой индикационное значение в диагностике экотопа; 2) аккумулятивно-отвалы ландшафты занимают площадь более 13 % и представлены породными отвалами шахт и обогатительных фабрик, шлаковыми отвалами металлургических предприятий, шламонакопителями; 3) промышленные городские пустыри и 4) рудеральные полигоны (бытовые отходы) в значительной степени диагностируются за счет микроскопических признаков поверхностей растительного организма – по форме и характеру опушения, особенностям отложения слоя кутикулы или эпидермальных формирований;

– отдельную группу ландшафтных систем представляют территории могильных и сторожевых курганов, которые характерны для буферных или типичных зон природно-заповедного фонда, составляют не более 1 % всей зоны наблюдения, – соотнесены в класс ландшафтов антропогенного генезиса, – в таких условиях реализуются фитодиагностические мероприятия с минимально трансформирующими растительный покров манипуляциями, например, по сбору пылевых зерен, элементов диссеминации в специальных улавливающих приспособлениях; на уровне государственной оценки такие места представляют собой частично восстановленные природные экосистемы и выступают аналогами получения информации для фонового мониторинга.

Все перечисленные ландшафтные системы должны проходить ежегодную экспертную оценку по состоянию степени нарушенности почвенного и растительного покровов, а также уровня токсической нагрузки на локалитеты.

**Выводы.**

1. Данные о гистологическом, анатомо-морфологическом и архитектоническом гетероморфизме растений представляют собой важную ботанико-экологическую информацию о реализации адаптивного потенциала растений, что актуально как в фитомелиоративных, так и фитоиндикационных мероприятиях мониторингового назначения и содержания в Донбассе.

2. Древесные и кустарниковые формы, проявляя суточную динамику активности меристематических структур, реализуют ответную реакцию растительного организма на факторы стресса и в условиях прикрепленного геолокалитета не только метаморфозируются, но и оптимизируют среду, участвуя в процессах детоксикации природных сред, что позволяет реализовать механизмы природного самоочищения и восстановления трансформированных или загрязненных экосистем.

3. В спектре доминирующих ландшафтных систем техногенного региона перечислены фитодиагностические подходы в осуществлении мониторингового эксперимента на современном этапе региональных научных разработок.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Рева М.Л. Растительность техногенных земель в Донбассе / М.Л. Рева, А.И. Хархота // Растения и промышленная среда. – Свердловск: УрГУ, 1978. – С. 33-34.
2. Рева М.Л. Возобновления растительного покрова в специфических условиях техногенных ландшафтов Донбасса / М. Л. Рева // Программа и методика изучения техногенных биогеоценозов. – М.: Наука, 1978. – С. 136-147.
3. Горещкий О.С. К 115-летию выдающегося биолога Фёдора Львовича Щепотьева (1906–2000) / О.С. Горещкий, Т.П. Столярова, А.И. Сафонов // Историко-биологические исследования. – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 169–183.
4. Петкогло О.В. Научный ресурс ботанического музея в г. Донецке / О.В. Петкогло // Донецкие чтения 2016: Образование, наука и вызовы современности: матер. I Междунар. науч. конф. (Донецк, 16-18 мая 2016 г.). – Т. 2. Хим. и биол. науки. – Донецк: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 139-140.
5. Мурашкин В.В. Ландшафтная фитоиндикация в Донбассе: ретроспективный и перспективный анализ / В.В. Мурашкин // Вестник студенческого научного общества ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет". – 2022. – Т. 1. – № 14. – С. 82-86.
6. Калинина А.В. Фитоиндикационный мониторинг на отвалах угольных шахт г. Макеевки, внедрение данных в образовательную программу / А.В. Калинина // Донецкие чтения 2017: Русский мир как цивилизационная основа научно-образовательного и культурного развития Донбасса: матер. Междунар. науч. конф. (Донецк, 17-20 октября 2017 г.). – Донецк: ДонНУ, 2017. – С. 80-82.
7. Сафонов А.И. Функциональная ботаника в Донбассе: экологический мониторинг, информационные ресурсные технологии, фитодизайн / А.И. Сафонов // Проблемы экологии и охраны природы техногенного региона. – 2017. – № 1–2. – С. 6-12.
8. Сафонов А.И. Актуальные позиции индикационных разработок на кафедре ботаники и экологии ДонНУ / А.И. Сафонов // Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Матер. V Междунар. науч. конф. (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.). – Т. 2: Хим.-биол. науки. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 252-254.
9. Сафонов А.И. Новые виды растений в экологическом мониторинге Донбасса / А.И. Сафонов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2020. – № 1. – С. 96-100.
10. Уразгильдин Р.В. Повреждения, адаптации, стратегии древесных видов в условиях техногенеза: структурно-функциональные уровни реализации адаптивного потенциала / Р.В. Уразгильдин, А.Ю. Кулагин // Успехи современной биологии. – 2022. – Т. 142, № 1. – С. 52-69.
11. Барыкина Р.П. Справочник по ботанической микротехнике. Основы и методы / Р.П. Барыкина. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 312 с.
12. Bell A.D. Plant form: An illustrated guide to flowering plant morphology. Oxford; New York; Tokyo: Oxford University Press, 1991. 341 p.
13. Bian Z. Influencing factors and evaluation of land degradation of 12 coal mine areas in Western China / Z. Bian, H. Yu, J. Hou, S. Mu // Journal of China Coal Society. – 2020. – Vol. 45. – P. 338-350.

14. Wang S. Recognition of landscape key areas in a coal mine area of a semi-arid steppe in China: a case study of Yimin open-pit coal mine / S. Wang, J. Huang, H. Yu, C. Ji // Sustainability. – 2020. – Vol. 12. – P. 2239.
15. Сафонов А.И. Тканевая диагностика эмбриональных структур фитоиндикаторов Донбасса / А.И. Сафонов // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020. – № 3–4. – С. 110–115.
16. Сафонов А.И. Межфазные точки роста в фокусе внимания стратегической фитоиндикации / А.И. Сафонов // Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Матер. VI Междунар. науч. конф. (Донецк, 26–27 октября 2021 г.). – Т. 3: Биологические и медицинские науки, экология. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. – С. 146–148.
17. Сафонов А.И. Критерии фитоиндикационного мониторинга в антропогенно трансформированной среде / А. И. Сафонов // Инновационные технологии защиты окружающей среды в современном мире: Матер. Всерос. научн. конф. (Казань, 18–19 марта 2021 г.). – Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2021. – С. 1611–1615.
18. Сафонов А.И. Стратегическая потенциализация фитоиндикаторов техногенных загрязнений / А.И. Сафонов // Аграрная Россия. – 2009. – № 51. – С. 58–59.
19. Сафонов А.И. Специфика образовательных технологий на кафедре ботаники и экологии ДонНУ при подготовке студентами выпускных квалификационных работ / А.И. Сафонов // Развитие интеллектуально-творческого потенциала молодежи: из прошлого в современность: Матер. I Междунар. науч.-практич. конф. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – С. 274–275.
20. Xu W. Construction of landscape ecological network based on landscape ecological risk assessment in a large-scale opencast coal mine area / W. Xu, J. Wang, M. Zhang, S. Li // Journal of Cleaner Production. – 2021. – Vol. 286. – P. 125523.

*Поступила в редакцию 20.05.2022 г.*

#### STRUCTURAL ASPECTS OF OPTIMIZATION AND PHYTOINDICATION OF DONBASS LANDSCAPE (ON THE 100TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR M.L. REVA)

*A.I. Safonov*

For the first time, data on structural anatomical and morphological studies of the outstanding scientist of Donbass of the Department of Botany and Ecology from the museum fund of the Donetsk National University (to the 100th anniversary of professor M.L. Reva). Current trends in the study of the plasticity of plants in technogenic ecotopes as indicator species are highlighted. The positions of the classification of technogenic ecotopes by M.L. Reva with modern results of phytomonitoring in the Donetsk economic region.

**Keywords:** structural botany, ecological plasticity of plants, phytoindication, ecological monitoring, Donbass, M.L. Reva

**Сафонов Андрей Иванович**

Кандидат биологических наук, доцент;  
заведующий кафедрой ботаники и экологии  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк, ДНР.  
E-mail: a.safonov@donnu.ru

**Safonov Andrey**

Candidate of Biological Sciences, Docent;  
Head of the Department of Botany and Ecology,  
Donetsk National University, Donetsk, DPR.

УДК 58.072+631.417.2

## СОДЕРЖАНИЕ ОРГАНИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА В ЭДАФОТОПАХ АНТРОПОГЕННО ТРАНСФОРМИРОВАННЫХ ЭКОСИСТЕМ КАК ОДИН ИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИХ УСПЕШНОГО САМОВОЗОБНОВЛЕНИЯ

© 2022. Д.В. Сыщиков, И.В. Агурова

В результате проведенных исследований установлен ниспадающий линейный вид сезонной динамики содержания органического вещества как в зональной почве, так и в почвах антропогенно трансформированных экосистем. Проведение фиторекультивационных мероприятий оказало положительное влияние на распределение гумуса в генетических горизонтах техноземов, выражающееся в возрастании его значений от 17 до 244 % в различных вариантах исследований по сравнению с мониторинговыми участками с естественным растительным покровом. Максимальный позитивный эффект на изменение содержания органического вещества был зафиксирован при использовании поликомпонентной смеси из видов *Roaseae*.

**Ключевые слова:** техногенный экотоп; органическое вещество; технозем; эдафотоп; мониторинговый участок; урбанизированные экосистемы; породные отвалы

**Введение.** Ключевым звеном посттехногенного восстановления техногенно нарушенных земель является первичное почвообразование, которое обуславливает формирование примитивных почв. При этом успешность самовозобновления почвенного покрова во многом определяет длительность периода, необходимого для натурализации техногенных ландшафтов [1]. Одними из ведущих факторов почвообразования являются растения и сопутствующие им микробные сообщества, первоначально стимулирующие рост растений, а по завершении вегетационного периода трансформирующие поступающие в грунт отмершие растительные остатки в гумусовые вещества за счет продуцирования комплекса активных ферментов. Велика также роль микроорганизмов в разрушении горных пород и переводе их в мелкозем [1].

Глубокие преобразования, происходящие в минеральной части эмбриоземов, такие как интенсивное выветривание первичных минералов, перераспределение по профилю отдельных элементов и т.д., протекают при непосредственном воздействии гумусовых веществ, играющих роль мощного агента выветривания и почвообразования [2]. Наряду с этим, содержание гумуса является наиболее важным показателем плодородия и экологического состояния почвы как в природных экосистемах, так и в условиях техногенно нарушенных земель. Органическое вещество определяет структуру почвы, в значительной степени формирует ее физико-химические и обменные свойства и в определенной степени служит депо питательных элементов [3, 4].

**Методика проведения экспериментов.** Для исследования почвенного покрова деградированных экосистем были выбраны модельные участки, учитывая распространенность типа нарушения в пределах района исследований, степень антропогенной трансформации, возможность восстановления биологической продуктивности и вовлечения в экономическую деятельность, потенциальный экологический эффект при проведении рекультивационных мероприятий. Для оценки влияния моновидовых травянистых культурфитоценозов на протекание почвообразовательных процессов в эдафотопях антропогенно трансформированных экосистем был проведен высев семян *Kitaibelia vitifolia* Willd., *Onobrychis arenaria* (Kit.) DC. и видов *Roaseae* на площади 1 м<sup>2</sup> по отдельности на каждом из мониторинговых участков.

*Мониторинговый участок № 1.* Территория, прилегающая к южной части отвала шахты № 12 «Наклонная» (Пролетарский район г. Донецк). Общее проективное покрытие 95–100 %.

Чернозем обыкновенный средне гумусированный.

A<sub>1</sub> – 0–47 см. Свежий, темно-бурый однородный, легкосуглинистый, среднезернистый, умеренно плотный. Новообразований и включений не отмечено. Много корней. Переход в горизонт A<sub>2</sub> ясный по цвету и структуре.

A<sub>2</sub> – 47–86 см. Свежий, светло-каштановый-коричневый, неоднородный, легкосуглинистый, среднезернистый, умеренно плотный. Новообразований и включений не отмечено. Редкие корни. Переход в горизонт B резкий по цвету и структуре.

B – 86–110 см. Суховатый, светло-каштановый, однородный, суглинистый, пластинчатый, умеренно плотный. Новообразований и включений не отмечено. Единичные корни. Переход в горизонт C языковатый по цвету.

C – глубже 110 см. Суховатый, коричневато-оранжевый, однородный, суглинистый, пластинчатый, плотный. Новообразований и включений не отмечено. Корни отсутствуют.

Данный участок рассматривается нами как условный контроль.

*Мониторинговый участок № 2.* Выведенный из эксплуатации карьер по добыче строительного камня (балка Калиновая, Горняцкий район, г. Макеевка). Растительный покров с высокой мозаичностью, имеются пятна как сорно-рудеральных видов, так и видов степного ценоэлемента. ОПП (за вычетом поверхности крупнообломочного камня) 70–80 %.

Примитивные неразвитые почвы на песчанике.

A – 0–5 см. Черный, густо пронизан корнями растений. Структура мелкопорошистая, агрегаты 2 мм диаметром. Переход в горизонт C четкий по цвету, структуре и плотности. Отмечаются ходы зоогенной природы, выцветы солей (розоватые). Каменистость – 5%.

C – Светло-коричневый, продукты метаморфизации песчаников. Каменистость – 20%, пронизан корнями растений. Прослежен до глубины 20 см.

Почвообразование по дерновому типу (выражен дерновый гумусо-аккумулятивный процесс).

*Мониторинговый участок № 3.* Зона выполаживания склона южной экспозиции у основания отвала шахты им. Ленина (Горняцкий район, г. Макеевка). Общее проективное покрытие составляет 50-60%, имеются незаросшие прогалины, доминирование отдельных видов не выражено.

Примитивные седиментационные неразвитые почвы.

A – 0–10 см. Коричневый, относительно уплотненный, мелкозернистый, суховатый. Каменистость – 5 %. Густо пронизан корнями растений.

C – Темно-серый, метаморфизированный сланец, пластинчатый, сухой, пронизан корнями растений. Каменистость – 30 %. Прослежен до глубины 30 см.

*Мониторинговый участок № 4.* Склон отвала шахты им. Ленина южной экспозиции (Горняцкий район, г. Макеевка). В средней части склона угол поверхности составляет около 30°, поэтому ОПП достигает только 20-30%.

Субстрат с признаками почвообразования.

A – 0–15 см. Коричневый, рыхлый, мелкозернистый, суховатый. Каменистость – 5 %. Переход в горизонт C – постепенный, по цвету – затеками.

C – палевый, прослежен до глубины 30 см. Каменистость – 15 %. Присутствуют выцветы солей и продукты метаморфизации сланцев.

*Мониторинговый участок № 5.* Склон отвала шахты № 12 «Наклонная» восточной экспозиции (Пролетарский район г. Донецк). Моновидовая группировка *Oberna behen* (L.) Ikonn. Общее проективное покрытие 10–15 %.

Примитивные неразвитые фрагментарные почвы.

А – 0–27 см. Сухой, темно-серый, однородный, бесструктурный, порошистый, рыхлый. Новообразований не отмечено, каменистость 10 %. Переход в горизонт С неясный, по цвету.

С – Сухой, темно-коричневый, однородный, бесструктурный, порошистый, рыхлый. Новообразований не отмечено, каменистость 50 %. Единичные корни. Прослежен до глубины 60 см.

В профиле наблюдается первичное агрегатообразование по корням растений, накопление гумуса не имеет морфологического выражения вследствие слабого развития глинистой составляющей. Имеющийся гумус «замаскирован» серым цветом измельченной породы.

*Мониторинговый участок № 6.* Склон отвала шахты № 12 «Наклонная» северной экспозиции (Пролетарский район г. Донецк). Общее проективное покрытие 25–30 %.

Примитивные неразвитые почвы.

А – 0–20 см. Свежий, темно-бурый, однородный, бесструктурный, порошистый, рыхлый. Новообразований не отмечено, каменистость 25 %. Густо пронизан корнями растений. Переход в горизонт С ясный по цвету.

С – Суховатый, темно-серый, однородный, бесструктурный, порошистый, рыхлый. Новообразований не отмечено, каменистость 40 %. Единичные корни. Прослежен до глубины 45 см.

*Мониторинговый участок № 7.* Свалка твердых бытовых отходов (Пролетарский район, г. Донецк). Общее проективное покрытие составляет 80 %.

Примитивные неразвитые почвы на песчанике.

А – 0–18 см. Суховатый, темно-серый, однородный, супесчаный, мелкозернистый, слабо уплотненный. Новообразований и включений не отмечено. Много корней. Переход в горизонт С резкий, волнистый по цвету и структуре.

С – Сухой, белесоватый-темно-каштановый, неоднородный, песчаный, мелкокомковатый, рыхлый. Новообразований и включений не отмечено. Единичные корни. Прослежен до глубины 40 см.

*Мониторинговый участок № 8.* Территория, загрязненная строительными отходами, прилегающая к реке Богодуховая (Буденновский район г. Донецк). Общее проективное покрытие составляет 70 %.

Примитивные неразвитые фрагментарные почвы.

А – 0–34 см. Сухой, светло-серый, однородный, бесструктурный, порошистый, рыхлый. Новообразований не отмечено, каменистость 7 % от мелкообломочной фракции. Пронизан корнями растений. Переход в горизонт С постепенный, по цвету.

С – Сухой, коричневый, однородный, бесструктурный, порошистый, рыхлый. Новообразований не отмечено, каменистость 20 %. Единичные корни. Прослежен до глубины 70 см.

Описание почвенных разрезов проводили согласно общепринятым методикам [5, 6]. Отбор почвенных образцов проводили по почвенным горизонтам [7].

Содержание органического вещества по методу Тюрина со спектрофотометрическим окончанием по Орлову-Гриндель [8]. Статистическая обработка экспериментальных данных проводилась по общепринятым методам параметрической статистики на 95 % уровне значимости по Ю.Г. Приседскому [9].

**Анализ результатов.** В результате ранее проведенных исследований [10, 11] установлено, что примитивные неразвитые ефрагментарные почвы и примитивные неразвитые почвы характеризуются низким содержанием гумуса, что может быть обусловлено рядом физических (неразвитость почвенного профиля, жесткий гидротермический режим, низкие значения рН почвенного раствора и др.) и биологических (слабое развитие растительного покрова и его низкий видовой состав) факторов. Зафиксирован положительный фиторекультивационный эффект на содержание органического вещества в эдафотопх ряда мониторинговых участков, где отмечено поступательное возрастание концентрации органического вещества (на 10–50 %) с увеличением длительности мониторинговых исследований [12].

В результате изучения содержания органического вещества в эдафотопх антропогенно трансформированных экосистем в весенний период исследований установлено, что наименьшие значения показателя, не превышающие 30 % по отношению к контролю, характерны для гумусо-аккумулятивного горизонта (табл. 1, 2). Примитивные неразвитые почвы на песчанике участка № 7 по концентрации гумуса были приближены к показателям зональной почвы, а в горизонте С отмечено превышение значений контроля на 40 %. Указанный факт может быть объяснен тем, что данный вторичный субстрат (полигон ТБО) имеет потенциально изначально высокое содержание гумуса в черноземе, на котором он сформирован. В нижележащих генетических горизонтах тенденция к уменьшению содержания органического вещества была выражена не так существенно – концентрация гумуса снижалась от 47 до 60%. В целом наиболее низкими значениями содержания органического вещества характеризовались примитивные неразвитые фрагментарные почвы отвальных экосистем, в которых его концентрация в среднем составляла 12 и 33 % по отношению к зональной почве в гумусо-аккумулятивном горизонте и материнской породе соответственно. Также, не смотря на укороченность и относительную неразвитость почвенного профиля техноземов, сохраняется нормальное профильное распределения гумуса с преимущественной его локализацией в верхней части профиля.

Проведение биологической рекультивации позитивно сказалось на концентрации гумуса в эдафотопх всех исследованных антропогенно трансформированных экосистем. Следует отметить, что возрастание значений исследуемого показателя зафиксированы не только при сравнении участков, подвергавшихся фиторекультивационным мероприятиям и участкам с естественной растительностью (возрастание на 17–244 и 20–141 % в горизонтах А и С соответственно), но и по отношению к зональной почве (табл. 1, 2). Максимальный позитивный эффект на изменение содержания органического вещества был зафиксирован при использовании поликомпонентной смеси видов Роасеае, что выразилось в статистически достоверном превышении контрольных показателей в 1,2–3,4 и 1,6–2,4 раз для гумусо-аккумулятивного горизонта и материнской породы соответственно. Отмеченное возрастание концентрации гумуса, по-видимому, объясняется формированием значительного количества внутрипочвенного (корневого) опада, выступающего главным источником гумусообразования. На участках с использованием в качестве фитомелиоранта эспарцета и китайбелии увеличение содержания органического вещества было не столь существенно выражено, – превышение показателей зональной почвы составляло от 18 до 180 % в зависимости от генетического горизонта и мониторингового участка.

Таблица 1

Содержание гумуса (%) в почвах урбанизированных экосистем

| Участок,<br>горизонт | Весна              |       |            | Лето             |            |       | Осень              |       |            |                  |            |       |
|----------------------|--------------------|-------|------------|------------------|------------|-------|--------------------|-------|------------|------------------|------------|-------|
|                      | Нерекультивируемые |       |            | Рекультивируемые |            |       | Нерекультивируемые |       |            | Рекультивируемые |            |       |
|                      | M ± m              | %     | M ± m      | %                | M ± m      | %     | M ± m              | %     | M ± m      | %                | M ± m      | %     |
| № 2 Ап               | 0,54±0,03*         | 16,0  | 1,86±0,03* | 55,0             | 0,48±0,02* | 15,2  | 1,32±0,1*          | 42,0  | 0,41±0,03* | 15,1             | 1,64±0,11* | 60,6  |
| № 2 Сп               | 0,39±0,02*         | 45,3  | 0,73±0,02* | 84,3             | 0,33±0,01* | 39,8  | 1,06±0,06*         | 128,4 | 0,26±0,02* | 42,6             | 1,21±0,04* | 198,4 |
| № 2 Аэ               | 0,54±0,03*         | 16,0  | 1,51±0,04* | 44,6             | 0,48±0,02* | 15,2  | 1,22±0,07*         | 38,9  | 0,41±0,03* | 15,1             | 1,08±0,07* | 39,7  |
| № 2 Сэ               | 0,39±0,02*         | 45,3  | 0,61±0,02* | 70,7             | 0,33±0,01* | 39,8  | 0,52±0,01*         | 63,0  | 0,26±0,02* | 42,6             | 0,46±0,03* | 76,2  |
| № 2 Ак               | 0,54±0,03*         | 16,0  | 1,40±0,03* | 41,6             | 0,48±0,02* | 15,2  | 1,25±0,02*         | 39,7  | 0,41±0,03* | 15,1             | 1,07±0,09* | 39,6  |
| № 2 Ск               | 0,39±0,02*         | 45,3  | 0,56±0,03* | 64,7             | 0,33±0,01* | 39,8  | 0,51±0,01*         | 61,6  | 0,26±0,02* | 42,6             | 0,45±0,04* | 74,3  |
| № 7 Ап               | 3,54±0,06          | 104,7 | 3,79±0,06* | 111,2            | 3,35±0,03  | 106,3 | 3,52±0,07*         | 112,0 | 3,65±0,14* | 134,9            | 3,83±0,12* | 141,3 |
| № 7 Сп               | 1,21±0,08*         | 140,0 | 1,48±0,05* | 172,2            | 1,08±0,03* | 130,4 | 1,17±0,05*         | 141,6 | 1,11±0,07* | 180,6            | 1,28±0,02* | 209,7 |
| № 7 Аэ               | 3,54±0,06          | 104,7 | 3,57±0,08  | 105,7            | 3,35±0,03  | 106,3 | 3,40±0,11          | 108,0 | 3,65±0,14* | 134,9            | 3,68±0,11* | 135,8 |
| № 7 Сэ               | 1,21±0,08*         | 140,0 | 1,25±0,09* | 145,0            | 1,08±0,03* | 130,4 | 1,09±0,05*         | 132,6 | 1,11±0,07* | 180,6            | 1,16±0,07* | 189,5 |
| № 7 Ак               | 3,54±0,06          | 104,7 | 3,59±0,07  | 106,5            | 3,35±0,03  | 106,3 | 3,42±0,12          | 108,8 | 3,65±0,14* | 134,9            | 3,70±0,14* | 136,7 |
| № 7 Ск               | 1,21±0,08*         | 140,0 | 1,22±0,07* | 142,0            | 1,08±0,03* | 130,4 | 1,12±0,14*         | 135,6 | 1,11±0,07* | 180,6            | 1,14±0,08* | 185,5 |
| № 8 Ап               | 0,99±0,04*         | 29,3  | 1,24±0,05* | 36,9             | 0,83±0,03* | 26,3  | 1,15±0,07*         | 36,5  | 0,60±0,03* | 22,1             | 0,86±0,02* | 31,9  |
| № 8 Сп               | 0,46±0,02*         | 53,3  | 0,75±0,03  | 87,6             | 0,35±0,03* | 42,0  | 0,63±0,02*         | 76,8  | 0,31±0,02* | 51,1             | 0,54±0,05  | 88,7  |
| № 8 Аэ               | 0,99±0,04*         | 29,3  | 1,15±0,05* | 34,1             | 0,83±0,03* | 26,3  | 0,96±0,09*         | 30,5  | 0,60±0,03* | 22,1             | 0,70±0,03* | 26,0  |
| № 8 Сэ               | 0,46±0,02*         | 53,3  | 0,69±0,01* | 80,5             | 0,35±0,03* | 42,0  | 0,52±0,04*         | 63,4  | 0,31±0,02* | 51,1             | 0,43±0,04* | 70,7  |
| № 8 Ак               | 0,99±0,04*         | 29,3  | 1,16±0,05* | 34,4             | 0,83±0,03* | 26,3  | 0,92±0,04*         | 29,4  | 0,60±0,03* | 22,1             | 0,68±0,01* | 25,1  |
| № 8 Ск               | 0,46±0,02*         | 53,3  | 0,62±0,04* | 72,5             | 0,35±0,03* | 42,0  | 0,5±0,03*          | 60,3  | 0,31±0,02* | 51,1             | 0,41±0,02* | 66,5  |
| № 1 А                | 3,38±0,08          |       |            | 3,15±0,05        |            |       | 2,71±0,04          |       |            |                  |            |       |
| № 1 С                | 0,86±0,06          |       |            | 0,83±0,02        |            |       | 0,61±0,03          |       |            |                  |            |       |

\* *Примечание.* Здесь и в таблице 2, Э – посадки эспарцета песчаного, к – посадки китайбелли виноградолистной, п – поликомпонентная злаковая смесь (эспарцет песчаный, козлец безостый, райграс однолетний, пырей ползучий). М – среднее значение признака, % – ошибка среднего, % – процент превышения значений по отношению к аналогичным почвенным горизонтам участка № 1, \* – различия статистически достоверны при  $p < 0,05$

Таблица 2

Содержание гумуса (%) в почвах экосистем породных отвалов

| Участок, горизонт | Весна              |      |                  | Лето               |            |                  | Осень              |      |                  |      |            |       |
|-------------------|--------------------|------|------------------|--------------------|------------|------------------|--------------------|------|------------------|------|------------|-------|
|                   | Нерекультивируемые |      | Рекультивируемые | Нерекультивируемые |            | Рекультивируемые | Нерекультивируемые |      | Рекультивируемые |      |            |       |
|                   | M ± m              | %    | M ± m            | %                  | M ± m      | %                | M ± m              | %    | M ± m            | %    |            |       |
| № 3 Ап            | 0,45±0,05*         | 14,4 | 0,67±0,03*       | 19,7               | 0,42±0,05* | 13,3             | 0,84±0,05*         | 26,7 | 0,31±0,04*       | 11,4 | 0,97±0,04* | 35,8  |
| № 3 Сп            | 0,34±0,02*         | 39,4 | 0,6±0,02*        | 70,0               | 0,31±0,02* | 37,0             | 0,71±0,04*         | 86,0 | 0,26±0,02*       | 42,5 | 0,86±0,03* | 140,5 |
| № 3 Аэ            | 0,45±0,05*         | 14,4 | 0,53±0,03*       | 15,6               | 0,42±0,05* | 13,3             | 0,62±0,03*         | 19,9 | 0,31±0,04*       | 11,4 | 0,72±0,04* | 26,4  |
| № 3 Сэ            | 0,34±0,02*         | 39,4 | 0,41±0,02*       | 47,7               | 0,31±0,02* | 37,0             | 0,47±0,07*         | 57,2 | 0,26±0,02*       | 42,5 | 0,54±0,02  | 88,7  |
| № 3 Ак            | 0,45±0,05*         | 14,4 | 0,51±0,01*       | 15,2               | 0,42±0,05* | 13,3             | 0,55±0,02*         | 17,5 | 0,31±0,04*       | 11,4 | 0,69±0,04* | 25,5  |
| № 3 Ск            | 0,34±0,02*         | 39,4 | 0,40±0,01*       | 46,8               | 0,31±0,02* | 37,0             | 0,45±0,06*         | 54,2 | 0,26±0,02*       | 42,5 | 0,52±0,04  | 84,7  |
| № 4 Ап            | 0,37±0,04*         | 10,8 | 0,73±0,02*       | 21,7               | 0,33±0,04* | 10,6             | 0,82±0,05*         | 26,1 | 0,27±0,03*       | 10,0 | 1,01±0,07* | 37,4  |
| № 4 Сп            | 0,22±0,02*         | 26,0 | 0,53±0,01*       | 61,7               | 0,21±0,01* | 25,4             | 0,65±0,03*         | 78,8 | 0,17±0,01*       | 27,1 | 0,77±0,05* | 125,5 |
| № 4 Аэ            | 0,37±0,04*         | 10,8 | 0,61±0,06*       | 18,0               | 0,33±0,04* | 10,6             | 0,66±0,01*         | 21,1 | 0,27±0,03*       | 10,0 | 0,81±0,04* | 30,1  |
| № 4 Сэ            | 0,22±0,02*         | 26,0 | 0,44±0,03*       | 51,4               | 0,21±0,01* | 25,4             | 0,47±0,03*         | 57,2 | 0,17±0,01*       | 27,1 | 0,54±0,02  | 88,7  |
| № 4 Ак            | 0,37±0,04*         | 10,8 | 0,58±0,05*       | 17,2               | 0,33±0,04* | 10,6             | 0,64±0,04*         | 20,3 | 0,27±0,03*       | 10,0 | 0,79±0,02* | 29,2  |
| № 4 Ск            | 0,22±0,02*         | 26,0 | 0,42±0,03*       | 48,3               | 0,21±0,01* | 25,4             | 0,45±0,07*         | 54,2 | 0,17±0,01*       | 27,1 | 0,52±0,03  | 84,7  |
| № 5 Ап            | 0,35±0,03*         | 10,4 | 0,94±0,03*       | 27,8               | 0,34±0,01* | 10,8             | 0,85±0,05*         | 27,0 | 0,28±0,01*       | 10,3 | 0,84±0,05* | 31,0  |
| № 5 Сп            | 0,27±0,01*         | 31,4 | 0,65±0,03*       | 75,5               | 0,25±0,01* | 30,1             | 0,53±0,03*         | 64,8 | 0,19±0,01*       | 31,1 | 0,52±0,04  | 84,7  |
| № 5 Аэ            | 0,35±0,03*         | 10,4 | 0,90±0,01*       | 26,5               | 0,34±0,01* | 10,8             | 0,72±0,03*         | 22,8 | 0,28±0,01*       | 10,3 | 0,71±0,05* | 26,0  |
| № 5 Сэ            | 0,27±0,01*         | 31,4 | 0,58±0,04*       | 67,7               | 0,25±0,01* | 30,1             | 0,47±0,05*         | 56,9 | 0,19±0,01*       | 31,1 | 0,42±0,02* | 68,7  |
| № 5 Ак            | 0,35±0,03*         | 10,4 | 0,77±0,03*       | 22,9               | 0,34±0,01* | 10,8             | 0,65±0,02*         | 20,7 | 0,28±0,01*       | 10,3 | 0,62±0,05* | 22,8  |
| № 5 Ск            | 0,27±0,01*         | 31,4 | 0,44±0,05*       | 51,4               | 0,25±0,01* | 30,1             | 0,37±0,01*         | 44,6 | 0,19±0,01*       | 31,1 | 0,35±0,07* | 56,5  |
| № 6 Ап            | 0,41±0,03*         | 12,1 | 0,71±0,02*       | 20,9               | 0,39±0,03* | 12,4             | 0,62±0,07*         | 19,9 | 0,36±0,02*       | 13,3 | 0,63±0,03* | 23,2  |
| № 6 Сп            | 0,29±0,02*         | 33,7 | 0,47±0,05*       | 54,4               | 0,27±0,02* | 32,5             | 0,39±0,02*         | 47,0 | 0,24±0,01*       | 39,3 | 0,41±0,06* | 66,5  |
| № 6 Аэ            | 0,41±0,03*         | 12,1 | 0,68±0,04*       | 20,1               | 0,39±0,03* | 12,4             | 0,57±0,02*         | 18,3 | 0,36±0,02*       | 13,3 | 0,56±0,05* | 20,6  |
| № 6 Сэ            | 0,29±0,02*         | 33,7 | 0,44±0,03*       | 51,4               | 0,27±0,02* | 32,5             | 0,37±0,01*         | 44,6 | 0,24±0,01*       | 39,3 | 0,38±0,04* | 62,5  |
| № 6 Ак            | 0,41±0,03*         | 12,1 | 0,59±0,05*       | 17,6               | 0,39±0,03* | 12,4             | 0,48±0,02*         | 15,3 | 0,36±0,02*       | 13,3 | 0,47±0,02* | 17,3  |
| № 6 Ск            | 0,29±0,02*         | 33,7 | 0,38±0,03*       | 43,8               | 0,27±0,02* | 32,5             | 0,32±0,02*         | 39,2 | 0,24±0,01*       | 39,3 | 0,31±0,01* | 50,4  |
| № 1 А             | 3,38±0,08          |      |                  | 3,15±0,05          |            |                  | 2,71±0,04          |      |                  |      |            |       |
| № 1 С             | 0,86±0,06          |      |                  | 0,83±0,02          |            |                  | 0,61±0,03          |      |                  |      |            |       |

С увеличением длительности исследований нами показано статистически достоверное снижение концентрации гумуса в почвах всех мониторинговых участков по сравнению с весенним периодом, что привело не только к уменьшению абсолютных значений его содержания, но и процентного соотношения относительно контроля (табл. 1, 2). Указанный факт по нашему мнению связан не только с интенсификацией потребления гумуса в процессе вегетативного развития растительности, но и с усилением его минерализации в условиях повышения температуры и снижения влажности почвы. Проведение фиторекультивационных мероприятий позволило выявить несколько тенденций распределения гумуса в почвах мониторинговых участков. Так, если в генетических горизонтах почв урбанизированных экосистем его концентрация несколько снизилась по сравнению с предыдущим периодом исследований, то в почвах экосистем отвалов отмечено усиление процессов гумификации. Полученный факт может быть объяснен большей плотностью растительного покрова на участках №№ 2, 7 и 8 и, следовательно, интенсификацией потребления гумуса в процессе вегетативного развития растительных компонентов. Однако тенденция к усилению накопления органического вещества по сравнению с нерекультивируемыми участками и видоспецифический характер аккумуляции гумуса сохранялись.

Анализ данных таблиц 1 и 2 позволил установить, что в осенний период исследований продолжается зафиксированное ранее снижение концентрации гумуса в гумусо-аккумулятивном горизонте и материнской породе эдафотопов как антропогенно трансформированных экосистем, так и зональной почвы. Свидетельством этого является наличие статистически достоверных различий значений исследуемого показателя по сравнению с весенним и летним периодами исследований. Следовательно, динамика содержания гумуса в почвах мониторинговых участков имеет ниспадающий характер с минимумом в осенний период. Аналогичное уменьшение содержания органического вещества в генетических горизонтах чернозема обыкновенного привело к тому, что его процентное соотношение в техноземах по отношению к зональной почве практически не изменилось, это означает, что в перераспределении баланса гумуса ведущую роль играет не растительность, а климатический фактор. Отмеченная закономерность характерна не только для участков с естественным растительным покровом, но и для насаждений фитомелиорантов. Однако, как и в предыдущие периоды исследований, сохраняется их позитивный эффект по данному показателю. Следует также отметить, что наибольшей активности процессы гумификации достигали в генетических горизонтах участков с высевам видов *Roaseae*.

Установлено, что виды *Kitaibelia vitifolia* и *Onobrychis arenaria* являются успешными фитомелиорантами; не представляется возможным статистически выделить какой из них в большей степени влияет на процесс гумификации.

**Выводы.** Сезонная динамика концентрации органического вещества как в зональной почве, так и в почвах антропогенно трансформированных экосистем, имеет ниспадающий линейный вид. Проведение фиторекультивационных мероприятий в генетических горизонтах техноземов положительно сказывается на распределение гумуса, значения которого возрастают от 17 до 244 % в различных вариантах исследований по сравнению с мониторинговыми участками с естественным растительным покровом. Максимальный позитивный эффект по содержанию органического вещества был зафиксирован при использовании поликомпонентной смеси из видов *Roaseae*.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андроханов В.А. Почвы техногенных ландшафтов: генезис и эволюция / В.А. Андроханов, В.М. Кулипина, В.М. Курачев. – Новосибирск: СО РАН, 2004. – 151 с.

2. Двуреченский В.Г. Особенности содержания гумуса в эмбриоземах техногенных ландшафтов и в зональной почве лесостепной зоны Кузбасса / В.Г. Двуреченский // Сибирский экологический журнал. – 2011. – № 5. – С. 707-712.
3. Александрова А.В. Ключ для определения видов рода *Trichoderma* / А.В. Александрова, Л.Л. Великанов, И.И. Сидорова // Микология и фитопатология. – 2006. – Т. 40, вып. 6. – С. 457-468.
4. Кононова М.М. Органическое вещество и плодородие почвы / М.М. Кононова // Почвоведение. – 1984. – № 8. – С. 6-20.
5. Методические рекомендации по морфологическому описанию почв / сост. А.Г. Дюкарев, Н.Н. Пологова, Л.И. Герасько. – Томск: Изд-во СО РАН, 1999. – 39 с.
6. Розанов Б.Г. Морфология почв / Б.Г. Розанов. – М.: МГУ, 1983. – 320 с.
7. Методы почвенной микробиологии и биохимии / под. ред. Д.Г. Звягинцева. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 304 с.
8. Практикум по агрохимии / Под ред. В.Г. Минеева. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 689 с.
9. Приседський Ю.Г. Статистична обробка результатів біологічних експериментів: навчальний посібник / Ю.Г. Приседський. – Донецьк: Касіопія, 1999. – 210 с.
10. Сыщиков Д.В. Динамика накопления органического вещества в эдафотопях посттехногенных экосистем Донбасса / Д.В. Сыщиков, И.В. Агурова // Материалы 5-й международной научной конференции «Проблемы промышленной ботаники индустриально развитых регионов» (Кемерово, 2-3 окт. 2018 г.). – Кемерово, 2018. – С. 112-114.
11. Сыщиков Д.В. Особенности формирования эдафотопя в условиях отвалов угольных шахт / Д.В. Сыщиков, И.В. Агурова // Промышленная ботаника. – 2019. – № 2, вып. 19. – С. 22 – 29.
12. Сыщиков Д.В. Эффект фиторекультивации на содержание органического вещества в эдафотопях техногенных земель / Д.В. Сыщиков, И.В. Агурова // Материалы II международной научно-практической конференции «Биологическое разнообразие: изучение, сохранение, восстановление, рациональное использование» (Керчь, 27-30 мая 2020 г.). – Керчь, 2020. – С. 226-230.

*Поступила в редакцию 20.05.2022 г.*

# ORGANIC MATTER CONTENT IN EDAPHOTOPES OF ANTHROPOGENICALLY TRANSFORMED ECOSYSTEMS AS ONE OF INDICATORS OF THEIR SUCCESSFUL SELF-RENEWAL

*D.V. Syshchykov, I.V. Agurova*

As a result of the studies, a falling linear type of seasonal dynamics of organic matter content was established both in zonal soil and in soils of anthropogenically transformed ecosystems. Phytorecultivation measures had a positive effect on the humus distribution in the genetic horizons of technozems, which is expressed in an increase in its values from 17 to 244% in various study options compared to monitoring areas with natural vegetation cover. The maximum positive effect on the change in organic matter content was recorded using a polycomponent mixture of plants of the Poaceae family.

**Ключевые слова:** technogenic ecotope; organic matter; technosem; edaphotope; monitoring site; urbanized ecosystems; coal mine dumps.

**Сыщиков Дмитрий Валерьевич**

кандидат биологических наук, заведующий  
отделом фитоэкологии ГУ «Донецкий  
ботанический сад», г. Донецк, ДНР.  
E-mail: 2007dmitry@rambler.ru

**Агурова Ирина Владимировна**

кандидат биологических наук, заведующий  
лабораторией почвенно-экологических  
исследований ГУ «Донецкий ботанический сад»,  
г. Донецк, ДНР,  
E-mail: ir.agur@mail.ru

**Syshchykov Dmitry Valerievich**

candidate of biological sciences, head of department  
of phytocology, PI «Donetsk botanical garden»,  
Donetsk, DPR,  
E-mail: 2007dmitry@rambler.ru

**Agurova Irina Vladimirovna**

candidate of biological sciences, head of laboratory  
of soil-ecological research PI «Donetsk botanical  
garden», Donetsk, DPR,  
E-mail: ir.agur@mail.ru

*Научное издание*

**Вестник Донецкого национального университета.  
Серия А: Естественные науки**

**2022. – № 1**

Технический редактор: *М.В. Фоменко*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

---

Адрес редакции:  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
ул. Университетская, 24,  
83001, г. Донецк, ДНР.  
Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92  
E-mail: [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru)  
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>

---