

ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ

*Основан
в 1997 году*

Серия А
**Естественные
науки**

2 / 2022

**Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального
университета. Серия А: Естественные науки»**

Главный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**.

Зам. главного редактора — д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**.

Ответственный секретарь — канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**.

Члены редколлегии: д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; канд. хим. наук, доц. **А.В. Белый**; доктор философии, профессор **С.В. Белый** (Тройский университет, США); д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**; д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**; д-р биол. наук, проф. **В.И. Соболев** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University.
Series A: Natural Sciences”**

The Editor-in-Chief — Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**.

The Deputy of the Editor-in-Chief — Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**.

Executive Secretary — Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**.

The Members of the Editorial Board: Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Cand. of chem., docent. **A.V. Belyj**; Dr of Philosophy, prof. **S.V. Belyi** (Troy University, USA); Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., docent **A.V. Zyza**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**; Dr. of biol., prof. **V.I. Sobolev** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**.

Адрес редакции: ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, 83001

Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92

E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 — Математика; 01.02.00 — Механика; 01.04.00 — Физика; 02.00.00 — Химические науки; 03.02.00 — Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».
Протокол № 7 от 07.10.2022 г.*

© ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2022

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 2

Донецк 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

<i>Будыка В. С., Азибалова А. В. О самосопряженности матричного оператора Дирака с точечными взаимодействиями</i>	<i>3</i>
<i>Волчков В. В., Волчков Вит. В. Задача интерполяции с узлами на прямой для функций с нулевыми шаровыми средними</i>	<i>8</i>
<i>Волčkова Н. П., Волчков Вит. В. Гармонический анализ векторных полей на плоскости Лобачевского</i>	<i>20</i>
<i>Глушанков Е. С. Приближенный метод решения одной задачи Робена с разрывными граничными условиями</i>	<i>31</i>
<i>Заставный В. П. Неравенства для положительно определенных матричнозначных и операторнозначных ядер</i>	<i>39</i>
<i>Иванов А. Ю., Мельник А.-В. В. Особенности построения магических квадратов при помощи латинских квадратов</i>	<i>52</i>
<i>Лиманский Д. В. Об априорных оценках для тензорного произведения двух обыкновенных дифференциальных полиномов с единственным кратным вещественным нулем</i>	<i>64</i>
<i>Манов А. Д. Об одной задаче для положительно определённых функций с компактным носителем</i>	<i>73</i>
<i>Машаров П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга</i>	<i>77</i>

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

Series A. Natural Sciences

№ 2

Donetsk 2022

CONTENTS

Mathematics

<i>Budyka V. S., Agibalova A. V.</i> On the self-adjointness of the Dirac matrix operator with point interactions	3
<i>Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.</i> Interpolation problem with nodes on the line for functions with zero ball means	8
<i>Volchkova N. P., Volchkov Vit. V.</i> Harmonic analysis of vector fields on the Lobachevskii plane	20
<i>Glushankov E. S.</i> An approximate method for solving one Robin problem with discontinuous boundary conditions	31
<i>Zastavnyi V. P.</i> Inequalities for positive definite matrix-valued and operator-valued kernels	39
<i>Ivanov A. Yu., Melnik A.-V. V.</i> Features of constructing magic squares using Latin squares	52
<i>Limanskii D. V.</i> On a priori estimates for a tensor product of two ordinary differential polynomials with a unique multiple real zero	64
<i>Manov A. D.</i> On a problem for positive definite functions with compact support	73
<i>Masharov P. A.</i> The Pompeii radius for a family of a sector and a semicircle	77

УДК 517.984.46

О САМОСОПРЯЖЕННОСТИ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

© 2022. В. С. Будыка, А. В. Агибалова

В работе рассматриваются два семейства матричных операторов Дирака с точечными взаимодействиями. Получены описания областей определения операторов сопряженных к ним, а также условия их самосопряженности.

Ключевые слова: оператор Дирака, точечные взаимодействия, область определения, самосопряженность.

Введение. Рассмотрим дифференциальное выражение Дирака

$$D = -i c \frac{d}{dx} \otimes \sigma_1 + \frac{c^2}{2} \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} c^2/2 & -i c \frac{d}{dx} \\ -i c \frac{d}{dx} & -c^2/2 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad (1)$$

действующее на $\mathbb{C}^{2p}$ -мерные функции действительной переменной. Здесь

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad (2)$$

являются матрицами Паули в $\mathbb{C}^{2p}$ и $c > 0$ обозначает скорость света. Пусть $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{I} = (0, b)$, $b := \sup X \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \infty$ строго возрастающая последовательность с $x_0 := 0$, $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow b$. Пусть $d_n := x_n - x_{n-1} > 0$. Предположим также, что

$$\alpha := \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \quad \alpha_n = \alpha_n^* \in \mathbb{C}^{p \times p}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Следуя [5] (см. также [7]), определим два семейства Гестези-Шеба операторов на интервале $(0, b)$, как замыкание операторов

$$\begin{aligned} D_{X,\alpha}^0 &= D \upharpoonright \text{dom}(D_{X,\alpha}^0), \\ \text{dom}(D_{X,\alpha}^0) &= \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : f_I \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I}), f_{II} \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X); \right. \\ &\quad \left. f_{II}(0+) = 0, \quad f_{II}(x_n+) - f_{II}(x_n-) = -\frac{i\alpha_n}{c} f_I(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

и

$$\begin{aligned} D_{X,\beta}^0 &= D \upharpoonright \text{dom}(D_{X,\beta}^0), \\ \text{dom}(D_{X,\beta}^0) &= \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : f_I \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X), f_{II} \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I}); \right. \\ &\quad \left. f_{II}(a+) = 0, \quad f_I(x_n+) - f_I(x_n-) = i\beta_n c f_{II}(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

соответственно, т.е. $D_{X,\alpha} = \overline{D_{X,\alpha}^0}$ и $D_{X,\beta} = \overline{D_{X,\beta}^0}$. Легко видеть, что операторы $D_{X,\alpha}$ и $D_{X,\beta}$ симметричны, но не обязательно самосопряженные.

Положим $f = \{f_1, f_2, \dots, f_{2p}\}^\top \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})$ и

$$f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix}, \text{ где } f_I := \{f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p\}^\top, \quad f_{II} := \{f_{p+1} \ f_{p+2} \ \dots \ f_{2p}\}^\top.$$

Здесь $\top$ означает операцию транспонирования.

Операторы (4) и (5) называют операторами Дирака с точечными взаимодействиями или GS–реализациями. Они введены в работе Гестези и Шеба [5] для случая $p = 1$ и $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ (см. также [7]) и исследованы там в периодическом случае $X = \mathbb{Z}$. Спектральная теория таких операторов в случае $p = 1$ и произвольного X ($d_*(X) \geq 0$) была построена в [4]. Результаты из [4] распространены на многомерный случай в работах [10], [9], [11]. Отметим в этой связи недавние работы [1], [2], а также монографию [6], посвященные спектральной теории одномерных и многомерных операторов Дирака.

Задача вычисления индексов дефекта дифференциальных операторов является первой главной проблемой, естественным образом возникающей в спектральной теории. В работах [4], [9], [11], [3] исследование самосопряженности операторов Дирака с точечными взаимодействиями существенно опирается на свойства якобиевых матриц, ассоциированных с ними. Одним из самых известных условий самосопряженности является тест Карлемана (см., например, [8, Теорема VII.2.9]).

В настоящей работе классический подход к исследованию самосопряженности из [4] распространяются на случай матричных операторов Дирака $D_{X,\alpha}$ и $D_{X,\beta}$ с точечными взаимодействиями. Именно, находим описание областей определения операторов сопряженных к ним и получаем условие их самосопряженности.

Обозначения. $\mathcal{H}$ обозначает сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $\mathbb{O}_p = \mathbb{O}_{\mathbb{C}^p}$ и $\mathbb{I}_p = \mathbb{I}_{\mathbb{C}^p}$ обозначают нулевой и единичный операторы в $\mathbb{C}^p$, соответственно. В дальнейшем, $\text{dom}(T)$ обозначает область определения оператора T . Пусть $I \subset \mathbb{Z}$. $L^2(I; \mathcal{H}) := L^2(I) \otimes \mathcal{H}$ обозначает L^2 -пространство $\mathcal{H}$ -значных функций.

Пусть X — дискретное подмножество $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Введем пространства Соболева

$$W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) := \{f \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p}) : f \in AC_{loc}(\mathcal{I} \setminus X), f' \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})\},$$

$$W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) := \{f \in W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : \text{supp } f \text{ компактен в } \mathcal{I}\}.$$

Самосопряженность. В работах [9], [11], [3] при помощи теста Карлемана доказано, что на $\mathcal{I} = \mathbb{R}_\pm$ или $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ операторы $D_{X,\alpha}$ и $D_{X,\beta}$ всегда самосопряженные. Далее, докажем данный факт, используя классический подход.

Теорема 1. Пусть $D_{X,\alpha}$ и $D_{X,\beta}$ – реализации оператора Дирака в $L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})$. Тогда:

(i) Оператор $D_{X,\alpha}^* := (D_{X,\alpha})^*$ сопряженный к симметрическому оператору $D_{X,\alpha}$ имеет вид

$$D_{X,\alpha}^* = D \upharpoonright \text{dom}(D_{X,\alpha}^*), \tag{6}$$

$$\text{dom}(D_{X,\alpha}^*) = \left\{ f \in W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : f_I \in AC_{loc}(\mathcal{I}), f_{II} \in AC_{loc}(\mathcal{I} \setminus X); \right.$$

$$\left. f_{II}(a+) = 0, \ f_{II}(x_n+) - f_{II}(x_n-) = -\frac{i\alpha_n}{c} f_I(x_n), \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Аналогично, оператор $D_{X,\beta}^*$ сопряженный к $D_{X,\beta}$ задается выражением (5) с $W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p})$ вместо $W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p})$.

(ii) Если $|\mathcal{I}| = \infty$ (т.е. $\mathcal{I} = \mathbb{R}_\pm$ или $\mathcal{I} = \mathbb{R}$), тогда оба $D_{X,\alpha}$ и $D_{X,\beta}$ самосопряженные, т.е.

$$D_{X,\alpha}^* = D_{X,\alpha} \quad \text{и} \quad D_{X,\beta}^* = D_{X,\beta}. \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть (6) как $W_{\alpha}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p})$, где производные понимаются в смысле распределений. Пусть $f \in \text{dom}(D_{X,\alpha}^*)$ и φ – гладкие функции с компактным носителем. Поэтому $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}$. Поэтому интегрируя по частям, получаем

$$(D_{X,\alpha}^* f, \varphi) = (f, D_{X,\alpha} \varphi), \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_I \\ \varphi_{II} \end{pmatrix} \in \text{dom}(D_{X,\alpha}) \cap \left(W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) \right). \quad (8)$$

Так как $D_{X,\alpha}$ – замыкание $D_{X,\alpha}^0$ с $\text{dom}(D_{X,\alpha}^0) = W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p})$, доказано включение $W_{\alpha}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) \subset \text{dom}(D_{X,\alpha}^*)$.

Докажем обратное включение. Так как $D_X \subset D_{X,\alpha}$ и D_X симметричен, то

$$\text{dom}(D_{X,\alpha}^*) \subset \text{dom}(D_X^*) \subset W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W^{1,2}([x_{n-1}, x_n]; \mathbb{C}^{2p}). \quad (9)$$

Пусть $f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix} \in \text{dom}(D_{X,\alpha}^*)$. Тогда, по определению, (8) выполняется. Согласно (9), в (8) можем применить интегрирование по частям на любом интервале $[x_{n-1}, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Подставляя в (8) вектор-функции φ , порожденные в малой окрестности $(x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon)$, точки x_j и интегрируя по частям, получаем

$$\langle f_{II}(x_j+) - f_{II}(x_j-) + i\alpha_j c^{-1} f_I(x_j+), \varphi_I(x_j) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(x_j+) - f_I(x_j-), \varphi_{II}(x_j-) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} = 0.$$

Так как $\varphi_I(x_j)$ и $\varphi_{II}(x_j-)$ произвольные, последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $f_I(x_j+) = f_I(x_j-)$ и $f_{II}(x_j+) - f_{II}(x_j-) = -i\alpha_j c^{-1} f_I(x_j)$. Так как $j \in \mathbb{N}$ произвольный, f удовлетворяет граничным условиям из (6) и $\text{dom}(D_{X,\alpha}^*) \subset W_{\alpha}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p})$. Объединяя оба включения, приходим к (6).

(ii) Для определенности предположим, что $\mathcal{I} = \mathbb{R}$. Достаточно показать, что $D_{X,\alpha}^*$ симметричен. Пусть $f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_I \\ g_{II} \end{pmatrix} \in \text{dom}(D_{X,\alpha}^*)$.

Выбирая $a, b \in \mathbb{R} \setminus X$, $a < b$ такие, что $x_{r-1} < a < x_r < x_{r+1} < \dots < x_q < b < x_{q+1}$ и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_a^b \langle D_{X,\alpha}^* f(x), g(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} dx - \int_a^b \langle f(x), D_{X,\alpha} g(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} dx \\ &= -i c \int_a^b [\langle f'_{II}(x), g_I(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f'_I(x), g_{II}(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] dx \\ &- i c \int_a^b [\langle f_I(x), g'_{II}(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_{II}(x), g'_I(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] dx \\ &= -i c [\langle f_{II}(x), g_I(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(x), g_{II}(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] \Big|_a^{x_p-} \\ &- i c [\langle f_{II}(x), g_I(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(x), g_{II}(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] \Big|_{x_q+}^b \\ &- i c \sum_{k=p+1}^q [\langle f_{II}(x), g_I(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(x), g_{II}(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] \Big|_{x_{k-1}+}^{x_k-} \\ &= i c [\langle f_{II}(a), g_I(a) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(a), g_{II}(a) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] - i c [\langle f_{II}(b), g_I(b) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(b), g_{II}(b) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] \\ &+ i c \sum_{k=p}^q \langle f_{II}(x_k+) - f_{II}(x_k-), g_I(x_k) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + i c \sum_{k=p}^q \langle f_I(x_k), g_{II}(x_k+) - g_{II}(x_k-) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} \\ &= i c [\langle f_{II}(a), g_I(a) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(a), g_{II}(a) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] - i c [\langle f_{II}(b), g_I(b) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(b), g_{II}(b) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $f_j, g_j \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p)$, $j \in \{I, II\}$, существуют (не единственные) последовательности $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{C}^{p \times p}$ такие, что $a_n \rightarrow -\infty$, $b_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \|f_I(a_n)\|_{\mathbb{C}^p} + \|f_{II}(a_n)\|_{\mathbb{C}^p} + \|g_I(a_n)\|_{\mathbb{C}^p} + \|g_{II}(a_n)\|_{\mathbb{C}^p} \} = 0, \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \|f_I(b_n)\|_{\mathbb{C}^p} + \|f_{II}(b_n)\|_{\mathbb{C}^p} + \|g_I(b_n)\|_{\mathbb{C}^p} + \|g_{II}(b_n)\|_{\mathbb{C}^p} \} = 0. \quad (12)$$

Без ограничения общности, можно предположить, что $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R} \setminus X$, так как (11) и (12) верны с $\{a_n \pm \varepsilon_n\}$ и $\{b_n \pm \varepsilon_n\}$ вместо $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, соответственно, при условии, что ε_n , $n \in \mathbb{N}$ достаточно малы.

В соответствии с (10)

$$\begin{aligned} & \int_{a_n}^{b_n} \langle D_{X,\alpha}^* f(x), g(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} dx - \int_{a_n}^{b_n} \langle f(x), D_{X,\alpha}^* g(x) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} dx \\ &= i c [\langle f_{II}(a_n), g_I(a_n) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(a_n), g_{II}(a_n) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}] \\ & - i c [\langle f_{II}(b_n), g_I(b_n) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}} + \langle f_I(b_n), g_{II}(b_n) \rangle_{\mathbb{C}^{2p}}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, с учетом соотношений (11), (12), приходим к равенству

$$(D_{X,\alpha}^* f, g) = (f, D_{X,\alpha}^* g), \quad f, g \in \text{dom}(D_{X,\alpha}^*). \quad (14)$$

Таким образом, $D_{X,\alpha}^*$ симметричен, $D_{X,\alpha}^* \subseteq D_{X,\alpha}^{**} = D_{X,\alpha}$. Так как $D_{X,\alpha}$ также симметричен, то $D_{X,\alpha} = D_{X,\alpha}^*$.

Случай реализаций $D_{X,\beta}$ рассматривается во многом таким же образом. $\square$

Замечание 1. Доказательство данного результата можно распространить и на другие реализации, а также на операторы Дирака с точечными взаимодействиями и неограниченной потенциальной матрицей из $L_{\text{loc}}^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p \times 2p})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Behrndt J. On the spectral properties of Dirac operators with electrostatic δ -shell interactions / J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmann, V. Lotoreichik // J. Math. Pures. – 2018. – V. 111. – P. 47–78.
2. Behrndt J. On Dirac operators in $\mathbb{R}^3$ with electrostatic and Lorentz scalar δ -shell interactions / J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmann, V. Lotoreichik // Quantum Stud.: Math. Found. – 2019. – P. 1–20.
3. Budyka V. S. Deficiency indices and discreteness property of block Jacobi matrices and Dirac operators with point interaction / V. S. Budyka, M. M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. – 2022. – V. 506 (1). – paper no. 125582.
4. Carlone R. On the spectral theory of Gesztesy-Seba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on discrete set / R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano // J. Differential Equations. – 2013. – V. 254. – P. 3835–3902.
5. Gesztesy F. New analytically solvable models of relativistic point interactions / F. Gesztesy, P. Šeba // Lett. Math. Phys. – 1987. – V. 13. – P. 345–358.
6. Thaller B., The Dirac Equation / B. Thaller – Berlin: Texts and Monographs in Physics, Springer, 1992. – 357 p.
7. Альбеверио С., Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден – Москва: МИР, 1991. – 568 с.
8. Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский – К.: Наукова думка, 1968. – 798 с.
9. Будыка В. С. К спектральной теории одномерных матричных операторов Дирака с точечными матричными взаимодействиями / В. С. Будыка, М. М. Маламуд, А. Посиликано // ДАН. – 2018. – Т. 479, № 2. – С. 117–125.
10. Будыка В. С. Об операторах Дирака с δ' -взаимодействиями / В. С. Будыка // Вестник ДонНУ. Серия А. Естественные науки. – 2019. – № 2. – С. 8–13.

11. Будыка В. С. Об индексах дефекта блочно-якобиевых матриц, связанных с операторами Дирака с точечными взаимодействиями / В. С. Будыка, М. М. Маламуд // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 6. – С. 675–679.

Поступила в редакцию 15.07.2022 г.

ON THE SELF-ADJOINTNESS OF THE DIRAC MATRIX OPERATOR WITH POINT INTERACTIONS

V. S. Budyka, A. V. Agibalova

In this paper, we consider two families of Dirac matrix operators with point interactions. Descriptions of domains of operators adjoint to them are obtained, as well as conditions for their self-adjointness.

Keywords: Dirac operator, point interactions, domain, self-adjointness.

Будыка Виктория Сергеевна

кандидат физико-математических наук
ГОУ ВПО «Донецкая академия управления и государственной службы при Главе Донецкой Народной Республики», г. Донецк, ДНР
budyka.vik@gmail.com
83001, ул. Челюскинцев, 157

Budyka Viktoriya Sergeevna

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk Academy of Management and Public Administration, Donetsk

Агибалова Анна Владимировна

кандидат физико-математических наук
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
g.agibalova@donnu.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Agibalova Anna Vladimirovna

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.444

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ С УЗЛАМИ НА ПРЯМОЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ

© 2022. *В. В. Волчков, Вит. В. Волчков*

Пусть $n \geq 2$, $V_r(\mathbb{R}^n)$ – множество функций $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем шарам из $\mathbb{R}^n$ радиуса r . В работе найдены новые достаточные условия разрешимости интерполяционной задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ с бесконечным числом узлов.

Ключевые слова: интерполяционные задачи, нулевые сферические средние, функции Бесселя.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$. Предположим, что $n \geq 2$, $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и выполнено равенство

$$\int_{|x| \leq r} f(x+y) dx = 0 \quad (1)$$

при некотором фиксированном $r > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$. Верно ли, что $f = 0$? Этот вопрос был рассмотрен в 1929 году известным румынским математиком Д. Помпейю, который утверждал, что при $n = 2$ ответ является положительным [1]. Однако, спустя пятнадцать лет Л. Чакалов обнаружил (см. [2]), что доказательство Д. Помпейю содержит ошибку. Более того, он показал, что функция $f(x_1, x_2) = \sin(\lambda x_1)$ имеет нулевые интегралы по всем единичным кругам в $\mathbb{R}^2$, если число λ является нулём функции Бесселя J_1 . Впоследствии выяснилось, что аналогичные примеры ненулевых функций с условием (1) были известны ещё в 1917 году [3]. Общий метод построения ненулевых функций с указанным свойством основан на теореме о среднем для собственных функций оператора Лапласа. Отметим, что его можно обобщить на произвольное двухточечно-однородное пространство X (см. [4, часть 2, п. 2.4]). Кроме того, он позволяет строить ненулевые функции на X , имеющие нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса.

Обозначим через $V_r(\mathbb{R}^n)$ множество функций $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Данный класс функций, а также различные его аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К.А. Беренштейна и других авторов (см. обзоры [5]– [7] и монографии [4], [8], [9], содержащие обширную библиографию). Перечислим основные направления в этих исследованиях.

1. Изучение нулевых множеств и соответствующие теоремы единственности для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ [4], [8] – [11]. Данное направление восходит к теореме единственности Ф. Йона [10, гл. 6] для функций с нулевыми сферическими средними.

2. Исследование допустимых ограничений на рост ненулевых функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ и его аналогов на неограниченных областях (теоремы типа Лиувилля [4], [8] – [13]).

3. Изучение функций с условиями типа (1), в которых r принадлежит заданному двухэлементному множеству [4] – [9], [11], [14], [15] (теоремы о двух радиусах). Первым результатом в этом направлении является классическая теорема Д. Дельсарта [16], [17] о характеристизации гармонических функций посредством уравнения средних значений, выполненного только для двух радиусов.

4. Описание функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ в виде рядов по сферическим гармоникам [4], [8], [9], [18] (аналоги разложений Тейлора и Лорана из теории аналитических функций).
5. Проблема продолжения [4], [8], [9].
6. Теоремы о стирании особенностей [4], [8], [9], [18], [19].
7. Задачи интегральной геометрии о восстановлении функций из заданных классов по известным шаровым средним [4], [9], [20] – [23].
8. Аппроксимация функций с нулевыми шаровыми средними линейными комбинациями специальных функций [4], [8], [9].
9. Интерполяционные задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ [24].
10. Изучение аналогов и обобщений класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ на различных однородных пространствах и группах (например, на римановых симметрических пространствах) [4] – [9], [13] – [15], [21] – [23].

В частности, важным направлением в рассматриваемой тематике является изучение интерполяционных задач для функций с нулевыми шаровыми средними. В данной работе найдены новые достаточные условия разрешимости интерполяционной задачи для класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ с бесконечным числом узлов.

2. Формулировка основного результата. Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — множество n -мерных мультииндексов, то есть векторов $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, у которых $\eta_j \in \mathbb{Z}_+$ при любом $j \in \{1, \dots, n\}$. Для мультииндекса $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим через

$$\partial^\eta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\eta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\eta_n}$$

оператор частного дифференцирования соответствующего порядка.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность точек, лежащих на некоторой прямой L в $\mathbb{R}^n$, таких что

$$\inf_{i \neq j} |a_i - a_j| > 0 \quad (2)$$

и

$$|a_k| \leq |a_{k+1}| \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть $r > 0$ и $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$|b_k| \leq (k+1)^\alpha \quad (4)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и некоторого $\alpha \geq 0$, не зависящего от k . Тогда существует функция $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, такая что

$$f(a_k) = b_k \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N} \quad (5)$$

и

$$|\partial^\eta f(x)| = O((1 + |x|)^\beta), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

для всех $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$ и некоторого $\beta \geq 0$, не зависящего от x и η .

Сделаем несколько замечаний.

Поскольку, согласно (4), последовательность $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ может иметь степенной рост, из (5) следует, что в общем случае оценка роста интерполирующей функции в теореме 1 не может быть существенно усилена. Интересной нерешенной задачей является нахождение

точной нижней грани возможных значений β в оценке (6). Нетрудно видеть, что функция с условиями (5) и (6) в теореме не единственна. Для этого достаточно применить теорему 1 к расширенной системе узлов $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{a\}$, добавив к условию (5) равенство $f(a) = b$, где $b \in \mathbb{C}$ выбирается произвольно.

Очевидным необходимым условием для того, чтобы интерполяционная задача (5) имела решение $f \in C(\mathbb{R}^n)$ для любой ограниченной последовательности $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, является условием

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = +\infty. \quad (7)$$

Одного этого условия, однако, недостаточно для справедливости теоремы 1. Действительно, полагая $b_k = (-1)^k$ и применяя к f , удовлетворяющей (5) и (6) теорему Лагранжа о среднем на отрезке с концами a_k, a_{k+1} , получаем, что условие отделимости узлов (2) в теореме 1 убрать нельзя (даже при выполнении (7)).

Отметим, наконец, что существуют функции класса $V_r(\mathbb{R}^n)$, имеющие сколь угодно быстрый рост на заданном луче (см. [24, теорема 2]). Поэтому оценка (6) не выполняется без каких-либо дополнительных условий на $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$.

3. Вспомогательные утверждения. Пусть $\nu > -1$. Рассмотрим четную целую функцию

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{2m+\nu}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

где Γ — гамма-функция. Функция I_ν связана с функцией Бесселя J_ν равенством

$$I_\nu(z) = z^{-\nu} J_\nu(z), \quad z \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (9)$$

где, как обычно, $z^{-\nu} = |z|^{-\nu} e^{-i\nu \arg z}$, $-\pi < \arg z \leq \pi$. Согласно [25, гл. 1, § 23], из (9) следует, что функция I_ν имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули вещественные и простые. Из (8) видно, что

$$I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Для $\nu > -1/2$ имеет место интегральное представление Пуассона

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \quad (11)$$

(см. [25, гл. 1, формула (14.6)]). Из равенств (10) и (11) получаем следующую оценку производных функции I_ν :

$$|I_\nu^{(m)}(z)| \leq I_\nu(0), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \nu \geq -\frac{1}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (12)$$

Пусть $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Теорема о шаровых средних для решений уравнения Гельмгольца

$$\Delta f + cf = 0 \quad (13)$$

при $c \in \mathbb{C}$ утверждает (см. [8, часть 1, гл. 7]), что функция $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (13) тогда и только тогда, когда

$$\int_{|y| \leq R} f(x+y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} R^n I_{\frac{n}{2}}(R\sqrt{c}) f(x) \quad (14)$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$. Таким образом, если $r > 0$, $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и равенство (13) выполнено для некоторого $c > 0$, такого что $I_{\frac{n}{2}}(r\sqrt{c}) = 0$, то $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, в силу эллиптичности уравнения (13) функция f является вещественно аналитической в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{C}$ и выполнено (13). Тогда для любой радиальной финитной функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$(f * \varphi)(x) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{c}|y|) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

где знак $*$ обозначает свертку функций в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ω_{n-1} — площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Используя полярные координаты в $\mathbb{R}^n$, для любого $R > 0$ находим

$$\int_{|y| \leq R} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{c}|y|) dy = \omega_{n-1} \int_0^R \rho^{n-1} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{c}\rho) d\rho = \omega_{n-1} R^n I_{\frac{n}{2}}(\sqrt{c}R)$$

(см. [25, гл. 1, формула (6.2)]). Отсюда и из (14) заключаем, что (15) выполнено в случае, когда φ — индикатор шара радиуса R с центром в нуле. Поскольку любую радиальную финитную функцию $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ можно приблизить в пространстве L^1 на носителе последовательностью линейных комбинаций индикаторов таких шаров, получаем (15) в общем случае. $\square$

Пусть $\lambda > 0$. Рассмотрим функцию

$$H_\lambda(x, t) = e^{-itx_1} I_{\frac{n-3}{2}} \left(\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(x_2^2 + \dots + x_n^2)} \right), \quad (16)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\lambda, \lambda).$$

Лемма 2. (i) При любом фиксированном $t \in (-\lambda, \lambda)$ выполнено равенство

$$\Delta H_\lambda + \lambda^2 H_\lambda = 0. \quad (17)$$

(ii) Для любых $\varepsilon \in (0, \lambda)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k H_\lambda(x, t) \right| \leq c(2 + |x|)^k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |t| \leq \lambda - \varepsilon, \quad (18)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от x и t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) получено в [26, доказательство леммы 1]. Докажем утверждение (ii). При $k = 0$ оценка (18) следует из (16) и (12). Пусть $k \geq 1$. Тогда по формуле Лейбница

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k H_\lambda(x, t) = \sum_{j=0}^k C_k^j (-ix_1)^{k-j} e^{-itx_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j I_{\frac{n-3}{2}} \left(\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(x_2 + \dots + x_n^2)}\right).$$

Далее, для любого $j \in \mathbb{N}$ существуют функции $\psi_{m,j} \in C^\infty(-\lambda, \lambda)$, $m = 1, \dots, j$, такие что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j I_{\frac{n-3}{2}} \left(\sqrt{\lambda^2 - t^2} z\right) = \sum_{m=1}^j I_{\frac{n-3}{2}}^{(m)} \left(\sqrt{\lambda^2 - t^2} z\right) z^m \psi_{m,j}(t)$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ (это утверждение легко доказать индукцией по j). Из полученных равенств и оценки (12) следует утверждение (ii). $\square$

Далее, пусть $\{\alpha_q\}_{q=-\infty}^\infty$ и $\{\beta_q\}_{q=-\infty}^\infty$ — строго возрастающая последовательность вещественных чисел и $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Всюду в дальнейшем предполагается, что существуют постоянные $\delta_1, \delta_2 > 0$, $M > 0$, такие что

$$\alpha_{q+1} - \alpha_q \geq \delta_1, \quad \beta_{q+1} - \beta_q \geq \delta_2 \quad (19)$$

и

$$|\alpha_q - \beta_q| \leq M \quad (20)$$

при всех $q \in \mathbb{Z}$. Пусть также

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{|\alpha_q + \alpha_{-q}|}{|\alpha_q \alpha_{-q}|} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{|\beta_q + \beta_{-q}|}{|\beta_q \beta_{-q}|} < +\infty.$$

Из этого условия следует, что функции

$$u(z) = \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_q}\right) \left(1 - \frac{z}{\alpha_{-q}}\right) \quad (21)$$

и

$$v(z) = \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_q}\right) \left(1 - \frac{z}{\beta_{-q}}\right) \quad (22)$$

являются целыми.

Лемма 3. Пусть $\varepsilon \in (0, \delta_2)$, $z \in \mathbb{C}$ и

$$|z - \beta_q| \geq \varepsilon \quad \text{для всех} \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (23)$$

Тогда

$$|u(z)| \leq c_1 |v(z)| (2 + |z|)^{c_2}, \quad (24)$$

где $c_1 > 0$ не зависит от z , а $c_2 = M \left(\frac{2}{\delta_1} + \frac{3}{\delta_2}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символами $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от z . Из условий (19) следует, что

$$|\alpha_q| \geq \delta_1 |q|, \quad |\beta_q| \geq \delta_2 |q| \quad (25)$$

для любого $q \in \mathbb{Z}$. Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$ удовлетворяет (23). Из определения функций u, v имеем

$$\frac{u(z)}{v(z)} = \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_q}\right) \left(1 - \frac{z}{\alpha_{-q}}\right) \left(1 - \frac{z}{\beta_q}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\beta_{-q}}\right)^{-1}.$$

Пусть $\mu = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и

$$N = \left[1 + \frac{2|z|}{\mu}\right] \quad (\text{целая часть}). \quad (26)$$

Тогда

$$\frac{u(z)}{v(z)} = w_1(z)w_2(z), \quad (27)$$

где

$$w_1(z) = \prod_{q=1}^N \left(1 - \frac{\alpha_q - \beta_q}{\alpha_q}\right) \left(1 - \frac{\alpha_q - \beta_{-q}}{\alpha_{-q}}\right) \left(1 + \frac{\alpha_q - \beta_q}{\beta_q - z}\right) \left(1 + \frac{\alpha_{-q} - \beta_{-q}}{\beta_{-q} - z}\right),$$

$$w_2(z) = \prod_{q=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_q}\right) \left(1 - \frac{z}{\alpha_{-q}}\right) \left(1 - \frac{z}{\beta_q}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\beta_{-q}}\right)^{-1}.$$

Из определения w_1 имеем оценку

$$\begin{aligned} \ln |w_1(z)| &\leq \sum_{q=1}^N \left(\ln \left(1 + \frac{|\alpha_q - \beta_q|}{\alpha_q}\right) + \ln \left(1 + \frac{|\alpha_{-q} - \beta_{-q}|}{|\alpha_{-q}|}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(1 + \frac{|\alpha_q - \beta_q|}{|\beta_q - z|}\right) + \ln \left(1 + \frac{|\alpha_{-q} - \beta_{-q}|}{|\beta_{-q} - z|}\right) \right). \end{aligned}$$

Используя неравенство $\ln(1+t) \leq t$ при $t \geq 0$, отсюда и из (20) получаем

$$\ln |w_1(z)| \leq M \sum_{q=1}^N \left(\frac{1}{\alpha_q} + \frac{1}{|\alpha_{-q}|} + \frac{1}{|\beta_q - z|} + \frac{1}{|\beta_{-q} - z|} \right). \quad (28)$$

Принимая во внимание (25) и (26), имеем

$$M \sum_{q=1}^N \left(\frac{1}{\alpha_q} + \frac{1}{|\alpha_{-q}|} \right) \leq \frac{2M}{\delta_1} \sum_{q=1}^N \frac{1}{q} \leq \frac{2M}{\delta_1} \ln(2 + |z|) + \lambda_1. \quad (29)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x = \operatorname{Re} z \leq 0$. Тогда, как и выше,

$$M \sum_{q=1}^N \frac{1}{|\beta_q - z|} \leq M \sum_{q=1}^N \frac{1}{\beta_q} \leq \frac{M}{\delta_2} \sum_{q=1}^N \frac{1}{q} \leq \frac{M}{\delta_2} \ln(2 + |z|) + \lambda_2. \quad (30)$$

Аналогично, используя (19) и (23), получаем

$$M \sum_{q=1}^N \frac{1}{|\beta_{-q} - z|} \leq \lambda_3 + M \sum_{q \in E_1} \frac{1}{|\beta_{-q} - x|} + M \sum_{q \in E_2} \frac{1}{|\beta_{-q} - x|},$$

где $E_1 = \{q \leq N : \beta_{-q} \leq x - \delta_2\}$, $E_2 = \{q \leq N : \beta_{-q} \geq x + \delta_2\}$. С учетом (25) это дает оценку

$$M \sum_{q=1}^N \frac{1}{|\beta_{-q} - z|} \leq \lambda_4 + \frac{2M}{\delta_2} \ln(2 + |z|). \quad (31)$$

Используя неравенства (28)–(31), приходим к оценке

$$\ln |w_1(z)| \leq M \left(\frac{2}{\delta_1} + \frac{3}{\delta_2} \right) \ln(2 + |z|) + \lambda_5. \quad (32)$$

Проводя в случае $x > 0$ аналогичные рассуждения, получим (32) при любом $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющем (23).

Пусть теперь $q \geq N + 1$. Тогда из (26) следует, что числа

$$\left| 1 - \frac{z}{\alpha_q} \right|, \quad \left| 1 - \frac{z}{\alpha_{-q}} \right|, \quad \left| 1 - \frac{z}{\beta_q} \right|, \quad \left| 1 - \frac{z}{\beta_{-q}} \right|$$

лежат на интервале $(1/2, 3/2)$. Применяя теорему Лагранжа о среднем к функции $\ln t$ на отрезках с концами $\left| 1 - \frac{z}{\alpha_q} \right|, \left| 1 - \frac{z}{\beta_q} \right|$ и $\left| 1 - \frac{z}{\alpha_{-q}} \right|, \left| 1 - \frac{z}{\beta_{-q}} \right|$, из определения w_2 получаем

$$\begin{aligned} \ln |w_2(z)| &= \sum_{q=N+1}^{\infty} \left(\ln \left| 1 - \frac{z}{\alpha_q} \right| - \ln \left| 1 - \frac{z}{\beta_q} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left| 1 - \frac{z}{\alpha_{-q}} \right| - \ln \left| 1 - \frac{z}{\beta_{-q}} \right| \right) \leq \\ &\leq 2|z| \sum_{q=N+1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_q - \beta_q|}{|\alpha_q \beta_q|} + \frac{|\alpha_{-q} - \beta_{-q}|}{|\alpha_{-q} \beta_{-q}|} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из условий (20), (25) имеем

$$\ln |w_2(z)| \leq \lambda_6 |z| \sum_{q=N+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \leq \lambda_6 \frac{|z|}{N} \leq \lambda_7.$$

Из этой оценки, (32) и (27) получаем утверждение леммы 1. □

Меняя местами функции u, v , из леммы 1 получаем следующее следствие.

Следствие 1. Пусть $\varepsilon \in (0, \delta_1)$, $z \in \mathbb{C}$ и

$$|z - \alpha_q| \geq \varepsilon \quad \text{для всех } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$|v(z)| \leq c_1 |u(z)| (2 + |z|)^{c_2},$$

где $c_1 > 0$ не зависит от z , а $c_2 = M \left(\frac{3}{\delta_1} + \frac{2}{\delta_2} \right)$.

4. Доказательство теоремы 1. Для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ полагаем $x' = x_1 \in \mathbb{R}$. Пусть также

$$0 < \delta \leq \inf_{i \neq j} |a_i - a_j|. \quad (33)$$

Поскольку класс $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ инвариантен относительно группы $SO(n)$ и всех сдвигов пространства $\mathbb{R}^n$, не ограничивая общности, можно считать, что прямая L имеет вид

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_2 = \dots = x_n = 0\}$$

и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$|a'_k| \leq |a'_{k+1}| \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

Определим теперь последовательности $\{\alpha_q\}_{q=-\infty}^\infty$, $\{\beta_q\}_{q=-\infty}^\infty$ и $\{\gamma_q\}_{q=-\infty}^\infty$ следующим образом. Пусть

$$\alpha_q = q\delta, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (35)$$

Далее, если промежуток $[\alpha_q, \alpha_{q+1})$ не содержит элементов последовательности $\{a'_k\}_{k=1}^\infty$, то положим

$$\beta_q = \frac{1}{2}(\alpha_q + \alpha_{q+1}), \quad \gamma_q = 0. \quad (36)$$

Предположим теперь, что в промежутке $[\alpha_q, \alpha_{q+1})$ содержится точка a'_k при некотором $k \in \mathbb{N}$. Тогда из (33) и (35) видно, что такая точка единственная и мы полагаем

$$\beta_q = a'_k, \quad \gamma_q = b_k. \quad (37)$$

Покажем, что в этом случае выполнено неравенство

$$k \leq 3 + 2|q|. \quad (38)$$

Действительно, так как $a'_k \in [\alpha_q, \alpha_{q+1})$, из (35) имеем $|a'_k| < (1 + |q|)\delta$. Тогда, учитывая (34), получаем, что все точки a'_m при $m \leq k$ содержатся в интервале $-(1 + |q|)\delta, (1 + |q|)\delta$. Поскольку $\inf_{i \neq j} |a'_i - a'_j| \geq \delta$, отсюда следует (38). Кроме того, из построения чисел β_q и (35) видно, что $\beta_q \in [q\delta, (q + 1)\delta)$,

$$\beta_{q+1} - \beta_q \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \beta_q - \alpha_q \leq \delta.$$

Рассмотрим целую функцию

$$w(z) = p(z) \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_q}\right) \left(1 - \frac{z}{\beta_{-q}}\right), \quad (39)$$

где

$$p(z) = \begin{cases} z, & \text{если } \beta_0 = 0, \\ 1 - \frac{z}{\beta_0}, & \text{если } \beta_0 \neq 0. \end{cases}$$

Полагая $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = \delta/2$, $M = \delta$, $\varepsilon = \delta/3$ и используя следствие 1 для функций

$$u(z) = \frac{1}{z} \sin\left(\frac{\pi}{\delta} z\right), \quad v(z) = \frac{w(z)}{p(z)},$$

получаем, что если

$$|z - \delta q| \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{при всех } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

то

$$\left| \frac{w(z)}{p(z)} \right| \leq c(2 + |z|)^7 \left| \frac{1}{z} \sin \left(\frac{\pi}{\delta} z \right) \right|, \quad (40)$$

где $c > 0$ не зависит от z . Применяя к функции w/p принцип максимума модуля в круге $|z - \delta q| \leq \delta/3$, из (40) получаем оценку

$$|w(z)| = O\left((2 + |z|)^7 e^{\frac{\pi}{\delta} |\operatorname{Im} z|}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (41)$$

Оценим теперь снизу величину $|w'(\beta_m)|$ при $|m| \geq 2$. Из (39) находим

$$w'(\beta_m) = -\frac{p(\beta_m)}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_{-m}}\right) \prod_{q \neq m} \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_q}\right) \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_{-q}}\right).$$

Полагая

$$v(z) = \prod_{q \neq m} \left(1 - \frac{z}{\beta_q}\right) \left(1 - \frac{z}{\beta_{-q}}\right),$$

отсюда имеем

$$\begin{aligned} |w'(\delta_m)| &> c_1 |v(\beta_m)| \geq c_1 \min_{|z - \beta_m| \leq \delta/3} |v(z)| = \\ &= c_1 \min_{|z - \beta_m| = \delta/3} |v(z)|, \end{aligned} \quad (42)$$

где $c_1 > 0$ не зависит от m .

Определим теперь целую функцию u следующим образом. Если

$$\beta_m = \frac{1}{2}(\alpha_q + \alpha_{q+1})$$

при некотором $q \in \mathbb{Z}$, то, как и выше, полагаем

$$u(z) = \frac{1}{z} \sin \left(\frac{\pi}{\delta} z \right).$$

В противном случае обозначим через ζ число из последовательности $\{\alpha_q\}_{q=-\infty}^{\infty}$, ближайшее к β_m (такое число единственно), и положим

$$u(z) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{\delta} z \right)}{z \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \left(1 + \frac{z}{\zeta}\right)}.$$

Отметим, что $\zeta \neq 0$, поскольку $\beta_m \in [m\delta, (m+1)\delta]$ и $|m| \geq 2$. Применяя теперь лемму 1 для функций u, v при $\delta_1 = \delta, \delta_2 = \delta/2, M = \delta, |z - \beta_m| = \delta/3$, получаем

$$|v(z)| \geq c_2(2 + |z|)^{-7} |u(z)|,$$

где $c_2 > 0$ не зависит от z и m . Отсюда, из (42) и определения u следует неравенство

$$|w'(\beta_m)| \geq c_3(2 + |\beta_m|)^{-10}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (43)$$

с постоянной $c_3 > 0$, не зависящей от m .

Рассмотрим теперь функцию

$$g(z) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{w(z)\varphi_q(z)\gamma_q}{w'(\beta_q)(z - \beta_q)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (44)$$

где

$$\varphi_q(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_q = 0, \\ (z/\beta_q)^{\alpha+12}, & \text{если } \beta_q \neq 0. \end{cases}$$

В силу (37), (4), (38) и (43), ряд в правой части равенства (44) сходится в $\mathbb{C}$ локально равномерно и функция g является целой. Из (44), (36) и (37) получаем, что

$$g(\beta_m) = \gamma_m \quad \text{при всех } m \in \mathbb{Z}. \quad (45)$$

Кроме того, если $|z - \beta_q| \geq \delta/3$ при всех $q \in \mathbb{Z}$, то из (44) и (41) имеем оценку

$$|g(z)| \leq c_4(2 + |z|)^{\alpha+19} e^{-\frac{\pi}{\delta}|\operatorname{Im} z|} \quad (46)$$

с постоянной $c_4 > 0$, не зависящей от z . Отсюда и из принципа максимума модуля следует, что

$$g(z) = O\left((2 + |z|)^{\alpha+19} e^{-\frac{\pi}{\delta}|\operatorname{Im} z|}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (47)$$

Согласно теореме Пэли-Винера-Шварца (см. [9, п. 9.3]), это означает, что существует распределение $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ с носителем на $[-\pi/\delta, \pi/\delta]$, такое что

$$\widehat{T}(z) = \langle T, e^{-itz} \rangle = g(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть теперь $\lambda > \pi/\delta$ и $I_{\frac{n}{2}}(r\lambda) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \langle T, H_\lambda(x, t) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (48)$$

где $H_\lambda(x, t)$ определяется формулой (16). Из (17) следует, что

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \quad (49)$$

Отсюда и из равенства (14) при $R = r$, $c = \lambda^2$ получаем, что $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$. Из (48), (45) и (37) следует также, что f удовлетворяет условию (5). Далее, поскольку T имеет компактный носитель, из (48) при некотором $\beta \in \mathbb{N}$ имеем оценку

$$|f(x)| \leq c_5 \sum_{j=0}^{\beta} \max_{[-\pi/\delta, \pi/\delta]} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j H(x, t) \right| \quad (50)$$

с постоянной $c_5 > 0$, не зависящей от x (см. [27, гл. 2, формула (2.3.1)]). Применяя (18), из (50) имеем

$$|f(x)| \leq c_6(1 + |x|)^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (51)$$

где $c_6 > 0$ не зависит от x . Пусть теперь $\eta \in \mathbb{Z}_+$ и $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — радиальная финитная функция, для которой

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u) I_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|u|) du \neq 0.$$

Тогда из равенств (49) и (15) при $c = \lambda^2$ получаем

$$(\partial^n f)(x) = c_7(f * \partial^n \varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $c_7 > 0$ не зависит от x . Используя (51), приходим к выводу, что f удовлетворяет условию (6). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réelles / D. Pompeiu. – Bull. Sci. Acad. Royale Belgique (5). – 1929. – V. 15. – P. 265–269.
2. Chakalov L. Sur un problème de D. Pompeiu / L. Chakalov. – Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. – 1944. – V. 40. – P. 1–14, (Bulgarian; French summary).
3. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten / J. Radon. – Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. – 1917. – V. 69. – P. 262–277.
4. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 pp.
5. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / L. Zalcman. – Approximation by solutions of partial differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185–194.
6. Беренштейн К. А. Комплексный анализ и уравнения в свёртках / К. А. Беренштейн, Д. Струппа. – Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. – ВИНТИ. – 1989. – Т. 54. – С. 5–111.
7. Zalcman L. Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" / L. Zalcman. – Contemp. Math. Radon Transform and Tomography. – 2001. – V. 278. – P. 69–74.
8. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
9. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 672 pp.
10. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. – М.: ИЛ, 1958. – 158 с.
11. Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J. D. Smith. – Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416.
12. Rawat R. The injectivity of the Pompeiu transform and L^p -analogues of the Wiener Tauberian theorem / R. Rawat, A. Sitaram. – Israel J. Math. – 1995. – V. 91. – P. 307–316.
13. Thangavelu S. Spherical means and CR functions on the Heisenberg group / S. Thangavelu. – J. Analyse Math. – 1994. – V. 63. – P. 255–286.
14. Ungar P. Freak theorem about functions on a sphere / P. Ungar. – J. London Math. Soc. (2). – 1954. – V. 29. – P. 100–103.
15. Schneider R. Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres / R. Schneider. – J. Math. Anal. Appl. – 1969. – V. 26. – P. 381–384.
16. Delsarte J. Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques / J. Delsarte. – C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. – 1958. – V. 246. – P. 1358–1360.
17. Netuka I. Mean value property and harmonic functions / I. Netuka, J. Vesely. – Classical and Modern potential Theory and Applications / Comri Sankaran et al., ed. Kluwer Acad. Publ. – 1994. – P. 359–398.
18. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций / В. В. Волчков. – Мат. сб. – 1997. – Т. 188, № 9. – С. 13–30.
19. Волчков Вит. В. Проблема устранимости для функций с нулевыми шаровыми средними / Вит. В. Волчков, Н. П. Волčkova. – Сиб. мат. журн. – 2017. – Т. 58, № 3. – С. 543–552.
20. Berenstein C. A. Inversion of the local Pompeiu transform / C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger. – J. Analyse Math. – 1990. – Vol. 54. – P. 259–287.
21. Berkani M. Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans l'espace hyperbolique quaternionique - Cas des deux boules / M. Berkani, M. El Harchaoui, R. Gay. – J. Complex Variables. – 2000. – Vol. 43. – P. 29–57.
22. Волчков Вит. В. Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве / Вит. В. Волчков, Н. П. Волčkova. – Докл. РАН. – 2001. – Т. 379, № 5. – С. 587–590.
23. Волчков Вит. В. Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве / Вит. В. Волчков, Н. П. Волčkova. – Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, Вып. 5. – С. 169–197.

24. Volchkov V. V. Interpolation problems for functions with zero ball means / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Issues Anal. – 2021. – Vol. 10(28), № 3. – P. 129–140.
25. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б. Г. Коренев. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
26. Волчков В. В. Непрерывное продолжение функций с отрезка до функций в $\mathbb{R}^n$ с нулевыми шаровыми средними / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. – Изв. вузов. Матем. – 2021. – № 3. – С. 3–14.
27. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. / Л. Хермандер. – Мир. – М., 1986, 1988. – Т.1: Теория распределений и анализ Фурье. – 462 с.

Поступила в редакцию 24.05.2022 г.

INTERPOLATION PROBLEM WITH NODES ON THE LINE FOR FUNCTIONS WITH ZERO BALL MEANS

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Let $n \geq 2$, $V_r(\mathbb{R}^n)$ be the set of functions $f \in L^{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ with zero integrals over all balls from $\mathbb{R}^n$ of radius r . In the paper, new sufficient conditions for the solvability of the interpolation problem for the class $V_r(\mathbb{R}^n)$ with an infinite number of nodes are found.

Keywords: interpolation problems, zero spherical means, Bessel functions.

Волчков Валерий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
valeriyvolchkov@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Valeriy Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

Волчков Виталий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
volna936@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Vitaliy Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.444

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

© 2022. *Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков*

Изучаются векторные поля с нулевым потоком через окружности фиксированного радиуса в круге на плоскости Лобачевского. Получено описание таких полей в виде рядов по специальным функциям.

Ключевые слова: векторные поля, плоскость Лобачевского, нулевые сферические средние, сферические гармоники, гипергеометрические ряды Горна.

1. Введение. Одним из хорошо известных критериев T -периодичности непрерывной функции f на вещественной оси является постоянство интегралов от f по всем отрезкам длины T на $\mathbb{R}$, то есть условие

$$\int_x^{x+T} f(y)dy = \int_0^T f(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Естественным аналогом условия (1) в многомерном случае является постоянство интегралов от функции по всем шарам фиксированного радиуса. Близкий класс функций получается, если здесь заменить шары на сферы фиксированного радиуса.

Согласно теории рядов Фурье, всякую T -периодическую функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right), \quad (2)$$

т.е. представить f в виде суммы константы $\frac{a_0}{2}$ и последовательности периодических функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$f_m''(x) + \frac{4\pi^2 m^2}{T^2} f_m(x) = 0.$$

Существенно более трудной задачей является описание функций с постоянными интегралами по шарам (или сферам) фиксированного радиуса. Для эффективной характеристики указанных классов требуется привлекать соответствующие специальные функции. Например, в двумерном случае имеет место следующий результат.

Теорема А. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Тогда функция f имеет нулевые интегралы по всем кругам в $\mathbb{R}^2$ радиуса r в том и только том случае, когда имеет место разложение

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} c_{q,m} J_m\left(\frac{\nu_q}{r} \sqrt{x^2 + y^2}\right) \left(\frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^m,$$

где J_m – функция Бесселя порядка m , $\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$ – последовательность всех положительных нулей функции J_1 , занумерованных в порядке возрастания, и коэффициенты $c_{q,m} \in \mathbb{C}$

удовлетворяют условию

$$c_{q,m} = O\left(\frac{1}{\nu_q^\alpha}\right) \quad \text{при } q \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного $\alpha > 0$.

Отметим, что функции

$$(x, y) \rightarrow J_m\left(\frac{\nu_q}{r}\sqrt{x^2 + y^2}\right) \left(\frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^m$$

являются собственными функциями оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^2$. Подобные результаты были получены и для функций меньшей гладкости, заданных на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, инвариантных относительно вращений (см. [1, Теорема 3], [2, Теорема 3], а также [3]–[5], где содержатся существенно более общие результаты, касающиеся структуры решений уравнений в свертках на симметрических пространствах).

Гораздо менее изученным в этой области является случай векторных полей. Если рассматривать $f \in C^1(\mathbb{R})$ как векторное поле в $\mathbb{R}$, то условие

$$f\left(x - \frac{T}{2}\right) - f\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0$$

означает, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу радиуса $T/2$. Таким образом, равенство (2) дает представление для полей с нулевым потоком через все сферы радиуса $T/2$ в $\mathbb{R}$. Нетривиальные обобщения этого факта на векторные поля в евклидовых пространствах получены в работах [6], [7]. При этом остается совершенно неисследованным случай неевклидовых пространств, в частности, пространств постоянной кривизны. Целью данной работы является описание векторных полей, имеющих нулевой поток через все окружности фиксированного радиуса на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$.

2. Формулировка основного результата. Как обычно, будем отождествлять $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Пусть $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — открытый единичный круг в $\mathbb{R}^2$ со стандартной структурой многообразия и с римановой структурой, задаваемой формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle_z = \frac{(\xi, \eta)}{(1 - |z|^2)^2}, \quad (3)$$

где ξ и η — произвольные касательные векторы в точке $z \in B$. Здесь через (ξ, η) обозначено каноническое скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Это риманово многообразие называют моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ (см., например, [8, раздел IV]).

Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(B)$ действует транзитивно на B посредством конформных отображений. Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, реализованной на круге B . Гиперболическая метрика d на этой плоскости определяется равенством

$$d(0, z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad z \in B$$

и условием инвариантности относительно группы $\mathcal{M}(B)$. Геодезический круг

$$B_R = \{x \in B : d(0, z) < R\} \quad (R > 0)$$

(соответственно, геодезическая окружность $S_R = \{z \in B : d(0, z) = R\}$) совпадает с открытым евклидовым кругом (соответственно, евклидовой окружностью) радиуса $\text{th } R$ с центром в нуле. Гиперболические эквиваленты элемента площади $dx dy$ и элемента длины $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ в $\mathbb{R}^2$ определяются равенствами

$$dz_h = \frac{dx dy}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad ds_h = \frac{ds}{1 - x^2 - y^2}. \quad (4)$$

Гиперболическая дивергенция div_h гладкого векторного поля $\vec{A} : B_R \rightarrow \mathbb{C}^2$ связана с евклидовой дивергенцией div_e соотношением

$$\text{div}_h \vec{A} = (1 - |z|^2)^2 \text{div}_e \frac{\vec{A}}{(1 - |z|^2)^2}. \quad (5)$$

Поле $\vec{A} \in C^1(B_R)$ называется соленоидальным, если $\text{div}_h \vec{A} = 0$.

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим через $\mathcal{V}_r(B_R)$ множество всех непрерывных векторных полей $\vec{A} : B_R \rightarrow \mathbb{C}^2$, имеющих нулевой поток через все геодезические окружности радиуса r , лежащие в B_R , т.е.

$$\mathcal{V}_r(B_R) = \left\{ \vec{A} \in C(B_R) : \int_{gS_r} \langle \vec{A}, \vec{n}_h \rangle ds_h = 0 \quad \forall g \in \mathcal{M}(B) : gS_r \subset B_R \right\},$$

где

$$\vec{n}_h = (1 - |z|^2) \vec{n}, \quad (6)$$

а $\vec{n}$ — евклидов единичный вектор внешней нормали к соответствующей гладкой кривой. Описание гладких полей класса $\mathcal{V}_r(B_R)$, приведенное ниже, опирается на свойства тригонометрических рядов Фурье и свойства некоторых специальных функций.

Пусть, как обычно, Γ — гамма-функция, $(\alpha)_j = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + j - 1)$ — символ Похгаммера, $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, т.е.

$$F(a, b; c; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} z^j, \quad |z| < 1 \quad (7)$$

(см. [9, гл. 2, п. 2.1.1]). Обозначим $N(r)$ — множество положительных корней λ уравнения

$$P_{-(i\lambda+1)/2}^{-1}(\text{ch } 2r) = 0,$$

где

$$P_{\zeta}^{\mu}(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \mu)} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{\mu/2} F \left(-\zeta, \zeta + 1; 1 - \mu; \frac{1-t}{2} \right) -$$

функция Лежандра первого рода [9, гл. 3, § 3.2]. Отметим, что множество $N(r)$ имеет вид $N(r) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, причем

$$\lambda_j \sim \frac{\pi}{r} j, \quad j \rightarrow \infty$$

(см. [10, лемма 7]).

Пусть ρ, φ ($\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$) — полярные координаты точки $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, так что

$$z = (x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Всякой функции $f \in C(B_R)$ поставим в соответствие ряд Фурье

$$f(z) = f(\rho e^{i\varphi}) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\rho) e^{ik\varphi}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (8)$$

где

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad 0 < \rho < \text{th } R. \quad (9)$$

Всюду в дальнейшем $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = \frac{i\lambda + 1}{2}$. При $k \in \mathbb{Z}$, $\rho \in [0, 1)$ обозначим

$$\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \rho^{|k|} (1 - \rho^2)^2 H_{\lambda,k}(\rho), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} H_{\lambda,k}(\rho) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu + |k|)_j (\nu)_j}{(2j + |k| + 2) (|k| + 1)_j j!} \times \\ &\times \rho^{2j} F\left(2 - \nu, j + \frac{|k| + 2}{2}; j + 1 + \frac{|k| + 2}{2}; \rho^2\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, лежащем в промежутке $[0; 1)$ (см. доказательство леммы 7 ниже).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $r > 0$, $r < R \leq +\infty$, $\vec{A} : B_R \rightarrow \mathbb{C}^2$ – векторное поле класса C^∞ . Для того чтобы $\vec{A} \in \mathcal{V}_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{A}(z) = (1 - |z|^2)^2 \mathcal{B}(z) \vec{z} + \vec{C}(z), \quad z \in B_R, \quad (12)$$

где $\vec{C}$ – соленоидальное векторное поле класса C^∞ , $\mathcal{B}$ – скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$\mathcal{B}_k(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,\lambda} \rho^{|k|} H_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 \leq \rho < \text{th } R, \quad (13)$$

в которых константы $\gamma_{k,\lambda}$ убывают быстрее любой фиксированной степени λ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Из следствия 1 ниже видно, что ряд (13) можно почленно дифференцировать на $[0, 1)$ любое число раз. Отметим также, что функции $H_{\lambda,k}$ выражаются через гипергеометрический ряд Горна двух переменных (см. [11, введение], [12, гл. 4, § 4.1, п. 4.1.1]).

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{D}$ – ограниченная область в $\mathbb{H}^2$ с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$, $\text{cl } \mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Если $\vec{A} \in C^1(\text{cl } \mathcal{D})$, то

$$\int_{\mathcal{D}} \text{div}_h \vec{A} dz_h = \int_{\partial\mathcal{D}} \langle \vec{A}, \vec{n}_h \rangle ds_h.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенств (3), (4) и (6), имеем

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \langle \vec{A}, \vec{n}_h \rangle ds_h = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{(\vec{A}, \vec{n}_h)}{(1 - |z|^2)^2} \frac{ds}{(1 - |z|^2)} = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{(\vec{A}, \vec{n})}{(1 - |z|^2)^2} ds.$$

Используя теперь формулу Грина и формулы (4), (5), получаем

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \langle \vec{A}, \vec{n}_h \rangle ds_h = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}_e \frac{\vec{A}}{(1 - |z|^2)^2} dx dy = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}_h \vec{A} dz_h.$$

Таким образом, лемма 1 доказана. □

Лемма 2. Пусть $f \in C^1(B_R)$ и

$$F(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Тогда коэффициенты Фурье функций f и F связаны соотношением

$$F_k(\rho) = \rho f'_k(\rho), \quad 0 \leq \rho < \operatorname{th} R. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения коэффициентов Фурье и функции F имеем

$$\begin{aligned} F_k(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\rho \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x}(\rho e^{i\varphi}) + \rho \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y}(\rho e^{i\varphi}) \right) e^{-ik\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (9) по ρ , получаем

$$f'_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x}(\rho e^{i\varphi}) + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y}(\rho e^{i\varphi}) \right) e^{-ik\varphi} d\varphi. \quad (16)$$

Сравнивая формулы (15) и (16), приходим к соотношению (14). □

Лемма 3. Пусть $\mathcal{B} \in C^1(B_R)$, $\vec{B}(z) = (1 - |z|^2)^2 \mathcal{B}(z) \vec{z}$. Тогда

$$(1 - |z|^2)^{-2} (\operatorname{div}_h \vec{B})(z) = 2\mathcal{B}(z) + x \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}(z) + y \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y}(z). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (5), имеем

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2)^{-2} (\operatorname{div}_h \vec{B})(z) &= \operatorname{div}_e (\mathcal{B}(z) \vec{z}) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}(z)x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{B}(z)y) = \\ &= 2\mathcal{B}(z) + x \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}(z) + y \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y}(z), \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Лемма 4. Пусть $\vec{A} \in C^2(B_R)$ и

$$\vec{B}(z) = (1 - |z|^2)^2 \mathcal{B}(z) \vec{z}, \quad (18)$$

где

$$\mathcal{B}(z) = \int_0^1 \frac{(\operatorname{div}_h \vec{A})(tz) t}{(1 - t^2 |z|^2)^2} dt.$$

Тогда

$$\operatorname{div}_h \vec{B} = \operatorname{div}_h \vec{A}. \quad (19)$$

Кроме того,

$$\mathcal{B}_k(\rho) = \int_0^1 \frac{(\operatorname{div}_h \vec{A})_k(t\rho) t}{(1 - t^2 \rho^2)^2} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим

$$f(z) = \frac{(\operatorname{div}_h \vec{A})(z)}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Используя (17) и формулу

$$x \frac{\partial}{\partial x}(f(tz)) + y \frac{\partial}{\partial y}(f(tz)) = t \frac{d}{dt}(f(tz)),$$

находим

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2)^{-2} (\operatorname{div}_h \vec{B})(z) &= 2 \int_0^1 f(tz) t dt + \\ &+ \int_0^1 t \left(x \frac{\partial}{\partial x}(f(tz)) + y \frac{\partial}{\partial y}(f(tz)) \right) dt = \\ &= 2 \int_0^1 f(tz) t dt + \int_0^1 t^2 \frac{d}{dt}(f(tz)) dt. \end{aligned}$$

Преобразуя последнее слагаемое с помощью интегрирования по частям, получаем

$$(1 - |z|^2)^{-2} (\operatorname{div}_h \vec{B})(z) = 2 \int_0^1 f(tz) t dt + t^2 f(tz) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(tz) t dt = f(z),$$

т.е. равенство (19) доказано.

Далее, используя (9) и теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{B}(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(t\rho e^{i\varphi}) t dt e^{-ik\varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^1 t \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi dt = \int_0^1 t f_k(t\rho) dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (20). □

Лемма 5. Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} b > 1$, $\rho_0 \in (0, 1)$. Тогда

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} |F(a, b; b+1; \rho^2)| \leq |b|(1 - \rho_0^2)^{-\max\{\operatorname{Re} a, 0\}}, \quad (21)$$

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} \left| \frac{d}{d\rho} F(a, b; b+1; \rho^2) \right| \leq 2\rho_0 |a| |b| (1 - \rho_0^2)^{-\max\{\operatorname{Re} a + 1, 0\}}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу интегрального представления Эйлера гипергеометрической функции, при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ имеем

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt$$

(см. [9, гл. 2, п. 2.1.3, формула (10)]). В частности, если $\operatorname{Re} b > 0$, $0 \leq \rho < 1$, то

$$\frac{F(a, b; b+1; \rho^2)}{b} = \int_0^1 t^{b-1} (1 - t\rho^2)^{-a} dt. \quad (23)$$

Отсюда нетрудно получить оценку (21). Оценка (22) следует из (21) и следующей формулы дифференцирования гипергеометрической функции:

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) \quad (24)$$

(см. [9, гл. 2, п. 2.1.2, формула (7)]). □

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\rho \in [0, 1)$ положим

$$h_{\lambda, k}(\rho) = \frac{(\nu)_{|k|}}{|k|!} \rho^{|k|} (1 - \rho^2)^\nu F(\nu + |k|, \nu; |k| + 1; \rho^2), \quad (25)$$

где, как и выше, $\nu = \nu(\lambda) = \frac{1}{2}(i\lambda + 1)$. Если $\lambda \in (0, +\infty)$, то при любых $\rho_0 \in (0, 1)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} \left| \frac{d^s}{d\rho^s} h_{\lambda, k}(\rho) \right| = O(\lambda^s), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (26)$$

(см. [10, лемма 2]). Отметим также равенство

$$(\mathcal{L} + (\lambda^2 + 1)Id)(h_{\lambda, k}(\rho)e^{ik\varphi}) = 0,$$

где Id — тождественный оператор, $\mathcal{L}$ — оператор Лапласа-Бельтрами на $\mathbb{H}^2$, т.е.

$$\mathcal{L} = (1 - |z|^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

(см. [10, § 2, формула (9)]).

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим через $V_r(B_R)$ множество функций $f \in L_{loc}(B_R)$, для которых

$$\int_{gB_r} f(x, y) dz_h = 0$$

при всех $g \in \mathcal{M}(B)$, таких что $g(\operatorname{cl} B_r) \subset B_R$. Следующий результат получен В.В. Волчковым (см. [10, лемма 14 и теорема 3]).

Теорема 2. 1) Пусть $f \in L_{loc}(B_R)$ и каждый коэффициент ряда (8) имеет вид

$$f_k(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,\lambda} h_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 < \rho < \text{th } R, \quad (27)$$

где $c_{k,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\lambda \in N(r)} |c_{k,\lambda}| < \infty$. Тогда $f \in V_r(B_R)$.

2) Пусть $f \in V_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Тогда при всех $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство (27), где $c_{k,\lambda} = O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $s \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 6. Имеет место интегральное представление

$$\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}} \int_0^1 \left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2} \right)^2 h_{\lambda,k}(t\rho) t dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (25) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}} \int_0^1 \left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2} \right)^2 h_{\lambda,k}(t\rho) t dt = \\ &= \rho^{|k|} (1-\rho^2)^2 \int_0^1 t^{|k|+1} (1-t^2\rho^2)^{\nu-2} F(\nu+|k|, \nu; |k|+1; t^2\rho^2) dt = \\ &= \rho^{|k|} (1-\rho^2)^2 \int_0^1 t^{|k|+1} (1-t^2\rho^2)^{\nu-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j (\nu)_j}{(|k|+1)_j j!} t^{2j} \rho^{2j} dt. \end{aligned}$$

В силу признака Вейерштрасса, указанный ряд сходится равномерно по t на отрезке $[0, 1]$. Поэтому после его почленного интегрирования и замены переменной $t = \sqrt{u}$ в интеграле, приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}} \int_0^1 \left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2} \right)^2 h_{\lambda,k}(t\rho) t dt = \\ &= \rho^{|k|} (1-\rho^2)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j (\nu)_j}{2j! (|k|+1)_j} \rho^{2j} \int_0^1 u^{j+\frac{|k|}{2}} (1-u\rho^2)^{\nu-2} du. \end{aligned}$$

Используя теперь (23), (11) и (10), получаем (28). $\square$

Следствие 1. Если $\lambda \in (0, +\infty)$, то при любых $\rho_0 \in (0, 1)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} \left| \frac{d^s}{d\rho^s} \mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) \right| = O(\lambda^{s-|k|}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (28) с применением формулы Лейбница, имеем

$$\frac{d^s}{d\rho^s} \mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}} \sum_{m=0}^s \frac{s!}{m!(s-m)!} \times$$

$$\times \int_0^1 t^{m+1} h_{\lambda,k}^{(m)}(t\rho) \frac{d^{s-m}}{d\rho^{s-m}} \left(\left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2} \right)^2 \right) dt.$$

Отсюда и из (26) получаем требуемое. $\square$

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$\rho^{|k|}(1-\rho^2)^2 [\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho)] = \frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}} h_{\lambda,k}(\rho).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу асимптотики для гамма-функции (см. [9, гл. 1, § 1.18, формула (4)]),

$$\left| \frac{(\nu+|k|)_j (\nu)_j}{j! (|k|+1)_j (2j+|k|+2)} \right| \sim \frac{|k|!}{2 |\Gamma(\nu+|k|) \Gamma(\nu)|} j^{-\operatorname{Im} \lambda - 2}, \quad j \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из леммы 5 видно, что ряд (11) и ряд, полученный из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно на отрезке $[0, \rho_0]$ при любом $\rho_0 < 1$. Поэтому, используя (24) и теорему о дифференцировании функционального ряда, находим

$$\begin{aligned} \rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho) = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j (\nu)_j \rho^{2j}}{j! (|k|+1)_j} \left(F \left(2-\nu, j+1+\frac{|k|}{2}; j+2+\frac{|k|}{2}; \rho^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{(2-\nu)\rho^2}{j+1+\frac{|k|}{2}} F \left(2-\nu+1, j+2+\frac{|k|}{2}; j+3+\frac{|k|}{2}; \rho^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Выражение с гипергеометрическими функциями в скобках преобразуется с помощью формулы

$$F(a, b; c; z) + \frac{az}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) = F(a, b+1; c; z)$$

(см. [13, гл. 7, § 5, п. 2, формула (16)]). При этом получаем

$$\begin{aligned} \rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho) = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j (\nu)_j \rho^{2j}}{j! (|k|+1)_j} F \left(2-\nu, j+2+\frac{|k|}{2}; j+2+\frac{|k|}{2}; \rho^2 \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$F(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}$$

(см. [9, гл. 2, § 2.8, п. 2, формула (1)]), последнее соотношение можно записать в виде

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho) = (1-\rho)^{\nu-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+|k|)_j (\nu)_j \rho^{2j}}{j! (|k|+1)_j}.$$

Теперь требуемое утверждение следует из (7) и (25). $\square$

4. Доказательство теоремы 1.

Пусть $\vec{A} \in \mathcal{V}_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Тогда по лемме 1 гиперболическая дивергенция поля $\vec{A}$ принадлежит классу $V_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Поэтому ее коэффициенты Фурье имеют вид

$$(\operatorname{div}_h \vec{A})_k(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,\lambda} h_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 \leq \rho < \operatorname{th} R, \quad (30)$$

где $c_{k,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $c_{k,\lambda} = O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$ (см. второе утверждение в теореме 2). Положим $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, где векторное поле $\vec{B}$ определяется равенством (18). В силу соотношений (30), (26), (28) и леммы 4, поле $\vec{C}$ является соленоидальным и

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k(\rho) &= \int_0^1 \frac{t}{(1-t^2\rho^2)^2} \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,\lambda} h_{\lambda,k}(t\rho) dt = \\ &= \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,\lambda} \frac{(\nu)_{|k|}}{|k|!} \rho^{|k|} H_{\lambda,k}(\rho). \end{aligned}$$

При этом коэффициенты $\gamma_{k,\lambda} = \frac{(\nu)_{|k|}}{|k|!} c_{k,\lambda}$ ведут себя как $O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$. Тем самым необходимость в теореме 1 доказана.

Наоборот, пусть $\vec{A} \in C^\infty(B_R)$ и имеют место разложения (12), (13). Тогда (см. соотношения (17), (14), (29) и лемму 7)

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_h \vec{B})_k(\rho) &= (1-\rho^2)^2 (\rho \mathcal{B}'_k(\rho) + 2\mathcal{B}_k(\rho)) = \\ &= (1-\rho^2)^2 \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,\lambda} \rho^{|k|} (\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (|k|+2)H_{\lambda,k}(\rho)) = \\ &= \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,\lambda} \frac{|k|!}{(\nu)_{|k|}} h_{\lambda,k}(\rho). \end{aligned}$$

Это разложение и теорема 2 показывают, что $\operatorname{div}_h \vec{B} \in V_r(B_R)$. Учитывая, что $\operatorname{div}_h \vec{C} = 0$, отсюда и из леммы 1 заключаем, что $\vec{A} \in \mathcal{V}_r(B_R)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах / В. В. Волчков // Мат. сборник. – 1995. – Т. 186. – № 6. – С. 15–34.
2. Волчков В.В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций / В. В. Волчков // Мат. сборник. – 1997. – Т. 188. – № 9. – С. 13–30.
3. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.
5. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
6. Smith J. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J. Smith // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416.
7. Волчков Вит.В., Волčkova Н.П. Векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса / Вит. В. Волчков, Н. П. Волčkova // Владикавк. матем. журн. – 2018. – Т. 20. – № 4. – С. 20–34.

8. Альфорс Л. Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве / Л. Альфорс. – М.: Мир, 1986. – 114 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973, 1974. – 296, 296 с.
10. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах / В.В. Волчков // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – Т. 65. – № 2. – С. 3–26.
11. Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа / И.М. Гельфанд, М.И. Граев, В.С. Ретах // УМН. – 1992. – Т. 47. – Вып. 4(286). – С. 3–82.
12. Садыков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных / Т.М. Садыков, А.К. Цих. – М.: Наука, 2014. – 408 с.
13. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1991. – 576 с.

Поступила в редакцию 13.02.2022 г.

HARMONIC ANALYSIS OF VECTOR FIELDS ON THE LOBACHEVSKII PLANE

N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov

We study vector fields which have zero flux through every circle of fixed radius in a disk on the Lobachevskii plane. For fields in such classes a description in the form of a series in special functions is obtained.

Keywords: vector fields, Lobachevskii plane, zero spherical means, spherical harmonics, Horn hypergeometric series.

Волчкова Наталья Петровна

кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, ДНР
volna936@gmail.com
283000, Донецк, ул. Артема 58

Volchkova Natalia Petrovna

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National Technical
University, Donetsk, DPR

Волчков Виталий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
volna936@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Vitaliy Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 519.632.4

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РОБЕНА С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2022. Е. С. Глушанков

Предложен приближенный метод решения третьей краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами при разрывных граничных условиях. При построении решения задачи использовался аппарат конформных отображений, функций комплексной переменной, а также метод наименьших квадратов. Проведены численные исследования значений абсолютной погрешности решения на границе области, в которой решается уравнение.

Ключевые слова: задача Робена, уравнение в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами, разрывные граничные условия, метод наименьших квадратов, погрешность решения.

Введение. Для описания математических моделей самых различных процессов широко используются уравнения в частных производных и краевые задачи [1]. В частности, уравнения второго порядка возникают при описании моделей теплопроводности, диффузии, теории упругости, электростатики, магнитостатики и т.д. Разработано множество аналитических и численных методов решения краевых задач для случая, когда коэффициенты уравнения вместе с начальными и граничными условиями являются непрерывными функциями [2–7]. Известны также подходы к решению краевых задач с разрывными граничными условиями [5], представлены аналитические решения некоторых задач [8–10], предложен приближенный метод решения задачи Дирихле для многосвязной области [11].

В данной работе предложен численно-аналитический метод решения задачи Робена, или третьей краевой задачи, для однородного эллиптического двумерного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с разрывными граничными условиями. Неизвестная функция на границе может иметь конечное число точек разрыва первого рода. Решение задачи строится с помощью конформных отображений, теории функций комплексной переменной, метода наименьших квадратов. Оценка корректности метода осуществлялась на основе результатов численных исследований погрешности решения задачи в зависимости от геометрических характеристик области, в которой решается задача, а также особенностей граничного значения неизвестной функции. Приведены результаты исследований погрешности решения задачи Робена для уравнения Лапласа в круговой области и во внешней области круга.

Постановка задачи. Пусть задана многосвязная область S , ограниченная внешним контуром L_0 и внутренними эллиптическими контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l и углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе, касаться или пересекаться, образуя таким образом криволинейные контуры. Если внешний контур L_0 отсутствует, то область S является бесконечной.

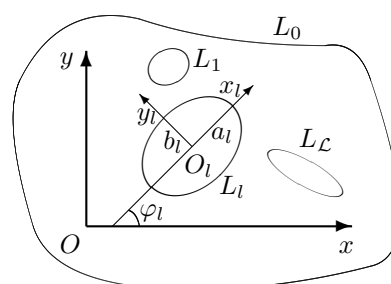


Рис. 1

Пусть в многосвязной области S поставлена задача Робена:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\left(u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial S} = \psi(x, y). \quad (2)$$

Здесь A, B, C, β — заданные постоянные; n — направление нормали. Функция $\psi(x, y)$ кусочно-непрерывна на ∂S и имеет конечное число точек разрыва первого рода $M_{lj}^0(x_{lj}^0, y_{lj}^0)$ ($l = \overline{0, \mathcal{L}}, j = \overline{1, \mathcal{J}_l}$).

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов L_l имеют вид [11]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy —

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + a_l \cos \varphi_l \cos \theta - b_l \sin \varphi_l \sin \theta, \\ y &= y_{0l} + a_l \sin \varphi_l \cos \theta + b_l \cos \varphi_l \sin \theta. \end{aligned}$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — параметр уравнения эллипса, заданного в параметрической форме.

Тогда для каждой из точек разрыва M_{lj}^0 существует значение θ_{lj}^0 параметра θ такое, что [11]

$$\begin{aligned} x_{lj}^0 &= x_{0l} + a_l \cos \varphi_l \cos \theta_{lj}^0 - b_l \sin \varphi_l \sin \theta_{lj}^0, \\ y_{lj}^0 &= y_{0l} + a_l \sin \varphi_l \cos \theta_{lj}^0 + b_l \cos \varphi_l \sin \theta_{lj}^0. \end{aligned}$$

Представим кусочно-непрерывную функцию $\psi(x, y)$ в виде совокупности функций, заданных на каждой эллиптической дуге, ограниченной точками разрыва M_{lj}^0 [11]:

$$\psi(x, y) = \{ \psi_{lj}(\theta) \mid l = \overline{0, \mathcal{L}}, j = \overline{1, \mathcal{J}_l}, \theta \in (\theta_{lj}^0, \theta_{l,j+1}^0) \}.$$

Общее решение задачи для конечной области. Если для решения задачи использовать функции комплексной переменной, то общее решение уравнения (1) представимо в виде [11]

$$u = 2 \operatorname{Re} F_1(z_1), \quad (3)$$

Комплексная переменная z_1 определяется аффинным преобразованием [11]

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad (4)$$

где $\mu_1 = -\frac{B}{C} + i \frac{\varkappa}{C}$; $\varkappa = \sqrt{AC - B^2}$.

В общем случае многосвязной области S функцию $F_1(z_1)$ можно представить в виде [11]

$$F_1(z_1) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{1l} w_{1l}(z_1) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} c_{1ln} \varphi_{1ln}(z_1), \quad (5)$$

в котором D_{1l} — вещественные постоянные, определяемые из граничного условия; $w_{1l}(z_1) = \ln(z_1 - z_{1l})$; z_{1l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (4) произвольным точкам внутри контуров L_{1l} , получаемых из L_l преобразованием (4); c_{1ln} — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий;

$$\varphi_{10n}(z_1) = \left(\frac{z_1 - z_{10}}{R_{10}} \right)^n, \quad \varphi_{1ln}(z_1) = \zeta_{1l}^{-n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

ζ_{1l} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{1l}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{1l} [11]

$$z_1 = z_{1l} + R_{1l} \left(\zeta_{1l} + \frac{m_{1l}}{\zeta_{1l}} \right), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} z_{1l} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{1l} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_1 \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_1 \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{1l} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_1 \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_1 \cos \varphi_l)}{2R_{1l}}. \end{aligned}$$

Функция $F_1(z_1)$ должна удовлетворять граничному условию

$$2 \operatorname{Re} (F_1(\tau_1) + i\beta \chi \delta_{1,s}(\tau_1) F_1'(\tau_1)) = \psi(\tau), \quad (7)$$

где $\delta_{1,s}(\tau_1) = d\tau_1/ds$, s — дуга контура.

Неизвестные постоянные D_{1l} и c_{1ln} , входящие в функцию (5), определяются из граничного условия (7) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_l}$, $\mathcal{M}_l$ — количество выбранных точек на контуре L_l), в которых следует удовлетворять граничному условию (7). В каждом из бесконечных рядов в (5) сохраним по $\mathcal{N}_l$ слагаемых.

После подстановки функции (5) в граничное условие (7) для определения неизвестных постоянных D_{1l} и c_{1ln} получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (w_{1l}(\tau_{1jm}) + i\beta \chi \delta_{1,s}(\tau_{1jm}) w_{1l}'(\tau_{1jm})) D_{1l} + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\mathcal{N}_l} (\varphi_{1ln}(\tau_{1jm}) + i\beta \chi \delta_{1,s}(\tau_{1jm}) \varphi_{1ln}'(\tau_{1jm})) c_{1ln} = \\ &= \psi(\tau_{jm}) \quad (j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_j}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\tau_{1jm} = x_{jm} + \mu_1 y_{jm}$, $\tau_{jm} = \tau_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$.

Если количество уравнений в системе уравнений (8) превысит количество неизвестных, т.е. $\sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{M}_l > \mathcal{L} + 2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \mathcal{N}_l$, то получим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [12, 13] станут известными постоянные D_{1l} и c_{1ln} , а следовательно, будет известна и функция $F_1(z_1)$.

Общее решение задачи для бесконечной области. Если область S , в которой решается поставленная задача Робена, является бесконечной, то из условия ограниченности решения задачи на бесконечности следует

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{1l} = 0 \quad \text{и} \quad c_{10n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда функцию $F_1(z_1)$ можно записать в виде

$$F_1(z_1) = c_1 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{1l} w_{1l}(z_1) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{1ln} \varphi_{1ln}(z_1), \quad (9)$$

где $c_1 = c_{100}$.

Тогда неизвестные постоянные c_1 , D_{1l} и c_{1ln} , входящие в функцию (9), также можно определять из граничного условия (7) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_l}$), в которых следует удовлетворять граничному условию (7). В каждом из бесконечных рядов в (9) сохраним по $\mathcal{N}_l$ слагаемых.

После подстановки функции (9) в граничное условие (7) для определения неизвестных постоянных c_1 , D_{1l} и c_{1ln} получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2c_1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (w_{1l}(\tau_{1jm}) + i\beta \varkappa \delta_{1,s}(\tau_{1jm}) w'_{1l}(\tau_{1jm})) D_{1l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_l} (\varphi_{1ln}(\tau_{1jm}) + i\beta \varkappa \delta_{1,s}(\tau_{1jm}) \varphi'_{1ln}(\tau_{1jm})) c_{1ln} = \\ & = \psi(\tau_{jm}) \quad (j = \overline{1, \mathcal{L}}, \quad m = \overline{1, \mathcal{M}_j}), \end{aligned} \quad (10)$$

Если количество уравнений в системе уравнений (10) превышает количество неизвестных, т.е. $\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \mathcal{M}_l > 1 + \mathcal{L} + 2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \mathcal{N}_l$, то получим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений, которую можно решать, например, методом сингулярных разложений [12, 13]. После этого станут известными постоянные c_1 , D_{1l} и c_{1ln} , а следовательно, и функция $F_1(z_1)$.

Решение задачи Робена для уравнения Лапласа в круговой области. Пусть в области S , ограниченной круговым контуром L_0 радиуса a (рис. 2), задана задача Робена:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

$$\left(u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{L_0} = \psi(x, y). \quad (12)$$

В этом случае имеем $\mathcal{L} = 0$, $\varphi_0 = 0$, $A = C = 1$, $B = 0$, тогда $\mu_1 = i$, $R_{10} = a/2$, $m_{10} = 0$, $z_{10} = 0$. Тогда на основе (5) функция $F_1(z_1)$ принимает вид

$$F_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{10n} \left(\frac{z_1}{a/2} \right)^n. \quad (13)$$

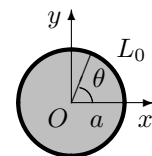


Рис. 2

Были проведены численные исследования погрешности решения (3), (13) задачи (11)–(12) в зависимости от количества M_0 точек M_{0m} на контуре L_0 , количества N_0 слагаемых, сохраняемых в ряду (13), а также значения параметра β на значения погрешности решения задачи. Рассматривались значения параметра $\beta = 0; 10^{-2}; 10^{-1}; 1; 10; 10^2$. При этом, случай $\beta = 0$ соответствует задаче Дирихле [11]. Значения M_0 и N_0 увеличивались до тех пор, пока граничные условия не удовлетворялись с высокой степенью точности.

Приведем результаты численных исследований для двух случаев функции $\psi(x, y)$.

1. *Ступенчатая функция.* Пусть $\psi(x, y) = \psi(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$. Точками разрыва являются точки $\theta_{01}^0 = 0$ и $\theta_{02}^0 = \pi$. Выберем на контуре L_0 сетку точек M_{0m} , в которых будем удовлетворять граничным условиям.

В табл. 1 приведены значения погрешностей решения задачи в некоторых точках контура L_0 с центральным углом θ , отсчитываемым от положительного направления оси Ox , в зависимости от значения M_0 количества точек, составляющих систему M_{0m} , и значения N_0 количества слагаемых, сохраняемых в ряду (13).

Таблица 1

Значения погрешностей решения задачи в точках контура L_0 в случае ступенчатой функции

Знач. M_0	Знач. N_0	Точка (θ , рад.)							
		$\pi/36$	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
100	10	0,23641	0,03405	–0,07140	0,02066	0,00426	–0,01928	0,02772	–0,03047
	20	0,04809	–0,07395	0,01503	–0,01612	–0,01931	–0,00739	0,00732	0,01372
	30	–0,03512	0,00733	0,00651	–0,01438	–0,00067	0,00837	0,00013	–0,00725
	40	–0,04220	0,02032	–0,01029	–0,00219	0,00458	–0,00207	–0,00160	0,00325
	45	–0,03718	0,01167	–0,00036	–0,00286	–0,00269	–0,00091	0,00106	0,00191
200	20	0,03457	–0,08164	0,01922	–0,01748	–0,02160	–0,00838	0,00814	0,01535
	40	–0,07370	0,03356	–0,01576	–0,00617	0,00971	–0,00410	–0,00350	0,00688
	60	0,00720	–0,01350	–0,01389	0,00725	–0,00513	0,00419	–0,00376	0,00363
	80	0,02029	0,00434	–0,00204	–0,00188	0,00230	–0,00089	–0,00086	0,00162
	90	0,00996	–0,00449	–0,00115	–0,00158	0,00011	0,00091	–0,00002	–0,00079
500	50	–0,03567	–0,02392	0,02128	0,00653	0,00019	–0,00348	–0,00550	–0,00615
	100	–0,02067	0,00158	0,00575	–0,00264	–0,00389	–0,00161	0,00142	0,00275
	150	0,01545	0,00471	0,00028	–0,00290	–0,00003	0,00168	0,00001	–0,00145
	200	–0,00049	–0,00366	–0,00108	–0,00069	0,00092	–0,00037	–0,00034	0,00065
	225	0,00394	0,00074	–0,00048	–0,00037	0,00047	–0,00018	–0,00017	0,00033
1000	100	–0,02380	0,00202	0,00634	–0,00298	–0,00435	–0,00180	0,00159	0,00308
	200	0,00157	–0,00754	–0,00254	–0,00140	0,00195	–0,00079	–0,00071	0,00138
	300	0,00469	–0,00195	–0,00281	0,00145	–0,00103	0,00084	–0,00075	0,00073
	400	–0,00365	0,00151	–0,00067	–0,00031	0,00046	–0,00019	–0,00017	0,00032
	450	0,00042	–0,00091	–0,00005	–0,00032	0,00000	0,00018	0,00000	–0,00016
2000	200	0,00200	–0,00840	–0,00287	–0,00156	0,00218	–0,00088	–0,00080	0,00154
	400	–0,00751	0,00308	–0,00136	–0,00068	0,00097	–0,00040	–0,00036	0,00069
	600	–0,00195	–0,00108	0,00140	0,00073	0,00051	0,00042	0,00038	0,00036
	800	0,00150	0,00019	–0,00030	–0,00017	0,00023	–0,00009	–0,00008	0,00016
	900	–0,00091	0,00046	–0,00031	0,00016	–0,00011	0,00009	–0,00008	0,00008
5000	500	0,00657	0,00269	0,00117	–0,00062	–0,00087	–0,00035	0,00032	0,00062
	1000	0,00239	0,00026	–0,00054	–0,00027	0,00039	–0,00016	–0,00014	0,00028
	1500	0,00081	–0,00042	–0,00056	0,00029	–0,00021	0,00017	–0,00015	0,00015
	2000	0,00011	–0,00035	–0,00012	–0,00007	0,00009	–0,00004	–0,00003	0,00006
	2250	0,00002	–0,00018	0,00000	–0,00006	0,00000	0,00004	0,00000	–0,00003

Как и в случае задачи Дирихле [11], наибольшие значения погрешности решения обретаются вблизи точек разрыва граничной функции, особенно при малых значениях M_0 и N_0 . Это явление аналогично явлению Гиббса в теории рядов Фурье [11, 14]. Вдали от точек разрыва погрешность уменьшается на несколько порядков. При значениях $M_0 > 500$ и $N_0 > 150$ погрешность становится незначительной, в т.ч. и вблизи точек разрыва, поскольку сужается область, где явление, аналогичное явлению Гиббса, может заметно влиять на результаты численных исследований.

Численные исследования показывают, что параметр β не влияет на значения погрешности решения, поэтому в таблице 1 он не приводится. Следовательно, значения погрешности решения задачи Робена совпадают с таковыми для задачи Дирихле [11].

В точках разрыва не производилось удовлетворение граничному условию задачи. Однако приближенное решение задачи по построению является непрерывной функцией, поэтому получены значения решения в точках разрыва. Это 0, 5, что равно среднему арифметическому односторонних пределов функции $\psi(\theta)$.

2. *Спиральная функция.* Пусть $\psi(x, y) = \psi(\theta) = \theta/2\pi$. Точкой разрыва является точка $\theta_{01}^0 = 0$. Выберем на контуре L_0 сетку точек M_{0m} , в которых будем удовлетворять граничным условиям.

В табл. 2 приведены значения погрешностей решения задачи в некоторых точках контура L_0 с центральным углом θ в зависимости от значения M_0 количества точек, составляющих систему M_{0m} , и значения N_0 количества слагаемых в ряду (13).

Как и в предыдущем случае, вблизи точки разрыва погрешность решения является наибольшей, особенно при небольших значениях M_0 и N_0 , а вдали от точки разрыва погрешность уменьшается на несколько порядков. При значениях $M_0 > 500$ и $N_0 > 150$

Таблица 2

Значения погрешностей решения задачи в точках контура L_0 в случае спиральной функции

Знач. M_0	Знач. N_0	Точка (θ , рад.)							
		$\pi/36$	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$
100	10	–0,24840	–0,05025	0,06154	–0,00452	–0,02061	0,02913	0,01524	0,01635
	20	–0,05515	0,07581	–0,00842	0,02137	0,01646	–0,00081	–0,00686	0,00285
	30	0,03311	–0,00392	–0,01026	0,01341	0,00445	–0,00627	0,00363	–0,00377
	40	0,04271	–0,02131	0,01167	0,00049	–0,00391	0,00311	–0,00162	–0,00067
	45	0,03658	–0,01079	–0,00033	0,00198	0,00229	0,00137	–0,00095	0,00039
500	50	0,03854	0,02171	–0,02249	–0,00881	–0,00330	–0,00012	0,00308	0,00312
	100	0,01973	–0,00020	–0,00686	0,00126	0,00332	0,00242	–0,00138	0,00057
	150	–0,01579	–0,00531	–0,00101	0,00271	0,00076	–0,00126	0,00073	–0,00073
	200	0,00082	0,00375	0,00077	0,00093	–0,00078	–0,00001	–0,00032	–0,00013
	225	–0,00383	–0,00058	0,00060	0,00021	–0,00040	0,00027	–0,00016	–0,00007
1000	100	0,02276	–0,00047	–0,00757	0,00143	0,00371	0,00269	–0,00154	0,00064
	200	–0,00088	0,00772	0,00190	0,00191	–0,00166	–0,00001	–0,00069	–0,00029
	300	–0,00500	0,00162	0,00276	–0,00136	0,00088	–0,00063	–0,00036	0,00015
	400	0,00370	–0,00160	0,00080	0,00015	–0,00039	0,00028	–0,00016	–0,00007
	450	–0,00050	0,00090	0,00013	0,00030	–0,00008	–0,00014	0,00008	0,00008
5000	500	–0,00645	–0,00247	–0,00089	0,00085	0,00074	0,00000	–0,00031	0,00013
	1000	–0,00230	–0,00013	0,00065	0,00014	–0,00033	0,00024	–0,00014	–0,00006
	1500	–0,00075	0,00048	0,00055	–0,00027	0,00018	–0,00013	–0,00007	0,00003
	2000	–0,00008	0,00036	0,00009	0,00009	–0,00008	0,00000	–0,00003	–0,00001
	2250	–0,00003	0,00018	0,00002	0,00006	–0,00002	–0,00003	0,00002	0,00002

погрешность становится незначительной, в т.ч. и вблизи точки разрыва.

И как в случае ступенчатой функции, численные исследования показывают, что параметр β не влияет на значения погрешности решения, поэтому в таблице 2 он не фигурирует, а значения погрешности решения задачи Робена совпадают со значениями для задачи Дирихле [11].

В точке разрыва не производилось удовлетворение граничному условию задачи. Однако поскольку приближенное решение задачи по построению является непрерывной функцией, то можно получить значения функции решения и в точках разрыва — получено значение 0,5, равное среднему арифметическому односторонних пределов функции $\psi(\theta)$.

Полученные значения погрешности в случае спиральной функции в большинстве точек не превосходят погрешность в случае ступенчатой функции. Это связано с меньшим количеством точек разрыва спиральной функции.

Решение задачи Робена для уравнения Лапласа во внешней области круга. Пусть в бесконечной области S с вырезанным кругом с контуром L_1 радиуса a (рис. 3) задана задача Робена:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (14)$$

$$\left(u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{L_1} = \psi(x, y). \quad (15)$$

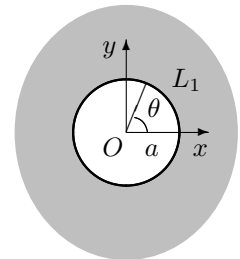


Рис. 3

В этом случае имеем $\mathcal{L} = 1$, $\varphi_0 = 0$, $A = C = 1$, $B = 0$, тогда $\mu_1 = i$, $R_{11} = a/2$, $m_{11} = 0$, $z_{11} = 0$. Тогда на основе (9) функция $F_1(z_1)$ принимает вид

$$F_1(z_1) = c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{11n} \zeta_{11}^{-n}, \quad (16)$$

где переменная ζ_{11} определяется из конформного отображения (6) при заданных его параметрах.

Были проведены численные исследования погрешности решения (3), (16) задачи (14)–(15) в зависимости от количества $\mathcal{M}_1$ точек M_{1m} на контуре L_1 , количества $\mathcal{N}_1$ слагаемых, сохраняемых в ряду (16), а также значения параметра β на значения погрешности решения задачи. Как и в случае круговой области, рассматривались значения параметра $\beta = 0; 10^{-2}; 10^{-1}; 1; 10; 10^2$, где случай $\beta = 0$ соответствует задаче Дирихле [11]. Значения $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{N}_0$ увеличивались до тех пор, пока граничные условия не удовлетворялись с высокой степенью точности.

Были проведены численные исследования для двух ранее рассмотренных случаев функции $\psi(x, y)$ — ступенчатой функции и спиральной функции. Исследования показали, что в одних и тех же точках кругового контура значения погрешностей решения задачи для внешности круга совпадают со значениями для случая внутренности круга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.
2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
3. Гурса Э. Курс математического анализа : в 3 т. / Э. Гурса. – М.–Л.: ГТТИ, 1933. – Т. 3, ч. 1. – 276 с.
4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1965. – 716 с.

5. Бабич В.М. Линейные уравнения математической физики / В.М. Бабич, М.Б. Капилевич, С.Г. Михлин и др. – М.: Наука, 1964. – 368 с. – (Справочная математическая библиотека: Т. 10)
6. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 420 с.
7. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
8. Ильин А.М. Разностные методы решения краевых задач с малым параметром и разрывными граничными условиями / А.М. Ильин // Труды Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. – 1976. – Вып. 21. – С. 5–18.
9. Йованович Б.С. О методе сеток решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в случае разрывных граничных условий / Б.С. Йованович // Математички весник. – 1981. – Књ. 5(18)(33), № 1. – С. 74–84.
10. Krutitskii P.A. The Dirichlet problem for the Laplacian with discontinuous boundary data in a 2D multiply connected exterior domain / P.A. Krutitskii // Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – Vol. 56, No. 12. – P. 3221–3235.
11. Глушанков Е.С. Численно-аналитический метод решения одной задачи Дирихле с разрывными граничными условиями / Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2021. – № 2. – С. 66–72.
12. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
13. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
14. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1964. – 772 с.

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.

AN APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING ONE ROBIN PROBLEM WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

E. S. Glushankov

An approximate method is proposed for solving the Robin problem for second-order elliptic PDE with constant coefficients with discontinuous boundary conditions. The conformal mappings, the complex functions, and the least squares were used to construct the solution of the problem. The numerical studies are obtained for the solution's error on the bound of the domain on which the given equation is to be solved.

Keywords: Robin problem, second order PDE with constant coefficients, discontinuous boundary conditions, the least squares, error of the solution.

Глушанков Евгений Сергеевич

кандидат физико-математических наук
Донецкий национальный университет, г. Донецк,
ДНР
evgenij.glushankov@gmail.com
283001, г. Донецк, пр. Гурова, 14, Главный корпус
ДонНУ, кафедра теории упругости и вычислитель-
ной математики имени академика А.С. Космода-
мианского

Glushankov Eugene Sergeevich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.5+519.213

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ И ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫХ ЯДЕР

© 2022. В. П. Заставный

Для комплекснозначных положительно определенных ядер основное неравенство и критерий обращения его в равенство получены автором в 2020. Эти результаты используются для получения основного неравенства и соответствующего критерия для положительно определенных матричнозначных и операторнозначных ядер. Следствием основного неравенства для таких ядер являются неравенства Крейна, Вейля и критерий обращения их в равенство, а также неравенства типа неравенств Крейна-Горина и Ингама.

Ключевые слова: положительно определенные матричнозначные и операторнозначные ядра, неравенство Ингама, неравенство Крейна, неравенство Вейля, неравенство Горина.

1. Введение. Для комплекснозначных положительно определенных ядер основное неравенство и критерий обращения его в равенство получены автором в 2020 [1]. В представленной работе эти результаты используются для получения основного неравенства и соответствующего критерия для положительно определенных матричнозначных и операторнозначных ядер (теорема 1). Следствием основного неравенства для таких ядер являются неравенства Крейна, Вейля и критерий обращения их в равенство (следствия 6 и 7), а также неравенства типа неравенств Крейна-Горина (теорема 2) и Ингама (следствие 5).

Основное неравенство для положительно определенных ядер известно давно. Доказательство этого неравенства для комплекснозначных ядер см., например, в монографиях Sasvári (1994) [2, Теорема 1.4.1(v)] и (2013) [3, Теорема 1.4.12(v)], а для операторнозначных ядер – в диссертации Mlak (1978) [4]. Доказательство основного неравенства в этих работах сводится к неравенству Коши-Буняковского для специального полускалярного произведения, порожденного заданным положительно определенным ядром. В работе автора [1] применяется другое линейное пространство и полускалярное произведение, которые используются при доказательстве теоремы Ароншайна о существовании гильбертова пространства с воспроизводящим ядром (см., например, монографии [5, Глава IV, § 1] и [6, Часть I, § 2]). Это полускалярное произведение является скалярным произведением, что позволило доказать и критерий равенства в основном неравенстве.

В параграфе 2 данной работы приведены базовые понятия теории матриц. В параграфе 3 приведены основные сведения из теории положительно определенных матриц.

В параграфе 4 рассмотрены общие свойства положительно определенных матричнозначных ядер, доказан критерий таких ядер в терминах положительно определенных матриц а также в терминах положительно определенных комплекснозначных ядер (предложения 2 и 5), получен аналог теоремы Шура для матричнозначных ядер (предложение 3). Некоторые из этих свойств доказаны в [7–9].

В параграфе 5 доказано основное неравенство для положительно определенных матричнозначных ядер, критерий равенства в нем и следствия.

В параграфе 6 указано, как переформулировать практически все замечания, предложения, теоремы и следствия, приведенные в параграфах 4 и 5, для случая операторнозначных ядер. Приведен список утверждений, для которых это сделать не получилось, например аналог теоремы Шура.

2. Матрицы и операции над ними. Для $m, n \in \mathbb{N}$ пусть $M_{m,n}$ – множество всех комплексных матриц порядка $m \times n$ с элементами из $\mathbb{C}$. Пусть $M_m := M_{m,m}$ – множество всех квадратных матриц порядка m с элементами из $\mathbb{C}$, и пусть $\mathbb{C}^m := M_{m,1}$ – множество всех векторов с m комплексными координатами. Для матрицы $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ транспонированную $A^T = [a_{ij}^T] \in M_{n,m}$ и сопряженную $A^* = [a_{ij}^*] \in M_{n,m}$ матрицы определим соответственно по формулам $a_{ij}^T = a_{ji}$ и $a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}$. Очевидно, $A^* = \bar{A}^T$, где $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}] \in M_{m,n}$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ и для матриц $A, B \in M_{m,n}$, $C \in M_{n,p}$, обычным образом определяется сумма $A + B \in M_{m,n}$, произведение $AC \in M_{m,p}$ и произведение на скаляр $\lambda A = A\lambda \in M_{m,n}$. Легко проверить, что $(A^*)^* = A$, $(A + B)^* = A^* + B^*$ and $(AC)^* = C^*A^*$. Если $z \in \mathbb{C}$, то $\bar{z} = z^*$. Далее, для каждого $z, g \in \mathbb{C}^m$ имеем $gz^* = [g_i \bar{z}_j] \in M_m$, $\overline{g^*z} = (g^*z)^* = z^*g \in \mathbb{C}$ и $z^*z \geq 0$. Скалярное произведение для элементов $g, z \in \mathbb{C}^m$ определяется по формуле $(g, z) := z^*g$.

3. Положительно определенные матрицы. Матрица $A \in M_m$ называется *положительно определенной*, если неравенство

$$(Az, z) = z^*Az = \sum_{l,k=1}^m \bar{z}_l a_{lk} z_k \geq 0 \quad (1)$$

выполняется для любых $z \in \mathbb{C}^m$.¹ Множество всех таких матриц обозначим символом ΦM_m . Матрица $A \in \Phi M_m$ называется *строго положительно определенной*, если неравенство (1) строгое при условии, что $z \neq 0 \in \mathbb{C}^m$.² ΦM_1 – это множество всех неотрицательных чисел. По поводу выбора терминологии см., например, монографию Berg, Christensen, Ressel (1984) [10, Гл. 3.1]. Из неравенства $z^*(BB^*)z = (B^*z)^*(B^*z) \geq 0$, $z \in \mathbb{C}^m$, $B \in M_{m,r}$, $r \in \mathbb{N}$ следует, что для любых $B \in M_{m,r}$, $r \in \mathbb{N}$, матрица $BB^* \in \Phi M_m$. Несложно показать, что $A \in \Phi M_m$ тогда и только тогда, когда $A = CC^*$ для некоторой матрицы $C \in M_m$ (доказательство аналогично доказательству Теоремы 7.2.7 из [11]). Хорошо известно, что если матрица $A \in \Phi M_m$ и ее ранг равен p , то она представима в виде $A = \sum_{k=1}^p g_k g_k^*$, где $\{g_k\}_{k=1}^p$ – ортогональная система ненулевых векторов из $\mathbb{C}^m$ (см., например, [11, Теорема 7.5.2]). Из этого представления легко получить теорему Шура: если $A, B \in \Phi M_m$, то их произведение Адамара $A \circ B := [a_{ij} b_{ij}] \in M_m$ также является положительно определенной матрицей (см., например, [11, Теорема 7.5.3]). Главный случай в теореме Шура, когда $A = gg^*$, $B = hh^*$, где $g, h \in \mathbb{C}^m$, получается из соотношений $gg^* \circ hh^* = [g_i \bar{g}_j] \circ [h_i \bar{h}_j] = [g_i h_i \bar{g}_j \bar{h}_j] = (g \circ h)(g \circ h)^* \in \Phi M_m$.

4. Положительно определенные матричные ядра. Пусть G – некоторое множество. Матричная функция $K : G \times G \rightarrow M_m$ называется *положительно определенным матричным ядром* на $G \times G$ если неравенство

$$\sum_{l,k=1}^n (K(x_l, x_k) z_k, z_l) = \sum_{l,k=1}^n z_l^* K(x_l, x_k) z_k = \sum_{l,k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \bar{z}_l K_{ij}(x_l, x_k) z_{kj} \geq 0 \quad (2)$$

выполняется для любых $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^m$ и $x_1, \dots, x_n \in G$. Множество всех положительно определенных матричных ядер $K : G \times G \rightarrow M_m$ обозначим символом $\Phi(G \times G, M_m)$. Ядро $K \in \Phi(G \times G, M_m)$ называется *строго положительно определенным*, если неравенство (2) строгое при условии, что все точки $\{x_k\}_{k=1}^n$ попарно различны

¹В теории матриц [11] такие матрицы называются положительно полуопределенными.

²В [11] такие матрицы называются положительно определенными.

(т.е. $x_k \neq x_p$ при $k \neq p$) и не все $\{z_k\}_{k=1}^n$ равны нулю в $\mathbb{C}^m$. В случае $m = 1$ имеем $\Phi(G \times G) := \Phi(G \times G, M_1)$ – множество всех положительно определенных комплекснозначных ядер $K : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$.

Пусть G – группа (не обязательно абелева) с групповой операцией $+$. Матричная функция $f : G \rightarrow M_m$ называется положительно определенной на G если функция $K(x, y) := f(x-y)$ является положительно определенным ядром на $G \times G$. Множество всех таких функций обозначим символом $\Phi(G, M_m)$. В случае $m = 1$ имеем $\Phi(G) := \Phi(G, M_1)$.

Замечание 1. Если $K \in \Phi(G \times G, M_m)$, то очевидно $\overline{K} \in \Phi(G \times G, M_m)$ и, значит, $\operatorname{Re} K := \frac{1}{2}(K + \overline{K}) \in \Phi(G \times G, M_m)$. Кроме того $K(x, x) \in \Phi M_m$, $K^*(x, y) = K(y, x)$ и $|\xi^* K(x, y) z|^2 \leq \xi^* K(x, x) \xi z^* K(y, y) z$ для всех $x, y \in G$, $\xi, z \in \mathbb{C}^m$. Это не сложно доказать, используя совокупность неравенств (2) при $n = 1$ и $n = 2$. А если для некоторых $x \in G$, $\xi \in \mathbb{C}^m$ выполняется равенство $\xi^* K(x, x) \xi = 0$, то $\xi^* K(x, y) z = 0$ для всех $y \in G$ и $z \in \mathbb{C}^m$, что эквивалентно равенству $K(y, x) \xi = 0 \in \mathbb{C}^m$ для всех $y \in G$. Если G – группа и $f \in \Phi(G, M_m)$, то $\overline{f}, \operatorname{Re} f \in \Phi(G, M_m)$, $f(0) \in \Phi M_m$, $f^*(x) = f(-x)$ и $|\xi^* f(x) z|^2 \leq \xi^* f(0) \xi z^* f(0) z$, $|z^* f(x) z| \leq z^* f(0) z$, для всех $x \in G$, $\xi, z \in \mathbb{C}^m$. А если для некоторого $\xi \in \mathbb{C}^m$ выполняется равенство $\xi^* f(0) \xi = 0$, то $f(x) \xi = 0 \in \mathbb{C}^m$, $x \in G$. Если G – абелева группа, то $f^* \in \Phi(G, M_m)$.

Предложение 1. Если матричная функция $K : G \times G \rightarrow M_m$ является константой, т.е. $K(x, y) \equiv A$ на $G \times G$, то $K \in \Phi(E, M_m) \iff A \in \Phi M_m$.

Доказательство. Если $K \in \Phi(E, M_m)$, то из неравенства (2) при $n = 1$ следует неравенство $z^* A z \geq 0$, $z \in \mathbb{C}^m$. Отсюда следует, что матрица $A \in \Phi M_m$.

Если $A \in \Phi M_m$, то для любых $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^m$ и $x_1, \dots, x_n \in E$ выполняется неравенство

$$\sum_{l,k=1}^n z_l^* K(x_l, x_k) z_k = \sum_{l,k=1}^n z_l^* A z_k = z^* A z \geq 0,$$

где $z := \sum_{k=1}^n z_k \in \mathbb{C}^m$. Приведенное выше неравенство показывает, что матричная функция $K(x, y) \equiv A$ является положительно определенным ядром на $G \times G$. $\square$

Замечание 2. Если положительно определенное матричное ядро является константой, то оно очевидно не является строго положительно определенным ядром.

Замечание 3. Если $K \in \Phi(G \times G, M_m)$ и $B : G \rightarrow M_{m,r}$, $r \in \mathbb{N}$, то матричная функция $F(x, y) := B^*(x) K(x, y) B(y)$ принадлежит классу $\Phi(G \times G, M_r)$ (в (2) надо взять $z_l = B(x_l) \xi_l$, $\xi_l \in \mathbb{C}^r$). В частности, $B^*(x) A B(y) \in \Phi(G \times G, M_r)$ для любой $A \in \Phi M_m$.

Замечание 4. Отметим, что если функция $f : G \rightarrow M_m$ является матричнозначным характером на группе G , т.е. $f^*(x) f(x) = E$ – диагональная единичная матрица $\operatorname{diag}(1, \dots, 1)$ и $f(x+y) = f(x) f(y)$, $x, y \in G$, то $f(0) = E$, $f^*(x) = f(-x) = f^{-1}(x)$, $x \in G$, и $f(x-y) = f(x) f^*(y)$. Поэтому $f \in \Phi(G, M_m)$. Если $\{f_k\}_{k=1}^m$ – система комплекснозначных характеров на G , то функция $f(x) := \operatorname{diag}(f_1(x), \dots, f_m(x))$ является матричнозначным характером на G .

В следующем утверждении доказан критерий положительной определенности матричных ядер в терминах положительно определенных матриц (эквивалентность условий (1), (2) и (3)) а также в терминах положительно определенных комплекснозначных ядер (эквивалентность условий (1) и (4)).

Предложение 2. Пусть $K : G \times G \rightarrow M_m$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $K \in \Phi(G \times G, M_m)$;
- (2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для любого набора точек $\{x_l\}_{l=1}^n \in G$ и $\{\xi_l\}_{l=1}^n \in \mathbb{C}^m$ матрица $A := [\xi_l^* K(x_l, x_k) \xi_k] \in \Phi M_n$;
- (3) для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для любого набора точек $\{x_l\}_{l=1}^n \in G$ блочная матрица $C = [C_{l,k}] \in \Phi M_p$, где $p := mn$ и $C_{l,k} := K(x_l, x_k) \in M_m$;
- (4) $F((x, \xi); (y, z)) := \xi^* K(x, y) z \in \Phi(\Lambda \times \Lambda)$, где $(x, \xi), (y, z) \in \Lambda := G \times \mathbb{C}^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем импликацию (1) $\implies$ (2). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{x_l\}_{l=1}^n \in G$, $\{\xi_l\}_{l=1}^n \in \mathbb{C}^m$, $\lambda = [\lambda_l] \in \mathbb{C}^n$. Пусть $A := [\xi_l^* K(x_l, x_k) \xi_k] \in M_n$ и $z_l := \xi_l \lambda_l \in \mathbb{C}^m$ для всех $l = 1, \dots, n$. Поскольку $K \in \Phi(G \times G, M_m)$, то имеем

$$\lambda^* A \lambda = \sum_{l,k=1}^n z_l^* K(x_l, x_k) z_k \geq 0.$$

Последнее неравенство показывает, что матрица A является положительно определенной.

Теперь докажем импликацию (2) $\implies$ (1). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{x_l\}_{l=1}^n \in G$, $\{z_l\}_{l=1}^n \in \mathbb{C}^m$ и $\lambda = [1] \in \mathbb{C}^n$. Так как матрица $A := [z_l^* K(x_l, x_k) z_k] \in \Phi M_n$, то

$$\sum_{l,k=1}^n z_l^* K(x_l, x_k) z_k = \lambda^* A \lambda \geq 0.$$

Последнее неравенство показывает, что $K \in \Phi(G \times G, M_m)$.

Докажем эквивалентность условий (1) и (3). Любой набор из n векторов $\{z_l\}_{l=1}^n \in \mathbb{C}^m$ порождает блочный вектор-столбец $z = [z_k] \in \mathbb{C}^{mn}$. И наоборот, любой вектор-столбец $z \in \mathbb{C}^{mn}$ естественным образом порождает набор из n векторов $\{z_l\}_{l=1}^n \in \mathbb{C}^m$. Тогда блочный вектор $Cz \in \mathbb{C}^{mn}$ имеет блоки (см., например, [11, Параграф 0.7] или [12, Теорема 1.6.1])

$$(Cz)_l = \sum_{k=1}^n C_{l,k} z_k \in \mathbb{C}^m.$$

Тогда

$$z^* C z = \sum_{l=1}^n z_l^* (Cz)_l = \sum_{l,k=1}^n z_l^* C_{l,k} z_k = \sum_{l,k=1}^n z_l^* K(x_l, x_k) z_k. \quad (3)$$

Эквивалентность условий (1) и (3) следует из равенства (3).

Эквивалентность условий (1) и (4) вытекает из того, что условие (4) очевидно эквивалентно условию: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n \subset \Lambda := G \times \mathbb{C}^m$, $\{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{l,k=1}^n c_l^* F((x_l, \xi_l); (x_k, \xi_k)) c_k = \sum_{l,k=1}^n (\xi_l c_l)^* K(x_l, x_k) (\xi_k c_k) \geq 0.$$

□

Следующее утверждение – это аналог теоремы Шура для матричнозначных ядер, а при $m = 1$ оно соответствует замкнутости семейства положительно определенных комплекснозначных ядер относительно произведения.

Предложение 3. Если $A, B \in \Phi(G \times G, M_m)$, то $A \circ B \in \Phi(G \times G, M_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{x_l\}_{l=1}^n \in G$. Применяя предложение 2 к матрично-значным ядрам A и B , получаем, что блочные матрицы $[A(x_l, x_k)], [B(x_l, x_k)] \in \Phi M_{mn}$. По теореме Шура матрица $[A(x_l, x_k)] \circ [B(x_l, x_k)] \in \Phi M_{mn}$. Но

$$[A(x_l, x_k)] \circ [B(x_l, x_k)] = [A(x_l, x_k) \circ B(x_l, x_k)].$$

Применяя предложение 2 к $K := A \circ B$, получаем, что $K \in \Phi(G \times G, M_m)$. $\square$

Предложение 4. Пусть $K(x, y) := f(x, y)B(x, y)$, $x, y \in G$, где $f \in \Phi(G \times G)$ и $B \in \Phi(G \times G, M_m)$. Тогда $K \in \Phi(G \times G, M_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{x_l\}_{l=1}^n \in G$ и $\{\xi_l\}_{l=1}^n \in \mathbb{C}^m$. Тогда $[f(x_l, x_k)] \in \Phi M_n$. Применяя предложение 2 к B , мы получаем, что $[\xi_l^* B(x_l, x_k) \xi_k] \in \Phi M_n$. По теореме Шура

$$A := [\xi_l^* K(x_l, x_k) \xi_k] = [\xi_l^* f(x_l, x_k) B(x_l, x_k) \xi_k] = [f(x_l, x_k)] \circ [\xi_l^* B(x_l, x_k) \xi_k] \in \Phi M_n.$$

Применяя предложение 2 к матричной функции K , находим, что $K \in \Phi(G \times G, M_m)$. $\square$

Предложение 5. Пусть X и T некоторые множества и $G := X \times T$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $f(u; v) \in \Phi(G \times G)$, где $u = (x, t), v = (y, s) \in G$;
- (2) для каждого $m \in \mathbb{N}$ и для любого набора точек $\{t_i\}_{i=1}^m \in T$ матричное ядро $K(x, y) := [f((x, t_i); (y, t_j))]$ принадлежит классу $\Phi(X \times X, M_m)$;
- (3) для каждого $m \in \mathbb{N}$ и для любого набора точек $\{x_i\}_{i=1}^m \in X$ матричное ядро $K(t, s) := [f((x_i, t); (x_j, s))]$ принадлежит классу $\Phi(T \times T, M_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что нам нужно доказать только эквивалентность условий (1) и (2). Докажем импликацию (1) $\implies$ (2). Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $\{x_l\}_{l=1}^n \in X$, $\{t_i\}_{i=1}^m \in T$, $z_{li} \in \mathbb{C}$ для всех $l = 1, \dots, n$ и $i = 1, \dots, m$. Пусть $K(x, y) := [f((x, t_i); (y, t_j))]$. Поскольку $f((x, t); (y, s)) \in \Phi(G \times G)$, то имеем

$$\sum_{l,k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \bar{z}_{li} K_{ij}(x_l, x_k) z_{kj} = \sum_{l,k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \bar{z}_{li} f((x_l, t_i); (x_k, t_j)) z_{kj} \geq 0.$$

Последнее неравенство показывает, что $K \in \Phi(X \times X, M_m)$.

Чтобы доказать обратную импликацию, возьмем произвольные $n \in \mathbb{N}$, $\{(x_l, t_l)\}_{l=1}^n \in X \times T$, $\{a_l\}_{l=1}^n \in \mathbb{C}$. Пусть $m = n$, $z_{ll} := a_l$ and $z_{li} := 0$, if $l \neq i$. Так как $K(x, y) := [f((x, t_i); (y, t_j))]$ $\in \Phi(X \times X, M_n)$, то

$$\sum_{l,k=1}^n \bar{a}_l f((x_l, t_l); (x_k, t_k)) a_k = \sum_{l,k=1}^n \sum_{i,j=1}^n \bar{z}_{li} K_{ij}(x_l, x_k) z_{kj} \geq 0.$$

Последнее неравенство показывает, что $f(u, v) \in \Phi(G \times G)$. $\square$

Предложение 6. Пусть G – группа и $f \in \Phi(G, M_m)$. Если $r, n \in \mathbb{N}$, $\{h_p\}_{p=1}^n \subset G$, $\{\alpha_p\}_{p=1}^n \subset M_{m,r}$, то функция $\psi : G \rightarrow M_r$, определенная по формуле (4), принадлежит классу $\Phi(G, M_r)$,

$$\psi(x) := \sum_{p,s=1}^n \alpha_p^* f(h_p + x - h_s) \alpha_s, \quad x \in G. \quad (4)$$

В частности, если $\{\beta_p\}_{p=1}^n \subset \mathbb{C}$, то

$$\Delta(x) := \sum_{p,s=1}^n \overline{\beta_p} f(h_p + x - h_s) \beta_s \in \Phi(G, M_m).$$

Если дополнительно G – абелева группа, то при любом параметре $h \in G$ функция $2f(x) - f(x+h) - f(x-h)$, $x \in G$, принадлежит классу $\Phi(G, M_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^q \subset G$, $\{\xi_k\}_{k=1}^q \subset \mathbb{C}^r = M_{r,1}$. Для наборов индексов $(s, l) \in U := \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}$ определим систему точек $y_{(s,l)} := h_s + x_l \in G$ и систему $\eta_{(s,l)} := \alpha_s \xi_l \in \mathbb{C}^m = M_{m,1}$. Учитывая равенства $h_p + x_k - x_l - h_s = y_{(p,k)} - y_{(s,l)}$ и $\xi_k^* \alpha_p^* = \eta_{(p,k)}^*$, получаем

$$\sum_{k,l=1}^q \xi_k^* \psi(x_k - x_l) \xi_l = \sum_{(p,k),(s,l) \in U} \eta_{(p,k)}^* f(y_{(p,k)} - y_{(s,l)}) \eta_{(s,l)} \geq 0.$$

Поэтому $\psi \in \Phi(G, M_r)$. Если взять $r = m$ и $\alpha_p = \beta_p E \in M_m$, где $E = \text{diag}(1, \dots, 1)$ – диагональная единичная матрица, то получим, что $\Delta = \psi \in \Phi(G, M_m)$.

Вторая часть утверждения вытекает из доказанной первой части при $n = 2$, $h_1 = h$, $h_2 = 0$ и $\beta_1 = -\beta_2 = 1$. $\square$

5. Основное неравенство для положительно определенных матричнозначных ядер и следствия из него. Основное неравенство для ядер из класса $\Phi(G \times G)$ доказано в теореме 1 работы автора [1] (для функций $f \in \Phi(G)$, где G – группа, см., например, монографии Сасвари [2, Теорема 1.4.1(v)] и [3, Теорема 1.4.12(v)]). В этой же теореме получен и критерий, когда основное неравенство обращается в равенство. Переход к матрично-значным ядрам осуществляется с помощью предложения 2. Пусть $K \in \Phi(G \times G, M_q)$. Тогда $F((x, \xi); (y, z)) := \xi^* K(x, y) z \in \Phi(\Lambda \times \Lambda)$, где $(x, \xi), (y, z) \in \Lambda := G \times \mathbb{C}^q$. Применяя к ядру $F \in \Phi(\Lambda \times \Lambda)$ теорему 1 из [1], получаем, что для любых натуральных $n, m \in \mathbb{N}$, для произвольных наборов точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n, \{(y_p, z_p)\}_{p=1}^m \subset G \times \mathbb{C}^q, \{a_k\}_{k=1}^n, \{b_p\}_{p=1}^m \subset \mathbb{C}$ выполняются неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \xi_k^* K(x_k, y_p) z_p a_k \overline{b_p} \right|^2 \leq \sum_{k,p=1}^n \xi_k^* K(x_k, x_p) \xi_p a_k \overline{a_p} \sum_{k,p=1}^m z_k^* K(y_k, y_p) z_p b_k \overline{b_p}. \quad (5)$$

Неравенство (5) обращается в равенство для некоторых натуральных $n, m \in \mathbb{N}$, наборов точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n, \{(y_p, z_p)\}_{p=1}^m \subset G \times \mathbb{C}^q, \{a_k\}_{k=1}^n, \{b_p\}_{p=1}^m \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда для всех $(t, w) \in G \times \mathbb{C}^q$ выполняется равенство

$$\sum_{k,p=1}^m z_k^* K(y_k, y_p) z_p b_k \overline{b_p} \sum_{k=1}^n a_k \xi_k^* K(x_k, t) w = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \xi_k^* K(x_k, y_p) z_p a_k \overline{b_p} \sum_{p=1}^m b_p z_p^* K(y_p, t) w.$$

Если в совокупности неравенств (5) взять $a_k = b_p = 1$, $k, p \in \mathbb{N}$, то очевидно получим эквивалентную совокупность неравенств. Если $u^*, v^* \in \mathbb{C}^q$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то совокупность равенств $\lambda u w = \mu v w$, $w \in \mathbb{C}^q$, очевидно эквивалентна одному равенству $\lambda u = \mu v$ или $\lambda u^* = \mu v^*$. Учитывая это, получаем следующее основное неравенство (6) для матрично-значных ядер из класса $\Phi(G \times G, M_q)$ и критерий, когда оно обращается в равенство.

Теорема 1 (Основное неравенство). Пусть $K \in \Phi(G \times G, M_q)$. Тогда для любых натуральных $n, m \in \mathbb{N}$, для произвольных наборов точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n$, $\{(y_p, z_p)\}_{p=1}^m \subset G \times \mathbb{C}^q$, $(x, \xi) \in G \times \mathbb{C}^q$ выполняются неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \xi_k^* K(x_k, y_p) z_p \right|^2 \leq \sum_{k,p=1}^n \xi_k^* K(x_k, x_p) \xi_p \sum_{k,p=1}^m z_k^* K(y_k, y_p) z_p, \quad (6)$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \xi_k^* K(x, x_k) \xi_k \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^n \xi_k^* K(x_k, x) \xi \right|^2 \leq \xi^* K(x, x) \xi \sum_{k,p=1}^n \xi_k^* K(x_k, x_p) \xi_p. \quad (7)$$

Неравенство (6) обращается в равенство для некоторых натуральных $n, m \in \mathbb{N}$, наборов точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n$, $\{(y_p, z_p)\}_{p=1}^m \subset G \times \mathbb{C}^q$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство

$$\sum_{k,p=1}^m z_k^* K(y_k, y_p) z_p \sum_{k=1}^n K(t, x_k) \xi_k = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m z_p^* K(y_p, x_k) \xi_k \sum_{p=1}^m K(t, y_p) z_p.$$

В частности неравенство $|\xi^* K(x, y) z|^2 \leq \xi^* K(x, x) \xi z^* K(y, y) z$ обращается в равенство для некоторых $(x, \xi), (y, z) \in G \times \mathbb{C}^q$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство $z^* K(y, y) z K(t, x) \xi = z^* K(y, x) \xi K(t, y) z$.

Замечание 5. Из теоремы 1 вытекает, что если G – группа и $f \in \Phi(G, M_q)$, то неравенство $|\xi^* f(x) z|^2 \leq \xi^* f(0) \xi z^* f(0) z$ обращается в равенство для некоторых $x \in G$, $\xi, z \in \mathbb{C}^q$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство

$$z^* f(0) z f(t - x) \xi = z^* f(-x) \xi f(t) z.$$

В частности, если $f \in \Phi(G, M_q)$ и $z^* f(x) z = \varepsilon z^* f(0) z$ для некоторых $x \in G$, $z \in \mathbb{C}^q$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, то для любых $t \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство $f(t + nx) z = \varepsilon^n f(t) z$ (при $q = 1$ и $z = 1$ см., например, [13, Лемма 1], [14, Следствие 1]).

Определение 1. Система функций $f_k : G \rightarrow M_q$, $k = 1, \dots, n$, называется линейно зависимой на G , если существует система векторов $\{\xi_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^q$, не все равные нулю, такие, что на G справедливо тождество $f_1(x) \xi_1 + \dots + f_n(x) \xi_n \equiv 0 \in \mathbb{C}^q$. Если это тождество выполняется только при $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0 \in \mathbb{C}^q$, то эта система функций называется линейно независимой на G .

Следствие 1. Пусть $K \in \Phi(G \times G, M_q)$. Тогда K является строго положительно определенным ядром тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любой системы попарно различных точек $\{x_k\}_{k=1}^n \subset G$ система функций $\{K(x, x_k)\}_{k=1}^n$ линейно независима на G .

Доказательство. Если $K \in \Phi(G \times G, M_q)$, то из неравенства (7) вытекает эквивалентность

$$\sum_{k,p=1}^n \xi_k^* K(x_k, x_p) \xi_p = 0 \iff \sum_{k=1}^n K(x, x_k) \xi_k = 0 \in \mathbb{C}^q, \quad x \in G. \quad (8)$$

Из эквивалентности (8) и следует утверждение следствия. $\square$

Следствие 2. Пусть $K : G \times G \rightarrow M_q$. Тогда $K \in \Phi(G \times G, M_q)$ тогда и только тогда, когда $K(x, x) \in \Phi M_q$ для всех $x \in G$, и для любых натуральных $n, m \in \mathbb{N}$, для произвольных наборов точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n, \{(y_p, z_p)\}_{p=1}^m \subset G \times \mathbb{C}^q$ выполняется неравенство (6).

Доказательство. Необходимость уже доказана. Докажем достаточность. Из неравенства (6) при $n = m = 1$, $(x_1, \xi_1) = (x, \xi)$, $(y_1, z_1) = (y, z)$ вытекает неравенство $|\xi^* K(x, y) z|^2 \leq \xi^* K(x, x) \xi z^* K(y, y) z$, $(x, \xi), (y, z) \in G \times \mathbb{C}^q$. Поэтому, если для всех $(x, \xi) \in G \times \mathbb{C}^q$ выполняется равенство $\xi^* K(x, x) \xi = 0$, то $K \equiv 0$, и значит $K \in \Phi(G \times G, M_q)$. Если $\xi^* K(x, x) \xi > 0$ для некоторых $x \in G$ и $\xi \in \mathbb{C}^q$, то из неравенства (7), которое следует из (6), получаем неравенство

$$\sum_{l,k=1}^n \xi_l^* K(x_l, x_k) \xi_k \geq 0.$$

Поэтому и в этом случае $K \in \Phi(G \times G, M_q)$. $\square$

Замечание 6. Следствие 2 очевидно останется в силе, если вместо выполнения совокупности неравенств (6) потребовать выполнение совокупности неравенств (7). Для функций $f \in \Phi(G)$ оба эти факта отмечаются в [2, Замечания, стр. 25], где пропущено условие $f(0) \geq 0$.

Теорему 1 можно записать для $f \in \Phi(G, M_q)$, где G – группа. Вместо системы точек $\{x_k\}_{k=1}^n \subset G$ можно взять новую систему $\{\tilde{x}_k = u + x_k + x\}_{k=1}^n$, где $u, x \in G$. Тогда $\tilde{x}_k - \tilde{x}_p = u + x_k + x + (-x - x_p - u) = u + x_k - x_p - u$. Результат запишем для $u = 0$.

Следствие 3. Пусть G – группа и $f \in \Phi(G, M_q)$. Тогда для любых натуральных $n, m \in \mathbb{N}$, для произвольных наборов точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n, \{(y_p, z_p)\}_{p=1}^m \subset G \times \mathbb{C}^q$, $x \in G$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \xi_k^* f(x_k + x - y_p) z_p \right|^2 \leq \sum_{k,p=1}^n \xi_k^* f(x_k - x_p) \xi_p \sum_{k,p=1}^m z_k^* f(y_k - y_p) z_p. \quad (9)$$

Неравенство (9) обращается в равенство для некоторых натуральных $n, m \in \mathbb{N}$, наборов точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n, \{(y_p, z_p)\}_{p=1}^m \subset G \times \mathbb{C}^q$, $x \in G$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство

$$\sum_{k,p=1}^m z_k^* f(y_k - y_p) z_p \sum_{k=1}^n f(t - x - x_k) \xi_k = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m z_p^* f(y_p - x - x_k) \xi_k \sum_{p=1}^m f(t - y_p) z_p.$$

Если в (9) взять $m = n$ и $(y_k, z_k) = (x_k, \xi_k)$ при $k = 1, \dots, n$, то получим следующее следствие.

Следствие 4. Пусть G – группа и $f \in \Phi(G, M_q)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого набора точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n \subset G \times \mathbb{C}^q$, $x \in G$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k,p=1}^n \xi_k^* f(x_k + x - x_p) \xi_p \right| \leq \sum_{k,p=1}^n \xi_k^* f(x_k - x_p) \xi_p. \quad (10)$$

Неравенство (10) обращается в равенство для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^n \subset G \times \mathbb{C}^q$, $x \in G$, тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство

$$\sum_{k,p=1}^n \xi_k^* f(x_k - x_p) \xi_p \sum_{k=1}^n f(t - x - x_k) \xi_k = \sum_{k,p=1}^n \xi_p^* f(x_p + x - x_k) \xi_k \sum_{p=1}^n f(t - x_p) \xi_p.$$

Замечание 7. Неравенство (10) эквивалентно неравенству $|\psi(x)| \leq \psi(0)$, где

$$\psi(x) := \sum_{k,p=1}^n \xi_k^* f(x_k + x - x_p) \xi_p, \quad x \in G.$$

Так как $f \in \Phi(G, M_q)$, то $\psi \in \Phi(G)$ (см. предложение 6 при $m = q$ и $r = 1$). Поэтому неравенство $|\psi(x)| \leq \psi(0)$ обращается в равенство при некотором $x \in G$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство $\psi(0)\psi(x+t) = \psi(x)\psi(t)$.

Следствие 5. Пусть $f \in \Phi(\mathbb{R}^d, M_q)$ и $f(x) = 0 \in M_q$ для всех $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Пусть $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, $Y = \{y_p\}_{p=1}^\infty$ – две системы, каждая из которых состоит из счетного числа попарно различных точек из $\mathbb{Z}^d$. Тогда для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, и для любых наборов $\{\xi_k\}_{k=1}^n$, $\{z_p\}_{p=1}^m$ из $\mathbb{C}^q$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \xi_k^* f(x + x_k - y_p) z_p \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n \xi_k^* f(0) \xi_k \sum_{p=1}^m z_p^* f(0) z_p. \quad (11)$$

В частности, если $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, $Y = \{y_p\}_{p=1}^\infty$ – две системы, каждая из которых состоит из счетного числа попарно различных точек из $\mathbb{Z}$, то для любых $A \in \Phi M_q$, $n, m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, и для любых наборов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{\beta_p\}_{p=1}^m$ из $\mathbb{C}^q$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \frac{\sin(\pi x) \alpha_k^* A \beta_p}{x + x_k - y_p} \right|^2 \leq \pi^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k^* A \alpha_k \sum_{p=1}^m \beta_p^* A \beta_p. \quad (12)$$

Доказательство. Неравенство (11) очевидно вытекает из неравенства (9) для $G = \mathbb{R}^d$. Неравенство (12) получается из неравенства (11) при $d = 1$, если взять положительно определенную на $\mathbb{R}$ функцию $g(x) = \sin(\pi x)/x$, $\xi_k := (-1)^{x_k} \alpha_k$, $z_p := (-1)^{y_p} \beta_p$. Тогда (см. утверждение 4) $f(x) := g(x)A \in \Phi(\mathbb{R}, M_q)$ для любой матрицы $A \in \Phi M_q$. $\square$

Замечание 8. В работе [1, Замечание 5] показано, что из неравенства (12) при $q = 1$ и $X = \mathbb{Z}_+$, $Y = -\mathbb{Z}_+$, вытекает неравенство Ингама (см., например, [15] или [16, Дополнение 42]).

Из неравенства (6) при $n = 2$, $m = 1$, $(y_1, z_1) = (x, \xi) \in G \times \mathbb{C}^q$, и заменой ξ_2 на $-\xi_2$, сразу получается неравенство (13), которое при $q = 1$ и $\xi_1 = \xi_2 = \xi = 1$ является неравенством М.Г. Крейна для комплексно-значных ядер (см. [5, глава IV, § 4]). Для функций $f \in \Phi(G)$ неравенство (13) впервые появилось в 1940 году в работе М.Г. Крейна [17].

Следствие 6. Пусть $K \in \Phi(G \times G, M_q)$. Тогда для любых $(x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2), (x, \xi) \in G \times \mathbb{C}^q$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |\xi_1^* K(x_1, x) \xi - \xi_2^* K(x_2, x) \xi|^2 \leq \\ & \xi^* K(x, x) \xi \operatorname{Re} (\xi_1^* K(x_1, x_1) \xi_1 + \xi_2^* K(x_2, x_2) \xi_2 - 2\xi_1^* K(x_1, x_2) \xi_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Неравенство (13) обращается в равенство для некоторых $(x_1, \xi_1), (x_2, \xi_2), (x, \xi) \in G \times \mathbb{C}^q$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство

$$\xi^* K(x, x) \xi (K(t, x_1) \xi_1 - K(t, x_2) \xi_2) = (\xi^* K(x, x_1) \xi_1 - \xi^* K(x, x_2) \xi_2) K(t, x) \xi.$$

Применяя такие же рассуждения, как и перед теоремой 1, следствие 7 из [1] переписывается следующим образом.

Следствие 7. Пусть $K \in \Phi(G \times G, M_q)$. Тогда для любых $(x, \xi), (y, z), (u, v) \in G \times \mathbb{C}^q$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |v^* K(u, u) v \xi^* K(x, y) z - \xi^* K(x, u) v v^* K(u, y) z|^2 \leq \\ & (v^* K(u, u) v \xi^* K(x, x) \xi - |\xi^* K(x, u) v|^2) (v^* K(u, u) v z^* K(y, y) z - |v^* K(u, y) z|^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Неравенство (14) обращается в равенство для некоторых $(x, \xi), (y, z), (u, v) \in G \times \mathbb{C}^q$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in G$ выполняется равенство $A_1 B_1(t) = A_2 B_2(t)$, где

$$\begin{aligned} A_1 &:= z^* K(y, y) z v^* K(u, u) v - v^* K(u, y) z z^* K(y, u) v, \\ B_1(t) &:= v^* K(u, x) \xi K(t, u) v - v^* K(u, u) v K(t, x) \xi, \\ A_2 &:= z^* K(y, x) \xi v^* K(u, u) v - v^* K(u, x) \xi z^* K(y, u) v, \\ B_2(t) &:= v^* K(u, y) z K(t, u) v - v^* K(u, u) v K(t, y) z. \end{aligned}$$

Замечание 9. Если $K(x, y) = f(x - y)$, где $f \in \Phi(G)$, а G – группа, то неравенство (14) – это неравенство Вейля (см., например, [18, § 14]).

Таким же образом для ядер из $\Phi(G \times G, M_q)$ можно выписать следствие 8 и теорему 2 (неравенства типа неравенств Крейна-Горина) из [1], а потом записать эти неравенства для ядер из $\Phi(G, M_q)$, где G – группа (см. [1, Замечание 8]).

Теорема 2. Пусть $K \in \Phi(G \times G, M_q)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, для произвольных точек $\{(x_k, \xi_k)\}_{k=1}^{n+1} \subset G \times \mathbb{C}^q$, $(y, z) \in G \times \mathbb{C}^q$, и для любых чисел $\varepsilon_k, \eta_k \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon_k| \leq 1$, $|\eta_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n \xi_1^* K(x_1, y) z - \eta_1 \cdot \dots \cdot \eta_n \xi_{n+1}^* K(x_{n+1}, y) z \right| \leq \\ & \sum_{k=1}^n \sqrt{2 z^* K(y, y) z \operatorname{Re} \left(\frac{\xi_k^* K(x_k, x_k) \xi_k + \xi_{k+1}^* K(x_{k+1}, x_{k+1}) \xi_{k+1}}{2} - \varepsilon_k \overline{\eta_k} \xi_k^* K(x_k, x_{k+1}) \xi_{k+1} \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Замечание 10. Пусть G – абелева группа и $f \in \Phi(G, M_q)$. В теореме 2 берем $K(x, y) = f(x - y)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и для двух произвольных наборов точек $\{u_k\}_{k=1}^n$ и $\{v_k\}_{k=1}^n$ из G в неравенстве (15) берём $y = 0$ и $x_1 := u_1 + \dots + u_n$, $x_{k+1} := v_k - u_k + x_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $x_k - x_{k+1} = u_k - v_k$, $k = 1, \dots, n$, $x_{n+1} = v_1 + \dots + v_n$, и для любых точек $\{\xi_k\}_{k=1}^{n+1} \subset \mathbb{C}^q$, $z \in \mathbb{C}^q$, для любых чисел $\varepsilon_k, \eta_k \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon_k| \leq 1$, $|\eta_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n \xi_1^* f \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) z - \eta_1 \cdot \dots \cdot \eta_n \xi_{n+1}^* f \left(\sum_{k=1}^n v_k \right) z \right| \leq \\ & \sum_{k=1}^n \sqrt{2 z^* f(0) z \operatorname{Re} \left(\frac{\xi_k^* f(0) \xi_k + \xi_{k+1}^* f(0) \xi_{k+1}}{2} - \varepsilon_k \overline{\eta_k} \xi_k^* f(u_k - v_k) \xi_{k+1} \right)}. \end{aligned}$$

6. Положительно определенные операторнозначные ядра. Естественным обобщением положительно определенных матриц и матричнозначных ядер являются положительно определенные операторы и операторнозначные ядра. Пусть H_1, H_2 – два гильбертовых пространства над полем $\mathbb{C}$, а $L(H_1, H_2)$ – множество всех линейных непрерывных операторов $A : H_1 \rightarrow H_2$ и $L(H) := L(H, H)$. Отметим, что $L(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^m) = M_{m,r}$ и $L(\mathbb{C}^m) = M_m$. Для произвольного $A \in L(H_1, H_2)$ существует единственный сопряженный оператор $A^* \in L(H_2, H_1)$, такой что для всех $v \in H_1, u \in H_2$ выполняется равенство $(A^*u, v)_{H_1} = (u, Av)_{H_2}$.

Оператор $A \in L(H)$ называется положительно определенным, если $(Az, z)_H \geq 0$ для всех $z \in H$. Множество всех таких операторов обозначим символом $\Phi L(H)$. В частности, $\Phi L(\mathbb{C}^m) = \Phi M_m$. Оператор $A \in L(H)$ называется *строго положительно определенным*, если $(Az, z)_H > 0$ для всех $z \in H, z \neq 0$.

Пусть G – некоторое множество. Операторнозначная функция $K : G \times G \rightarrow L(H)$ называется положительно определенным операторнозначным ядром на $G \times G$ если неравенство

$$\sum_{l,k=1}^n (K(x_l, x_k)z_k, z_l)_H \geq 0 \quad (16)$$

выполняется для любых $n \in \mathbb{N}, z_1, \dots, z_n \in H$ и $x_1, \dots, x_n \in G$. Множество всех положительно определенных операторнозначных ядер $K : G \times G \rightarrow L(H)$ обозначим символом $\Phi(G \times G, L(H))$. Ядро $K \in \Phi(G \times G, L(H))$ называется *строго положительно определенным*, если неравенство (16) строгое при условии, что все точки $\{x_k\}_{k=1}^n$ попарно различны (т.е. $x_k \neq x_p$ при $k \neq p$) и не все $\{z_k\}_{k=1}^n$ равны нулю в H .

Пусть G – группа (не обязательно абелева) с групповой операцией $+$. Операторнозначная функция $f : G \rightarrow L(H)$ называется положительно определенной на G если функция $K(x, y) := f(x - y)$ является положительно определенным операторнозначным ядром на $G \times G$. Множество всех таких функций обозначим символом $\Phi(G, L(H))$.

Практически все замечания, предложения, теоремы и следствия, приведенные в параграфах 4 и 5 для матричнозначных ядер, справедливы и для операторнозначных ядер. Надо символы $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^r, M_{m,r}$ и M_m заменить соответственно на $H, H_1, L(H_1, H)$ и $L(H)$, а в параграфе 5 символы $\mathbb{C}^q$ и M_q заменить соответственно на H и $L(H)$. При этом выражение $\xi^* K(x, y)z$, где $K : G \times G \rightarrow L(H)$ и $\xi, z \in H$, мы для удобства не меняем и подразумеваем, что оно естественно равно величине $(K(x, y)z, \xi)_H$. Отметим, что предложения 3 (аналог теоремы Шура) и 5 не переносятся на операторнозначные ядра. Из утверждений в замечании 1 переносится только те, которые не связаны с комплексным сопряжением: $\overline{K}$, $\operatorname{Re} K$, $\overline{f}$ и $\operatorname{Re} f$. В замечании 4 не переносится последнее предложение, а текст E – *диагональная единичная матрица* $\operatorname{diag}(1, \dots, 1)$ надо заменить на E – *тождественный оператор*. И, наконец, в предложении 2 не переносится условие (3) (блочные матрицы). Остальные утверждения, приведенные в параграфах 4 и 5, полностью переносятся с указанными выше заменами. Запишем, например, следствие 5 для операторнозначных функций.

Следствие 5'. Пусть $f \in \Phi(\mathbb{R}^d, L(H))$ и $f(x) = 0 \in L(H)$ для всех $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Пусть $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty, Y = \{y_p\}_{p=1}^\infty$ – две системы, каждая из которых состоит из счетного числа попарно различных точек из $\mathbb{Z}^d$. Тогда для любых $n, m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^d$, и для любых наборов $\{\xi_k\}_{k=1}^n, \{z_p\}_{p=1}^m$ из H выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \xi_k^* f(x + x_k - y_p) z_p \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n \xi_k^* f(0) \xi_k \sum_{p=1}^m z_p^* f(0) z_p. \quad (17)$$

В частности, если $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, $Y = \{y_p\}_{p=1}^\infty$ – две системы, каждая из которых состоит из счетного числа попарно различных точек из $\mathbb{Z}$, то для любых $A \in \Phi L(H)$, $n, m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, и для любых наборов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{\beta_p\}_{p=1}^m$ из H выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \frac{\sin(\pi x) \alpha_k^* A \beta_p}{x + x_k - y_p} \right|^2 \leq \pi^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k^* A \alpha_k \sum_{p=1}^m \beta_p^* A \beta_p. \quad (18)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заставный В.П. Неравенства для положительно определенных функций / В.П. Заставный // Матем. Заметки. – 2020. – Т. 108, № 6. – С. 823–836. англ. пер. V. P. Zastavnyi, Inequalities for Positive Definite Functions, Math. Notes, 2020, Vol. 108, No. 6, pp. 791–801.
2. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions / Z. Sasvári. – Berlin: Akademie Verlag, 1994.
3. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / Z. Sasvári. – Berlin: De Gruyter, 2013. – 366 p.
4. Mlak W. Dilations of Hilbert space operators (General theory) / W. Mlak // Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne). Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyczny. – 1978. – CLIII.
5. Vahania N.N. Probability Distributions in Banach Spaces / N.N. Vahania, V.I. Tarieladze, S.A. Chobanian. – Moscow: Nauka, 1985.
6. Aronszajn N. Theory of reproducing kernels / N. Aronszajn // Trans. Amer. Math. Soc. – 1950. – V. 68, № 3. – P. 337–404. русск. пер. Ароншайн Н. Теория воспроизводящих ядер / Н. Ароншайн // Математика. – 1963. – Т. 7, № 2. – С. 67–130.
7. Porcu E. Characterization Theorems for Classes of Covariance Functions associated to Vector Valued or Componentwise Isotropic Scalar Valued Random Fields / E. Porcu, V.P. Zastavnyi // Journal of Multivariate Analysis. – 2011. – Vol. 102, № 9. – P. 1293–1301.
8. Menegatto V. A. Positive definiteness: from scalar to operator-valued kernels / V. A. Menegatto // Surveys in Mathematics and its Applications. – 2021. – V. 16. – P. 339–359.
9. Carmeli C. Vector valued reproducing kernel Hilbert spaces and universality / C. Carmeli, E. De Vito, A. Toigo, V. Umanità // <http://arxiv.org/abs/0807.1659.pdf>
10. Berg C. Harmonic Analysis on Semigroups: Theory of Positive Definite and Related Functions / C. Berg, J.P.R. Christensen, P. Ressel. – Berlin-New York: Springer, 1984. – 289 p.
11. Horn R.A. Matrix Analysis / R.A. Horn, C.R. Johnson. – Cambridge University Press, 1986.
12. Lancaster P. Theory of matrices / P. Lancaster. – New York-London: Academic Press, 1969.
13. Горин Е. А. Положительно определённые функции как инструмент математического анализа / Е. А. Горин // Фундамент. и прикл. матем. – 2012. – Т. 17, № 7. – С. 67–95.
14. Певный А. Б. Обобщения неравенств М. Г. Крейна, Е. А. Горина и Ю. В. Линника для положительно определенных функций на многоточечный случай / А. Б. Певный, С. М. Ситник // Сиб. электрон. матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 263–270.
15. Ingham A. E. A note on Hilbert's inequality / A. E. Ingham // Journ. London Math. Soc. – 1936. – V. 11, № 3. – P. 237–240.
16. Харди Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. – М.: Ин. Лит., 1948. – 456 с.
17. Крейн М. Г. Об одном кольце функций, определенных на топологической группе / М. Г. Крейн // Докл. АН СССР. – 1940. – Т. 29, № 4. – С. 275–280.
18. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения / А. Вейль. – М.: Ин. Лит., 1950. – 224 с.

Поступила в редакцию 01.07.2022 г.

INEQUALITIES FOR POSITIVE DEFINITE MATRIX-VALUED AND OPERATOR-VALUED KERNELS

V. P. Zastavnyi

For complex-valued positive definite kernels, the main inequality and a criterion for converting it to equality were obtained by the author in 2020. These results are used to obtain the main inequality and the corresponding

criterion for positive definite matrix-valued and operator-valued kernels. A consequence of the main inequality for such kernels are the Krein's and Weil's inequalities and the criterion for their conversion to equality, as well as inequalities of Krein–Gorin type and Ingham's inequality.

Keywords: positive definite matrix-valued and operator-valued kernels, Ingham's inequality, Krein's inequality, Weil's inequality, Gorin's inequality.

Заставный Виктор Петрович

доктор физико-математических наук, доцент
Донецкий национальный университет, г. Донецк
zastavn@rambler.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра математического анализа и дифференци-
альных уравнений

Zastavnyi Viktor Petrovych

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Associate
Professor, Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.1,51.8,519.66

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ПРИ ПОМОЩИ
ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

© 2022. А. Ю. Иванов, А.-В. В. Мельник

В статье обобщается авторский метод построения полумагических квадратов на случай матриц произвольного порядка не равного 6, а также распространяется на построение магических квадратов нечетного порядка.

Ключевые слова: Магический квадрат, полумагический квадрат, латинский квадрат, перестановка, магическое число.

Введение. История математики неотрывно связана с построениями различных умозрительных объектов, а затем всесторонним изучением их. Одним из классов подобных объектов являются матрицы, наделенные некоторыми специальными свойствами. Классическим магическим квадратом порядка n называют матрицу $n \times n$, заполненную целыми числами от 1 до n^2 так, что их суммы в каждой строке, столбце, а также по главной и побочной диагоналям равны некоторому числу, называемому магическим числом [1]. Нетрудно вычислить значение магического числа $\Sigma(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$ [2].

Наиболее древние артефакты, связанные с изображениями магических квадратов относят еще к третьему тысячелетию до н.э. [3], а первые известные исследования магических квадратов, выполненные европейским автором, связывают с именем Москопула — греческого ученого из Константинополя, около 1300г. н.э. [4]. Расцвет интереса к данной тематике и оформление его в стройную математическую теорию магических квадратов следует относить к XVI-XVIII векам. Более подробно с историей становления и развития данной теории можно познакомиться в труде К. Оллереншоу и Г. Бонди [3], а также в [5].

Следует отметить, что не взирая на тысячелетнюю историю развития теории магических квадратов, исследователям так и не удалось установить аналитическое соотношение, описывающее точное значение MSq(n) количества магических квадратов заданного порядка n . В таблице 1 приведены известные на настоящее время результаты о значении MSq(n) вплоть до шестого порядка.

Таблица

Число уникальных магических квадратов

n	MSq(n)	Автор и год
3	1	
4	880	Б. Френикл де Бюсси 1693 г. [6]
5	275 305 224	Р. Шроппель 1973 г. [7]
6	$1, 775399 \cdot 10^{19} \pm 0, 000042 \cdot 10^{19}$	К. Пинн и Ц.Вейцерковски 1998 г. [8]

Значение MSq(5) установлено при помощи полного перебора осуществленного вычислительными аппаратами, однако, в связи с вычислительными трудностями, даже этот метод не смог дать результатов для $n \geq 6$. Начиная с порядка $n = 6$ для вычисления

значения $MSq(n)$ использовались статистические методы, основанные на методе Монте Карло. На данный момент подобным образом получены значения вплоть до двадцатого порядка.

Важным направлением развития математической теории магических квадратов является конструирование алгоритмов построения магических квадратов заданного порядка. С широким набором подобных методов можно ознакомиться, например, в книге М. М. Постникова "Магические квадраты" [2] или Ю. В. Чебракова "Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ" [9]. При исследовании структуры построения магических квадратов часто возникает необходимость в рассмотрении схожего по свойствам объекта — полумагических квадратов. Матрица $n \times n$, заполненная целыми числами от 1 до n^2 так, что их суммы в каждой строке и столбце равны магическому числу $\Sigma(n)$ называется полумагическим квадратом [1].

Параллельно исследованиям в рамках теории магических квадратов шло развитие математической теории латинских квадратов. Впервые латинские квадраты (4-ого порядка) были опубликованы в 1200 г. н. э. [10]. Латинским квадратом порядка n называют матрицу $n \times n$ заполненную элементами множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$ так, что в каждой строке и каждом столбце все элементы различны.

Близкую связь между латинскими и магическими квадратами впервые заметил Л. Эйлер [11]. Данная зависимость выражена в методе Делайра (методе латинских квадратов) — одном из наиболее эффективных (в смысле количества конструируемых магических квадратов) алгоритме построения магических квадратов нечетного порядка [4].

В данной статье авторы распространяют алгоритм построения полумагических квадратов, введенный и обоснованный для квадратов нечетных порядков в [5], на случай квадратов произвольного порядка не равного 6, а также усовершенствуют данный алгоритм для построения магических квадратов произвольного нечетного порядка.

Вспомогательные обозначения и утверждения. Следуя за обозначениями и терминологией, введенными авторами в [5], сформулируем следующие используемые далее определения. Совокупность матриц $n \times n$, элементами которых являются числа от 1 до n^2 без повторов будем обозначать $M(n)$.

Определение 1. Матрицу $B_n = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$ такую, что $b_{i,j} = n(i-1) + j$, $i, j = \overline{1, n}$ будем называть базовой.

Определение 2. Множество $\alpha = \{b_{1,j_1}, b_{2,j_2}, \dots, b_{n,j_n}\}$ из n элементов базовой матрицы B_n , где $(j_1 j_2 \dots j_n)$ является перестановкой $(1 2 \dots n)$, будем называть подходящим набором.

Определение 3. Совокупность Ω из n подходящих наборов $\alpha_1 = \{b_{1,j_1^1}, b_{2,j_2^1}, \dots, b_{n,j_n^1}\}$, $\alpha_2 = \{b_{1,j_1^2}, b_{2,j_2^2}, \dots, b_{n,j_n^2}\}, \dots, \alpha_n = \{b_{1,j_1^n}, b_{2,j_2^n}, \dots, b_{n,j_n^n}\}$ называется покрывающей, если не существует элемента $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n , принадлежащего сразу двум различным подходящим наборам данной совокупности.

Определение 4. Две покрывающие совокупности Ω и Π называются совместимыми, если для каждой пары подходящих наборов $\alpha \in \Omega, \beta \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n такой, что $\alpha \cap \beta = b_{i,j}$.

Также потребуются обоснованные авторами в [5] следующие утверждения.

Лемма 1. Множество $\alpha = \{b_{j_1,1}, b_{j_2,2}, \dots, b_{j_n,n}\}$, состоящее из n элементов базовой матрицы B_n , где $(j_1 j_2 \dots j_n)$ — некоторая перестановка $(1 2 \dots n)$, является подходящим набором.

Лемма 2. Матрица $A \in M(n)$, каждая строка и каждый столбец которой состоит из элементов подходящих наборов базовой матрицы B_n , является полумагическим квадратом.

Для обоснования конструируемых ниже алгоритмов построения полумагических и магических квадратов потребуются некоторые факты математической теории латинских квадратов [4].

Определение 5. Два латинских квадрата $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ порядка n называются ортогональными латинскими квадратами, если все возможные упорядоченные пары $(l_{i,j}, t_{i,j})$ $i, j = \overline{1, n}$, образованные данными латинскими квадратами, различны.

Лемма 3. Для каждого натурального $n (n \neq 6) \geq 3$ существует пара ортогональных латинских квадратов порядка n .

Рассмотрим произвольный латинский квадрат $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ порядка n . Будем говорить, что совокупность наборов элементов базовой матрицы $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ соответствует латинскому квадрату L , если каждый набор α_k состоит из таких элементов $b_{i,j} \in B_n$, что $l_{i,j} = k - 1$.

Лемма 4. Каждый из наборов $\alpha_k, k = \overline{1, n}$ соответствующей латинскому квадрату $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ совокупности $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ является подходящим набором, а сама совокупность Ω является покрывающей совокупностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим набор α_k — он состоит из элементов $b_{i,j} \in B_n$ таких, что $l_{i,j} = k - 1$. В латинском квадрате $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$, согласно определению, в каждой строке есть ровно один элемент, равный $k - 1$. Обозначим столбец, в котором находится элемент, равный $k - 1$ в строке i , через j_i , таким образом, $l_{i,j_i} = k - 1, i = \overline{1, n}$. Значит, набор $\alpha_k = \{b_{1,j_1}, b_{2,j_2}, \dots, b_{n,j_n}\}$.

Покажем, что $j_p \neq j_q$ при $p \neq q$. Предположим, что существуют $p \neq q$ такие, что $j_p = j_q$, т.е. $l_{p,j_p} = l_{q,j_p} = k - 1$, но тогда в столбце j_p латинского квадрата L находится два элемента $k - 1$, что противоречит определению. Таким образом, $j_p \neq j_q$ для всех $p \neq q$. Значит, числа $j_1, j_2, \dots, j_n$ являются различными числами от 1 до n , следовательно, $(j_1 j_2 \dots j_n)$ образует перестановку $(1\ 2 \dots n)$.

Получили, что наборы $\alpha_k, k = \overline{1, n}$ удовлетворяют определению 2, а значит являются подходящими наборами.

Предположим, что существуют $p \neq q$ такие, что $\alpha_p \cap \alpha_q \neq \emptyset$. Пусть элемент базовой матрицы $b_{i,j} \in \alpha_p \cap \alpha_q$, тогда согласно конструкции построения наборов α_p и α_q получаем, что с одной стороны $l_{i,j} = p - 1$, а с другой $l_{i,j} = q - 1$, что невозможно при $p \neq q$. Значит для всех $p \neq q$ имеем $\alpha_p \cap \alpha_q = \emptyset$, что согласно определению 3 означает, что совокупность $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ является покрывающей совокупностью. $\square$

Лемма 5. Пусть $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ образуют пару ортогональных латинских квадратов, а $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ являются покрывающими совокупностями, которые соответствуют латинским квадратам L и T , соответственно. Тогда Ω и Π являются совместимыми покрывающими совокупностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют два элемента базовой матрицы $b_{i,j}, b_{r,s} \in B_n$ такие, что $b_{i,j}, b_{r,s} \in \alpha_p \cap \beta_q$ для некоторых p и q , тогда согласно конструкции построения наборов α_p и β_q получаем, что $l_{i,j} = l_{r,s} = p - 1$ и $t_{i,j} = t_{r,s} = q - 1$, но тогда латинские квадраты L и T образуют одну и ту же пару $(p - 1, q - 1)$ в ячейках с координатами (i, j) и (r, s) . Получили противоречие с тем, что L и T являются ортогональными латинскими квадратами.

Таким образом, для любых $p, q = \overline{1, n}$ в пересечении $\alpha_p \cap \beta_q$ содержится не более одного элемента. Покажем, что $\alpha_p \cap \beta_q \neq \emptyset$.

Так как L и T являются ортогональными латинскими квадратами, то среди образованных ими n^2 различных пар есть пара $(p-1, q-1)$. Обозначим ее координаты через (i, j) , т.е. $l_{i,j} = p-1, t_{i,j} = q-1$, значит $b_{i,j} \in \alpha_p$ и $b_{i,j} \in \beta_q$, что и требовалось показать.

Таким образом, показали, что для каждой пары подходящих наборов $\alpha_p \in \Omega$ и $\beta_q \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{i,j} \in B_n$ такой, что $\alpha_p \cap \beta_q = b_{i,j}$, что и означает, что Ω и Π являются совместимыми покрывающими совокупностями. $\square$

Алгоритмы построения полумагических и магических квадратов. Следующий ниже алгоритм позволяет строить полумагические квадраты произвольного порядка $n(\neq 6) \geq 3$ и является обобщением алгоритма сконструированного авторами в работе [5].

Алгоритм 1. Для построения матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$, являющейся полумагическим квадратом порядка $n(\neq 6) \geq 3$, достаточно выполнить следующую последовательность действий:

- (i) Построить две совместимые покрывающие совокупности Ω и Π .
- (ii) Пронумеровать подходящие наборы каждой из покрывающих совокупностей от 1 до n : $\alpha_i \in \Omega, i = \overline{1, n}, \beta_j \in \Pi, j = \overline{1, n}$.
- (iii) Взять две произвольные перестановки $(j_1 j_2 \dots j_n)$ и $(i_1 i_2 \dots i_n)$ набора $(1 2 \dots n)$ (для удобства их можно записать напротив строк и столбцов конструируемой матрицы).
- (iv) Заполнить ячейки конструируемой матрицы так, что каждый ее элемент $a_{t,p}$ определяется следующим соотношением: $a_{t,p} = \alpha_{i_t} \cap \beta_{j_p}$.

Доказательство справедливости данного алгоритма, т.е. установление факта, что он выполним и приводит к получению матрицы, являющейся полумагическим квадратом, практически идентично приведенному обоснованию в работе авторов [5] и отличается лишь установлением существования совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π для $n(\neq 6) \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем возможность выполнения каждого из пунктов алгоритма, а также, что построенная в результате его выполнения матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ удовлетворяет определению полумагического квадрата.

1) Возьмем два ортогональных латинских квадрата L и T , что возможно для всех натуральных $n \geq 3(\neq 6)$ согласно лемме 3. Построим соответствующие L и T покрывающие совокупности Ω и Π , тогда согласно лемме 5 Ω и Π являются совместимыми покрывающими совокупностями, что и требовалось показать.

2-3) Второй и третий пункты алгоритма, очевидно, выполнимы всегда.

4) Так как совокупности Ω и Π являются совместимыми покрывающими, то, согласно определению 4, для любых подходящих наборов $\alpha_{i_t} \in \Omega, \beta_{j_p} \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{i,j} = \alpha_{i_t} \cap \beta_{j_p}$. Присвоим его значение элементу $a_{t,p}$ искомой матрицы A . Выполнив данную процедуру для каждой пары подходящих наборов совокупностей Ω и Π , получим n^2 различных элементов базовой матрицы B_n , полностью заполняющих матрицу A . Таким образом, $A \in M(n)$.

Рассмотрим произвольную строку t полученной выше матрицы A . Все элементы данной строки находятся из соотношений $\alpha_{i_t} \cap \beta_{j_p}$. Отсюда следует, что каждый элемент

строки t матрицы A принадлежит подходящему набору α_{i_t} , при этом все они различны и всего их n . Значит, элементы строки t матрицы A образуют подходящий набор α_{i_t} . Отсюда следует, что строки матрицы A состоят из элементов подходящих наборов совокупности Ω . Аналогично получаем, что столбцы матрицы A состоят из элементов подходящих наборов совокупности Π . Тогда из леммы 2 непосредственно следует, что построенная выше матрица A является полумагическим квадратом. $\square$

Матрицы, конструируемые при помощи построенного выше алгоритма, вообще говоря, не становятся магическими квадратами, так как данный алгоритм никак не контролирует расположение элементов базовой матрицы на главной и побочной диагоналях. Таким образом, в случае распространения данной техники составления матриц до состояния конструирования магических квадратов будет необходимо модифицировать третий пункт алгоритма, заменив взятия двух произвольных перестановок на некоторый контролируемый выбор перестановок, обеспечивающий расположение таких элементов базовой матрицы на диагоналях конструируемого квадрата, что их суммы будут равны магическому числу $\Sigma(n)$. Нетрудно заметить, что для этого достаточно, чтоб на диагоналях находились подходящие наборы базовой матрицы B_n , для чего, по всей видимости, будет требоваться наличие одинаковых трансверсалей у совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π . Необходимость и достаточность данного условия является предметом текущих исследований авторов.

Следующее утверждение позволяет обойти необходимость наличия подходящих наборов на диагоналях магического квадрата нечетного порядка.

Утверждение 1. Пусть $n = 2k + 1$, где k — некоторое натуральное число, тогда для базовой матрицы B_n справедливо следующие соотношение: $\sum_{j=1}^{2k+1} b_{k+1,j} = \sum_{i=1}^{2k+1} b_{i,k+1} = \Sigma(n)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим центральную строку базовой матрицы B_n : $\sum_{j=1}^{2k+1} b_{k+1,j} = \sum_{j=1}^{2k+1} [(2k+1)(k+1-j) + j] = (2k+1)^2 k + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1) \times \times (2k^2 + k + k + 1) = (2k+1) \frac{4k^2 + 4k + 1}{2} = \{n = 2k+1\} = n \frac{n^2+1}{2} = \Sigma(n)$.

Рассмотрим центральный столбец базовой матрицы B_n : $\sum_{i=1}^{2k+1} b_{i,k+1} = \sum_{i=1}^{2k+1} [(2k+1)(i-1) + k+1] = (2k+1) \left[\frac{(2k+1)2k}{2} + k+1 \right] = (2k+1)[2k^2] + k + k + 1 = = \frac{2k+1}{2} [(2k+1)^2 + 1] = \{n = 2k+1\} = n \frac{n^2+1}{2} = \Sigma(n)$. $\square$

Таким образом, при построении магического квадрата нечетного порядка достаточно модифицировать пункт (iii) построенного выше алгоритма так, что взятые перестановки гарантируют наличие элементов центральных строки и столбца на диагоналях конструируемой матрицы.

Один из возможных вариантов составления подобных перестановок применим только для пары совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π базовой матрицы порядка $n = 2k + 1$ соответствующих ортогональным латинским квадратам $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ и обладающих следующим свойством: для всякого натурального $j \leq n$ и $j \neq k+1$ существуют натуральные $i, i', j' (\neq k+1) \leq n$ такие, что $l_{k+1,j} = l_{i,k+1}$, $l_{k+1,j'} = l_{i',k+1}$, $t_{k+1,j} = t_{i,k+1}$ и $t_{k+1,j'} = t_{i',k+1}$. В этом случае будем говорить, что совместимые покрывающие совокупности Ω и Π удовлетворяют условию **A**.

Фактически условие **A** означает, что образованное латинскими квадратами L и T множество упорядоченных пар $\{(l_{k+1,j}, t_{i,k+1}) | i, j (\neq k+1) = \overline{1, n}\}$ можно разбить на k непересекающихся подмножеств вида $\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\}$. Следует заметить, что хотя условие **A** существенно сужает возможность произвольного выбора пары

совместимых покрывающих совокупностей $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$, но каждый из подходящих наборов $\alpha_i, \beta_j, i, j = \overline{1, n}$ содержит в себе ровно по одному элементу из $k+1$ строки и $k+1$ столбца базовой матрицы B_n , за исключением пары наборов α_p, β_q таких, что $b_{k+1, k+1} \in \alpha_p \cap \beta_q$. Следующее утверждение гарантирует, что для любого нечетного $n \geq 3$ найдется пара совместимых покрывающих совокупностей, удовлетворяющих условию А.

Утверждение 2. Для каждого нечетного натурального $n \geq 3$ существует пара совместимых покрывающих совокупностей $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ удовлетворяющих условию А.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно построить пару ортогональных латинских квадратов таких, что для каждого натурального $j \leq n$ и $j \neq k+1$ существуют натуральные $i, i', j' (\neq k+1) \leq n$ такие, что $l_{k+1, j} = l_{i, k+1}$, $l_{k+1, j'} = l_{i', k+1}$, $t_{k+1, j} = t_{i, k+1}$ и $t_{k+1, j'} = t_{i', k+1}$.

Рассмотрим квадратные матрицы $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ порядка $n = 2k+1$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$l_{i,j} = j - 1 - k(i - 1) \pmod{2k+1}; \quad t_{i,j} = i - 1 - 2(j - 1) \pmod{2k+1}$$

Прежде всего покажем, что данные матрицы являются латинскими квадратами. Так как k и $2k+1$ являются взаимно простыми числами, то при любом фиксированном j выражение $k(i-1) \pmod{2k+1}$ пробегает полную систему вычетов по модулю $n = 2k+1$, а значит в каждом столбце матрицы L находятся все натуральные числа от 0 до $2k$. При любом фиксированном i выражение j также пробегает полную систему вычетов по модулю $n = 2k+1$, следовательно, каждая строка матрицы L содержит все натуральные числа от 0 до $2k$. Таким образом, матрица L является латинским квадратом. Аналогично учитывая, что 2 и $2k+1$ взаимно простые числа, получаем, что матрица T также является латинским квадратом.

Покажем, что латинские квадраты $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ образуют ортогональную пару. Предположим, что это не так, тогда существует пара различных ячеек с координатами (i, j) и (x, y) таких, что упорядоченные пары образованные в этих ячейках совпадают, т.е. $(l_{i,j}, t_{i,j}) = (l_{x,y}, t_{x,y})$. Данное равенство образует следующую систему сравнений:

$$\begin{cases} j - 1 - k(i - 1) \equiv y - 1 - k(x - 1) \pmod{2k+1} \\ i - 1 - 2(j - 1) \equiv x - 1 - 2(y - 1) \pmod{2k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j - y \equiv k(i - x) \pmod{2k+1} \\ i - x \equiv 2(j - y) \pmod{2k+1} \end{cases}$$

Значит $j - y \equiv 2k(j - y) \pmod{2k+1}$, откуда получаем $(2k-1)(j-y) \equiv 0 \pmod{2k+1}$, что учитывая, что числа $2k-1$ и $2k+1$ взаимно простые, означает равенство $j = y$, а значит и $i = x$. Таким образом, получили, что латинские квадраты L и T образуют различные упорядоченные пары $(l_{i,j}, t_{i,j})$ для всех $i, j = \overline{1, n}$, следовательно L и T являются ортогональными латинскими квадратами.

Зафиксируем произвольное $j (\neq k+1)$ и покажем, что существуют i, i', j' такие, что соотношения, требуемые в условии А, будут соблюдаться.

Заметим, что

$$l_{k+1, j} \equiv j - 1 - k^2 \pmod{2k+1}; \quad l_{i, k+1} \equiv k - k(i - 1) \pmod{2k+1};$$

$$t_{k+1,j} = k - 2(j-1) \pmod{2k+1}; \quad t_{i,k+1} = i - 1 - 2k \pmod{2k+1}$$

Тогда условие $l_{k+1,j} = l_{i,k+1}$ эквивалентно $j - 1 - k^2 \equiv k - k(i-1) \pmod{2k+1}$, откуда получаем $j \equiv 2k+1+k^2-ki \pmod{2k+1}$. Это означает, что в латинском квадрате L равные значения находятся в клетках с координатами $(i, k+1)$ и $(k+1, (k+1)^2 - ki)$.

Условие $t_{k+1,j'} = t_{i,k+1}$ эквивалентно $i - 1 - 2k \equiv k - 2(j'-1) \pmod{2k+1}$, следовательно, $2j' \equiv 3(k+1) - i \pmod{2k+1}$.

Условие $t_{k+1,j} = t_{i',k+1}$ учитывая, что $j \equiv 2k+1+k^2-ki \pmod{2k+1}$ эквивалентно $i' - 1 - 2k \equiv k - 2k^2 - 4k + 2ki \pmod{2k+1}$, откуда получаем $i' \equiv 1 - k - 2k^2 + 2ki \pmod{2k+1}$.

Проверим теперь выполняется ли последнее условие $l_{k+1,j'} = l_{i',k+1}$ при найденных значениях i, i', j' :

$$2l_{k+1,j'} = 2l_{i',k+1} \Leftrightarrow 2k - 2k(2ki - k - 2k^2) \equiv 3k + 1 - i - 2k^2 \pmod{2k+1} \Leftrightarrow$$

$$4k^3 + 4k^2 - k - 1 + i - 4k^2i = (k+1-i)(4k^2-1) = (k+1-i)(2k-1)(2k+1) \equiv 0 \pmod{2k+1}$$

Из справедливости последнего сравнения следует, что для каждого $j (\neq k+1)$ найдутся i, i', j' , при которых выполняются требуемые условия. Таким образом, соответствующие построенным латинским квадратам L и T совместимые покрывающие совокупности Ω и Π удовлетворяют условию **A**. □

Пусть $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ образуют пару ортогональных латинских квадратов, а $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ являются совместимыми покрывающими совокупностями, которые соответствуют латинским квадратам L и T , соответственно, причем Ω и Π удовлетворяют условию **A**. Пару перестановок $(i_1 i_2 \dots i_n)$ и $(j_1 j_2 \dots j_n)$ набора $(1 2 \dots n)$ будем называть **A-ассоциированной** парой перестановок к Ω и Π , если выполняются следующие условия:

- (i) $i_{k+1} = l_{k+1,k+1} + 1, j_{k+1} = t_{k+1,k+1} + 1$;
- (ii) для каждого натурального $p (\neq k+1) \leq n$ существуют $j, i, i', j' (\neq k+1) \leq n$ такие, что $i_p - 1 = l_{k+1,j} = l_{i,k+1}, i_{n+1-p} - 1 = l_{k+1,j'} = l_{i',k+1}, j_p - 1 = t_{k+1,j} = t_{i,k+1}$ и $j_{n+1-p} - 1 = t_{k+1,j'} = t_{i',k+1}$.

Нетрудно заметить, что для каждой пары совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π удовлетворяющих условию **A** существует $k!2^{2k} = (\frac{n-1}{2})! \cdot 2^{n-1}$ различных **A**-ассоциированных упорядоченных пар перестановок.

Сформулируем теперь алгоритм, который позволяет строить магические квадраты нечетного порядка за счет контроля расположения элементов на диагоналях получаемой матрицы.

Алгоритм 2. Для построения матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbf{M}(n)$, являющейся магическим квадратом нечетного порядка $n = 2k+1 \geq 3$, достаточно выполнить следующую последовательность действий:

- (i) Построить две совместимые покрывающие совокупности Ω и Π , удовлетворяющие условию **A**.
- (ii) Пронумеровать подходящие наборы каждой из покрывающих совокупностей от 1 до n : $\alpha_i \in \Omega, i = \overline{1, n}, \beta_j \in \Pi, j = \overline{1, n}$.

- (iii) Взять пару $\mathbf{A}$ -ассоциированных перестановок $(i_1 i_2 \dots i_n)$ и $(j_1 j_2 \dots j_n)$ к Ω и Π (для удобства их можно записать напротив строк и столбцов конструируемой матрицы).
- (iv) Заполнить ячейки конструируемой матрицы так, что каждый ее элемент $a_{t,p}$ определяется следующим соотношением: $a_{t,p} = \alpha_{i_t} \cap \beta_{j_p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Возможность построения двух совместимых покрывающих совокупностей удовлетворяющих условию $\mathbf{A}$ непосредственно следует из утверждения 2.

2) Данный пункт алгоритма выполним всегда.

3) Так как $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ удовлетворяют условию $\mathbf{A}$, то латинские квадраты $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$, которым соответствуют Ω и Π , являются ортогональной парой латинских квадратов и для каждого натурального $j \leq n$ и $j \neq k+1$ существуют натуральные $i, i', j' (\neq k+1) \leq n$ такие, что $l_{k+1,j} = l_{i,k+1}$, $l_{k+1,j'} = l_{i',k+1}$, $t_{k+1,j} = t_{i',k+1}$ и $t_{k+1,j'} = t_{i,k+1}$.

Рассмотрим пару перестановок $(i_1 i_2 \dots i_n)$ и $(j_1 j_2 \dots j_n)$ набора $(1 2 \dots n)$, определенных следующим образом:

$$(i) \quad i_{k+1} = l_{k+1,k+1} + 1, j_{k+1} = t_{k+1,k+1} + 1.$$

- (ii) для каждого натурального $p \leq k$ выполняются соотношения $i_p - 1 = l_{k+1,p} = l_{i,k+1}$, $i_{n+1-p} - 1 = l_{k+1,j'} = l_{i',k+1}$, $j_p - 1 = t_{k+1,p} = t_{i',k+1}$ и $j_{n+1-p} - 1 = t_{k+1,j'} = t_{i,k+1}$, где $i, i', j' (\neq k+1) \leq n$ существуют, так как Ω и Π удовлетворяют условию $\mathbf{A}$.

Таким образом, введенные выше перестановки являются $\mathbf{A}$ -ассоциированными перестановками к Ω и Π .

4) Возможность выполнения данного пункта непосредственно следует из определения 4 совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π .

Аналогично доказательству Алгоритма 1 получаем, что матрица A , удовлетворяющая условиям построения, является полумагическим квадратом. Покажем, что суммы элементов на диагоналях матрицы A равны $\Sigma(n)$.

Рассмотрим элемент $a_{p,p}$ сконструированной матрицы A . Согласно пункту (iv) условия построения получаем, что $a_{p,p} = \alpha_{i_p} \cap \beta_{j_p}$, тогда $a_{p,p} = b_{i,j}$ такому, что $l_{i,j} = i_p - 1$, $t_{i,j} = j_p - 1$. Но так как $(i_1 i_2 \dots i_n)$ и $(j_1 j_2 \dots j_n)$ являются $\mathbf{A}$ -ассоциированной парой перестановок к Ω и Π , то при $p = k+1$ получаем, что $i_p - 1 = l_{k+1,k+1}$, $j_p - 1 = t_{k+1,k+1}$, т.е. искомый элемент базовой матрицы $b_{i,j} = b_{k+1,k+1}$. А если $p \neq k+1$, то $i_p - 1 = l_{k+1,j'}$, $j_p - 1 = t_{k+1,j'}$, для некоторого j' , значит искомый элемент $b_{i,j} = b_{k+1,j'}$. Таким образом, элементы, находящиеся на главной диагонали матрицы A , являются элементами $k+1$ строки базовой матрицы, а учитывая, что все они различны и их ровно n , то согласно утверждению 1 их сумма равна $\Sigma(n)$. Из аналогичных соображений следует, что на побочной диагонали матрицы A находятся n различных элементов $k+1$ столбца базовой матрицы, а значит их сумма также равна $\Sigma(n)$.

Таким образом, показали, что матрица A , построенная согласно введенному выше алгоритму, является магическим квадратом. $\square$

Замечание 1. Найденная взаимосвязь между покрывающими совокупностями и латинскими квадратами позволила авторам использовать результаты математической теории латинских квадратов для усовершенствования и, как следствие, распространения алгоритма конструирования полумагических квадратов введенного в [5].

Замечание 2. Заметим, что построенный в данной работе алгоритм конструирования магических квадратов нечетного порядка в значительной мере опирается на результат утверждения 1 и требует использования искусственной конструкции условий **A**, позволяющей так упорядочить подходящие наборы, что на главной и побочной диагоналях гарантированно появляются элементы из центральных столбца и строки. Очевидно, что подобный подход не может работать для построения магических квадратов четного порядка ввиду отсутствия аналога утверждения 1. Тем не менее, текущие исследования авторов позволяют рассчитывать, что конструкцию алгоритма удастся распространить и на случай матриц четного порядка. Соблюдение же ограничений на сумму элементов, находящихся на диагоналях конструируемой матрицы, по видимому, удастся выполнить за счет существования двух общих трансверсалей у используемых в алгоритме совместимых покрывающих совокупностей.

Замечание 3. Говоря о количестве конструируемых полумагических квадратов при помощи построенного выше алгоритма следует отметить следующее:

- (i) Полумагический квадрат, построенный при помощи Алгоритма 1, не может быть построен при помощи двух различных пар совместимых покрывающих совокупностей. Таким образом, каждая пара совместимых покрывающих совокупностей порождает уникальный набор полумагических квадратов.
- (ii) Каждой покрывающей совокупности соответствует $n!$ различных латинских квадратов, так как нумерация подходящих наборов не существенна при составлении покрывающей совокупности.
- (iii) Каждой паре совместимых покрывающих совокупностей построенный алгоритм дает $\frac{(n!)^2}{4}$ различных полумагических квадратов (учитывая произвольность перестановок из пункта (iii) Алгоритма 1, а также повороты и отражения).

Таким образом, обозначив количество пар ортогональных латинских квадратов порядка n через $OLSq(n)$, получаем, что общее количество конструируемых полумагических квадратов порядка n при помощи Алгоритма 1 равно $\frac{(n!)^2}{4(n!)^2} \cdot OLSq(n) = \frac{OLSq(n)}{4}$.

Примеры применения алгоритмов к построению полумагических и магических квадратов. В данном параграфе будут проиллюстрированы в действии разработанные в статье алгоритмы построения магических и полумагических квадратов. Рассмотрим Алгоритм 1. Для выбора пары совместимых покрывающих совокупностей возьмем два ортогональных латинских квадрата L_{10} и T_{10} порядка 10, построенных Е. Т. Паркером в работе [12], поставившей точку в вопросе о существовании пар ортогональных латинских квадратов заданного порядка n .

На рисунке 1 приведена базовая матрица B_{10} , а на рисунке 2 — пара ортогональных латинских квадрата L_{10} и T_{10} .

Согласно определению соответствия латинских квадратов L_{10} и T_{10} и покрывающих совокупностей Ω_{10} и Π_{10} , сопоставляя рисунки 1–2, получаем следующий список подходящих наборов:

$\Omega_{10}: \alpha_1 = \{1, 19, 30, 35, 48, 53, 62, 77, 86, 94\}, \alpha_2 = \{3, 12, 29, 40, 46, 58, 64, 71, 87, 95\},$
 $\alpha_3 = \{5, 14, 23, 39, 50, 57, 68, 72, 81, 96\}, \alpha_4 = \{8, 16, 25, 34, 49, 60, 61, 73, 82, 97\},$
 $\alpha_5 = \{2, 18, 27, 36, 45, 59, 70, 74, 83, 91\}, \alpha_6 = \{10, 13, 28, 31, 47, 56, 69, 75, 84, 92\},$
 $\alpha_7 = \{9, 20, 24, 38, 42, 51, 67, 76, 85, 93\}, \alpha_8 = \{4, 15, 26, 37, 41, 52, 63, 78, 90, 99\},$
 $\alpha_9 = \{7, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 79, 88, 100\}$ и $\alpha_{10} = \{6, 17, 21, 32, 43, 54, 65, 80, 89, 98\}.$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 1. базовая матрица B_{10}

0	4	1	7	2	9	8	3	6	5
8	1	5	2	7	3	9	4	0	6
9	8	2	6	3	7	4	5	1	0
5	9	8	3	0	4	7	6	2	1
7	6	9	8	4	1	5	0	3	2
6	7	0	9	8	5	2	1	4	3
3	0	7	1	9	8	6	2	5	4
1	2	3	4	5	6	0	7	8	9
2	3	4	5	6	0	1	8	9	7
4	5	6	0	1	2	3	9	7	8

Рис. 2. Пара ортогональных латинских квадратов L_{10} и T_{10}

Π_{10} : $\beta_1 = \{1, 15, 22, 38, 43, 60, 69, 74, 87, 96\}$, $\beta_2 = \{9, 12, 26, 33, 48, 54, 70, 75, 81, 97\}$,
 $\beta_3 = \{10, 19, 23, 37, 44, 58, 65, 76, 82, 91\}$, $\beta_4 = \{6, 20, 29, 34, 41, 55, 68, 77, 83, 92\}$,
 $\beta_5 = \{8, 17, 30, 39, 45, 52, 66, 71, 84, 93\}$, $\beta_6 = \{7, 18, 21, 40, 49, 56, 63, 72, 85, 94\}$,
 $\beta_7 = \{4, 11, 28, 32, 50, 59, 67, 73, 86, 95\}$, $\beta_8 = \{2, 13, 24, 35, 46, 57, 61, 78, 89, 100\}$,
 $\beta_9 = \{3, 14, 25, 36, 47, 51, 62, 79, 90, 98\}$ и $\beta_{10} = \{5, 16, 27, 31, 42, 53, 64, 80, 88, 99\}$.

Как было отмечено выше, совместимые покрывающие совокупности Ω_{10} и Π_{10} порождают $\frac{(10!)^2}{4}$ уникальных магических квадрата. На рисунке 3 приведен пример полумагического квадрата, образованного Ω_{10} и Π_{10} упорядоченных с помощью перестановок $(1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 10\ 8\ 6\ 4\ 2)$ и $(2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 9\ 7\ 5\ 3\ 1)$, согласно пункта (iii) Алгоритма 1.

Для иллюстрации действия Алгоритма 2 нам необходимо построить пару совместимых покрывающих совокупностей, удовлетворяющих условию А. Для этого применим технику, разработанную при доказательстве утверждения 2.

Пусть $n = 7$, тогда элементы пары необходимых ортогональных латинских квадратов $L_7 = (l_{i,j})_{i,j=1}^7$ и $T_7 = (t_{i,j})_{i,j=1}^7$ можно определить следующими соотношениями:

$$l_{i,j} = j - 1 - 3(i - 1) \pmod{7}; \quad t_{i,j} = i - 1 - 2(j - 1) \pmod{7}$$

На рисунке 4 изображены составленные соответствующим образом латинские квадраты, а на рисунке 5 приведена базовая матрица B_7 .

Аналогично предыдущему примеру, сопоставляя рисунки 4–5, получаем следующий список подходящих наборов покрывающих совокупностей Ω_7 и Π_7 :

Ω_7 : $\alpha_1 = \{1, 11, 21, 24, 34, 37, 47\}$, $\alpha_2 = \{2, 12, 15, 25, 35, 38, 48\}$, $\alpha_3 = \{3, 13, 16, 26, 29, 39, 49\}$, $\alpha_4 = \{4, 14, 17, 27, 30, 40, 43\}$, $\alpha_5 = \{5, 8, 18, 28, 31, 41, 44\}$, $\alpha_6 = \{6, 9, 19, 22, 32, 42, 45\}$ и $\alpha_7 = \{7, 10, 20, 23, 33, 36, 46\}$.

Π_7 : $\beta_1 = \{1, 12, 16, 27, 31, 42, 46\}$, $\beta_2 = \{4, 8, 19, 23, 34, 38, 49\}$, $\beta_3 = \{7, 11, 15, 26, 30, 41, 45\}$, $\beta_4 = \{3, 14, 18, 22, 33, 37, 48\}$, $\beta_5 = \{6, 10, 21, 25, 29, 40, 44\}$, $\beta_6 = \{2, 13, 17, 28, 32, 36, 47\}$ и $\beta_7 = \{5, 9, 20, 24, 35, 39, 43\}$.

	1	3	5	7	9	10	8	6	4	2
2	48	81	70	9	33	54	26	75	97	12
4	77	68	83	20	55	6	41	92	34	29
6	94	72	18	85	7	21	63	56	49	40
8	35	57	2	24	100	89	78	13	61	46
10	53	5	27	42	88	80	99	31	16	64
9	62	14	36	51	79	98	90	47	25	3
7	86	50	59	67	11	32	4	28	73	95
5	30	39	45	93	66	17	52	84	8	71
3	19	23	91	76	44	65	37	10	82	58
1	1	96	74	38	22	43	15	69	60	87

Рис. 3. Полумагический квадрат

0	1	2	3	4	5	6
4	5	6	0	1	2	3
1	2	3	4	5	6	0
5	6	0	1	2	3	4
2	3	4	5	6	0	1
6	0	1	2	3	4	5
3	4	5	6	0	1	2

Рис. 4. Пара ортогональных латинских квадратов L_7 и T_7

0	5	3	1	6	4	2
1	6	4	2	0	5	3
2	0	5	3	1	6	4
3	1	6	4	2	0	5
4	2	0	5	3	1	6
5	3	1	6	4	2	0
6	4	2	0	5	3	1

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Рис. 5. Базовая матрица B_7

Для построения **A-ассоциированных** перестановок $(i_1 i_2 \dots i_n)$ и $(j_1 j_2 \dots j_n)$ отметим следующие четверки связанных латинскими квадратами L_7 и T_7 элементов центральных строки и столбца базовой матрицы:

$\{4, 23, 27, 46\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_4, \alpha_7, \beta_1, \beta_2$;

$\{11, 24, 26, 39\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_1, \alpha_3, \beta_3, \beta_7$;

$\{18, 22, 28, 32\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_5, \alpha_6, \beta_4, \beta_6$.

Учитывая полученные сведения составим пару **A-ассоциированных** перестановок $(i_1 i_2 \dots i_n) = (4\ 3\ 6\ 2\ 5\ 1\ 7)$ и $(j_1 j_2 \dots j_n) = (2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 1)$.

Полученный магический квадрат в результате действий Алгоритма 2 представлен на рисунке 6.

	4	3	6	2	5	1	7
2	4	49	19	38	8	34	23
3	30	26	45	15	41	11	7
4	14	3	22	48	18	37	33
5	40	29	6	25	44	21	10
6	17	13	32	2	28	47	36
7	43	39	9	35	5	24	20
1	27	16	42	12	31	1	46

Рис. 6. Магический квадрат

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гутерман А. Э. Алгебра полумагических матриц и ее длина/ А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, С. Д. Сочнев// Зап.научн.сем.ПОМИ. – 2013 – Т. 419 – С. 52–76
2. Постников М. М. Магические квадраты/ М. М. Постников. – Москва: издательство "Наука математическая библиотечка, 1964 – 84 с.
3. Ollerenshaw K. Magic Squares of Order Four/ K. Ollerenshaw, H. Bondi// Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Mathematical and Physical Sciences. Royal Society – 1982 – V. 306 № 1495 – pp. 443–532
4. Keedwell A. D. Latin squares and their applications / A. D. Keedwell, J. Dénes// Elsevier, Second edition – 2015 – 424 p.
5. Иванов А. Ю. О построении магических квадратов/ А. Ю. Иванов, А. -В. В. Мельник // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020 – № 2. – С. 61–67.
6. B. F. de Bessey. Des quarrés ou tables magiques/ Bernard Frenicle de Bessey. – Imp.Royale, 1693.
7. Gardner M. Mathematical Games/ M. Gardner// Scientific American – January 1976 – V. 234 – p. 118–122
8. Pinn K. Number of magic squares from paralel tempering Monte Carlo/ K. Pinn, C. Wiczerkowski// International Journal of Modern Physics C. – 1998 – V. 09№ 04 – p. 541–546
9. Чебраков Ю. В. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ/ Ю. В. Чебраков// СПб: СПбГТУ, 1995 – 388 с.
10. Малых А. Е. Об историческом процессе развития теории латинских квадратов и некоторых их приложениях./ А. Е. Малых, В. И. Данилова// Вестник Пермского Университета – 2010 - в. 4 (4)– с. 95-104.
11. Euler L. Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques./ L. Euler // Verh. v.h. Zeeuwsch Genootsch. der Wetensch., Vlissingen – 1782 – V. 9 – p. 85–239.

12. Parker E. T. Orthogonal latin squares./ E. T. Parker // Proc. Nat. Acad. Sci. USA 45– 1960 – V. 21 № 3344 – p. 859–862.

Поступила в редакцию 25.08.2022 г.

FEATURES OF CONSTRUCTING MAGIC SQUARES USING LATIN SQUARES

A. Yu. Ivanov, A.-V. V. Melnik

The article generalizes the author's method of constructing semimagic squares for the case of matrices of an arbitrary order not equal to 6, and also extends to the construction of odd order magic squares.

Keywords: Magic square, semi-magic square, latin square, permutation, magic constant.

Иванов Александр Юрьевич

кандидат физико-математических наук
Донецкий национальный университет, г. Донецк,
ДНР

Ivanov.Alexander.Iurievich@gmail.com

83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра математического анализа и дифференци-
альных уравнений

Мельник Анна-Валентина Валентиновна

кандидат технических наук
Донецкий национальный университет, г. Донецк,
ДНР

Anna-Valentina@yandex.ru

83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра прикладной механики и компьютерных тех-
нологий

Ivanov Alexandr Jurievich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National University,
Donetsk, DPR

Melnik Anna-Valentina Valentinovna

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.983.36

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ С ЕДИНСТВЕННЫМ КРАТНЫМ ВЕЩЕСТВЕННЫМ НУЛЕМ

© 2022. *Д. В. Лиманский*

Рассматривается линейное пространство минимальных дифференциальных полиномов от двух переменных, подчиненных в $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ -норме тензорному произведению двух обыкновенных дифференциальных операторов, символы которых обладают свойством: все их нули вещественны и лишь один из них кратный. Доказано, что размерность указанного пространства равна двум, т. е. является минимально возможной.

Ключевые слова: априорная оценка, дифференциальный полином, тензорное произведение, многоугольник Ньютона.

§ 1. Введение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Рассматривается задача об описании линейного пространства $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P)$ минимальных дифференциальных операторов $Q(D)$, подчиненных данному дифференциальному полиному $P(D)$ в $L^p(\Omega)$ -норме, т. е. пространство операторов $Q(D)$, удовлетворяющих априорной оценке

$$\|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1\|P(D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\overline{\Omega}), \quad (1)$$

с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от выбора f .

Легко видеть, что пространство $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P)$ конечномерно. Это вытекает из того, что степень многочлена $Q(\xi)$ не превышает степени многочлена $P(\xi)$; в противном случае оценка (1) легко приводится к противоречию (см. [1, 2]). Отметим, что пространство $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P)$ минимально в том и только в том случае, когда оно является линейной оболочкой оператора $P(D)$ и тождественного оператора I .

Задача об описании пространства $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P)$ была исчерпывающе решена Л. Хёрмандером [3] в случае $p = 2$ и ограниченной области Ω . Применяя этот критерий, Хёрмандер доказал, что для *тензорного произведения* $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$ двух дифференциальных операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$, действующих по различным группам переменных, т. е. для оператора вида

$$P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D) := P_1(D_1, \dots, D_{p_1}, 0, \dots, 0) P_2(0, \dots, 0, D_{p_1+1}, \dots, D_n), \quad (3)$$

пространство $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P)$ совпадает с линейной оболочкой произведений операторов из $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P_k)$, $k = 1, 2$, т. е. равно тензорному произведению этих линейных пространств, $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P) = \mathcal{L}_{2,\Omega}(P_1) \otimes \mathcal{L}_{2,\Omega}(P_2)$.

Пусть теперь $p = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{L}_{\infty,\mathbb{R}^n}(P)$ будем далее обозначать $\mathcal{L}(P)$. Из результатов М. М. Маламуда [4] и де Лю и Миркила [5] (см. также [6]) вытекает, что для эллиптического оператора $P(D)$ порядка l базис пространства $\mathcal{L}(P)$ образуют $P(D)$ и дифференциальные мономы $\{D^\alpha\}_{|\alpha| < l}$.

Будем называть полином $P(\xi)$ *невыврожденным*, если он не имеет вещественных нулей, т. е. $P(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. В связи с вышеприведенным результатом Хёрмандера возникает задача об описании пространства $\mathcal{L}(P)$ для операторов вида $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$.

В [6] автором и М. М. Маламудом получено утверждение для эллиптических операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$, полные символы $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ которых невырождены. В этом случае пространство $\mathcal{L}(P)$ будет таким же, как и у Хёрмандера, т. е. $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(P_1) \otimes \mathcal{L}(P_2)$. Но в случае, если сомножители эллиптичны и однородны, размерность пространства $\mathcal{L}(P)$ минимальна, т. е. $\dim \mathcal{L}(P) = 2$, хотя размерность каждого из пространств $\mathcal{L}(P_1)$ и $\mathcal{L}(P_2)$ максимально возможная [7].

Далее будем рассматривать случай $n = 2$, т. е. тензорного произведения двух обыкновенных дифференциальных полиномов:

$$P(D_1, D_2) := p_1(D_1) \otimes p_2(D_2). \quad (2)$$

В работе автора [8] было получено описание пространства $\mathcal{L}(P)$ для случая, когда символ первого сомножителя $p_1(\xi_1)$ имеет специальный вид (все его нули вещественные и простые). Оказалось, что в этом случае размерность пространства $\mathcal{L}(P)$ тем меньше, чем больше вещественных нулей (с учетом их кратности) имеет символ второго сомножителя $p_2(\xi_2)$. В частности, было доказано, что $\dim \mathcal{L}(P)$ максимальна, когда полином $p_2(\xi_2)$ невырожден, и минимальна, если все нули полинома $p_2(\xi_2)$ вещественны. Продолжая исследования из [8], в работе [9] пространство $\mathcal{L}(P)$ было описано еще для ряда случаев: например, когда символ $p_1(\xi_1)$ первого сомножителя — дифференциальный моном, а символ второго сомножителя $p_2(\xi_2)$ невырожден. Далее, в работе автора [10] пространство $\mathcal{L}(P)$ описано для дифференциальных полиномов $P(D)$ вида (2), символы которых не имеют кратных вещественных нулей.

Наиболее трудным, по-видимому, является тот случай, когда символы обоих сомножителей $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi_2)$ в (2) содержат *кратные вещественные нули*. Примеры такого тензорного произведения разобраны в работах автора [9] и [11]: там $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi_2)$ являются конкретными полиномами четвертого-пятого порядков, все нули которых вещественны, и среди них есть кратные.

Основным результатом настоящей работы является следующий. Рассматривается случай, когда нули каждого из символов-сомножителей вещественные, причем среди них ровно один нуль произвольной кратности, а остальные — простые. Оказалось, что в этом случае размерность пространства $\mathcal{L}(P)$ минимальна, т. е. $\dim \mathcal{L}(P) = 2$ (теорема 3). По-видимому, тот же ответ справедлив и в общем случае (когда кратных вещественных нулей произвольное количество), но доказать этого пока не удалось. Отметим, что доказательство теоремы 3 опирается на весь спектр известных методов — от алгебро-аналитических (разложение полиномов по степеням одночлена, использование свойств преобразования Фурье и мультипликаторов и т. д.) до геометрических (теорема Бомана [1] и ее обобщения для многогранника Ньютона системы полиномов [12]). Автор полагает, что такое соединение всех известных подходов к изучению априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ является ключом для поиска решения обсуждаемой задачи и в общем виде.

§ 2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, пусть $|x| := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$ и $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Через $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ будет обозначаться алгебра мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$; через $\hat{f}(\hat{\mu})$ — преобразование Фурье (Фурье – Стильеса) функции f (ме-

ры μ). Через $C^\infty(\Omega)$ обозначается множество функций, бесконечно дифференцируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а через $C_0^\infty(\Omega)$ — его подмножество функций, финитных в Ω .

Через $\deg P$ будет обозначаться степень полинома $P(\xi)$, через $\deg_{\xi_k} P$ — его степень по переменной ξ_k . Через $\|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ обозначим $n \times n$ -матрицу с элементами a_{jk} , через $\det \|a_{jk}\|$ — ее определитель. Для чисел $m_1, \dots, m_n$ их определитель Вандермонда будет обозначаться через $V(m_1, \dots, m_n)$.

Наконец, обозначим через $\text{ch } \mathcal{K}$ выпуклую оболочку множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, а через $\mathcal{N}(P)$ — многогранник Ньютона (м. Н.) полинома $P(\xi)$.

2.1. Мультипликаторы и априорные оценки.

Определение 1. [13] Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} := \mathcal{F}f$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки $f \rightarrow T_\Phi f :=: \mathcal{F}^{-1}\Phi\mathcal{F}f$ отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, финитные функции являются мультипликаторами, т. е. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_p$, $p \in [1, \infty]$. Известно полное описание алгебры $\mathcal{M}_p$ при $p = 1, 2, \infty$. Нас интересует описание алгебры $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ или просто $\mathcal{M}$ (если не возникает неопределенности, о пространстве какой размерности идет речь).

Предложение 1. [13] Алгебра $\mathcal{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье — Стильеса:

$$\Phi \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty \iff \Phi(\xi) = \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \quad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \quad (3)$$

Следствие 1. [10, 13] 1. Функции из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ограничены и равномерно непрерывны в $\mathbb{R}^n$.

2. Алгебра мультипликаторов $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ инвариантна относительно отражений $\Phi(x) \mapsto \Phi(-x)$, сдвигов $\Phi(x) \mapsto \Phi(x - h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ и растяжений $\Phi(x) \mapsto \Phi(rx)$, $r > 0$.

3. Справедливо включение $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ при $m < n$.

Априорные оценки и мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ связаны следующим образом.

Теорема 1 (де Лю и Миркила). [5] Пусть $Q(D)$ и $P(D)$ — дифференциальные полиномы, $D = (D_1, \dots, D_n)$. Тогда априорная оценка

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (4)$$

справедлива тогда и только тогда, когда существуют мультипликаторы $M(\cdot), N(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ такие, что выполняется тождество

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Предложение 2. [9] Пусть $Q \in \mathcal{L}(P)$. Если $\deg_{\xi_1} P = l$, $\deg_{\xi_2} P = m$ и старшие коэффициенты и полинома $P(\xi)$ по переменным ξ_2 и ξ_1 соответственно имеют лишь вещественные нули, то

$$Q(\xi) = c_0 P(\xi) + \tilde{Q}(\xi), \quad (6)$$

где $c_0 \in \mathbb{C}$ — некоторое число, а $\deg_{\xi_1} \tilde{Q} < l$, $\deg_{\xi_2} \tilde{Q} < m$.

Следующее утверждение доказано в работе [10], хотя и не сформулировано там явно. Приведем его здесь без доказательства.

Лемма 1. [10] Пусть символ оператора $P(D) = P(D_1, D_2)$ имеет вещественные нули $\xi_1 = \alpha_j, j = \overline{1, p}$ и $\xi_2 = \beta_k, k = \overline{1, q}, (\alpha_j \neq \alpha_k \text{ и } \beta_j \neq \beta_k \text{ при } j \neq k), \text{ т. е.}$

$$P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_1 - \alpha_p)(\xi_2 - \beta_1) \dots (\xi_2 - \beta_q) \tilde{P}(\xi), \quad (7)$$

где $\tilde{P}(\xi)$ — многочлен.

Если оператор $Q(D)$ таков, что $Q \in \mathcal{L}(P)$, то его символ $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_1 - \alpha_p)(\xi_2 - \beta_1) \dots (\xi_2 - \beta_q) \tilde{Q}(\xi) + c, \quad (8)$$

где $\tilde{Q}(\xi)$ — многочлен, c — константа.

2.2. Многоугольник Ньютона, теорема Бомана и ее обобщения.

Определение 2. [14] Пусть $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что выпуклой оболочкой $\text{ch } \mathcal{K}$ множества $\mathcal{K}$ называется наименьшее выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее $\mathcal{K}$ (т. е. пересечение всех выпуклых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, содержащих $\mathcal{K}$).

В случае, если множество $\mathcal{K}$ конечно, $\mathcal{K} = \{v_j\}_{j=1}^m$, его выпуклая оболочка $\text{ch } \mathcal{K}$ совпадает с множеством всевозможных выпуклых комбинаций точек $\{v_j\}_{j=1}^m$:

$$v = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Если точки $\{v_j\}_{j=1}^m$ линейно независимы, множество $\text{ch } \mathcal{K}$ представляет собой замкнутый многогранник с вершинами в этих точках.

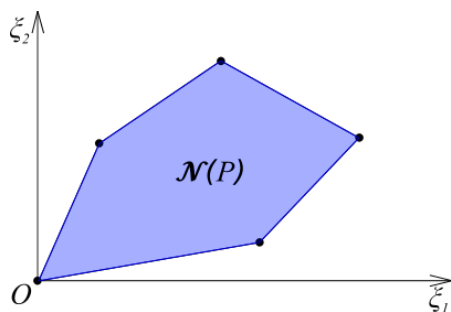


Рис. 1

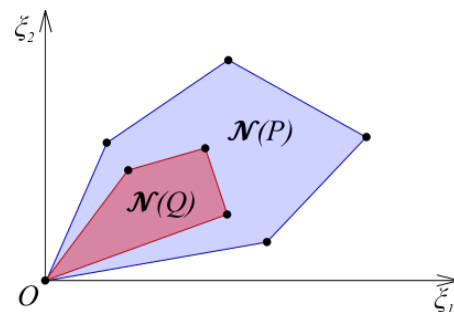


Рис. 2

Определение 3. [12, 15] Пусть $\mathcal{A}$ — конечное подмножество в $\mathbb{Z}_+^n$. Многогранником Ньютона (в случае $n = 2$ — многоугольником Ньютона) полинома $P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha \xi^\alpha$ будем называть выпуклую оболочку объединения множества $\mathcal{A}$ и начала координат $0 = (0, \dots, 0)$ и обозначать ее через $\mathcal{N}(P) := \text{ch}[\mathcal{A} \cup \{0\}]$.

Пример многоугольника Ньютона (м. Н.) на плоскости приведен на рис. 1.

Теорема 2. [9, 12] Если для дифференциальных полиномов $Q(D)$ и $P(D)$ справедлива априорная оценка (4), то для соответствующих многогранников Ньютона справедливо включение $\mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(P)$ (см. рис. 2).

2.3. Алгебраические свойства многоугольника Ньютона.

Определение 4. [16] Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$. Напомним, что определителем Вандермонда называется определитель вида

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) := \det \|\alpha_i^{j-1}\|_{i,j=1}^p = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{p-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_p & \alpha_p^2 & \dots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix}.$$

Из курса алгебры известно, что $V(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq 0$ тогда и только тогда, когда числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ попарно различны. Более того, известно, что определитель Вандермонда равен $V(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)$, где произведение взято по всевозможным парам различных индексов (i, j) (см. [16]).

Лемма 2. Пусть $r \geq p$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ — попарно различные ненулевые вещественные числа и $x_0, x_1, \dots, x_r$ — решение линейной системы уравнений

[illegible]

Тогда если для некоторого $i_0 \in \{0, \dots, r\}$ выполнено $x_{i_0} \neq 0$ и $x_i = 0$ при всех $i < i_0$ (если такие значения индекса существуют), то $i_0 + p \leq r$, и среди чисел $x_{i_0+p}, \dots, x_r$ также есть ненулевые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $k \in \{1, \dots, p\}$ сократим k -е уравнение системы (9) на $\alpha_k^{i_0} \neq 0$. Получим новую систему

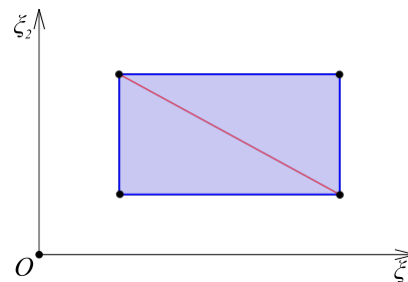
[illegible]

Покажем сначала, что $i_0 + p \leq r$. Пусть выполнено противное, т. е. $i_0 + p > r$. Тогда в системе (10) уравнений не меньше, чем переменных, $p \geq r - i_0 + 1$. Но уже часть этой системы, состоящая из первых $r - i_0 + 1$ уравнений, имеет только нулевое решение, поскольку ее определитель $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-i_0+1}) \neq 0$. А это противоречит предположению, что $x_{i_0} \neq 0$.

Теперь покажем, что среди чисел $x_{i_0+p}, \dots, x_r$ есть ненулевые. Пусть это не так, т. е. $x_i = 0$ при $j = i_0 + p, \dots, r$. Подставляя эти значения в систему (10), получим

[illegible]

Определитель системы (11) совпадает с определителем Вандермонда $V(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ и поэтому отличен от нуля. Значит, система (11) снова имеет только нулевое решение, что противоречит условию $x_{i_0} \neq 0$. $\square$



Предложение 3. Многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(Q)$ полинома $Q(\xi)$ вида

где $\widehat{Q}(\xi)$ — некоторый ненулевой полином, $\{\alpha_j\}_1^p$ и $\{\beta_j\}_1^q$ — ненулевые вещественные числа, различные внутри каждого из наборов (т. е. $\alpha_j \neq \alpha_k \neq 0$ и $\beta_j \neq \beta_k \neq 0$ при $j \neq k$), содержит главную диагональ целочисленного прямоугольника размера $p \times q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия вытекает, что полином $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s a_{ij} \xi_1^i \xi_2^j, \quad \text{где } r \geq p, \quad s \geq q. \quad (13)$$

В силу (12) и (13), для каждого $k \in \{1, \dots, p\}$ имеем

$$0 \equiv Q(\alpha_k, \xi_2) \equiv \sum_{i=0}^s \xi_2^j \sum_{i=0}^r a_{ij} \alpha_k^i,$$

откуда в силу линейной независимости мономов $\{\xi_2^j\}_0^s$ получим систему соотношений

$$\sum_{i=0}^r a_{ij} \alpha_k^i = 0, \quad j \in \{0, \dots, s\}, \quad k \in \{1, \dots, p\}. \quad (14)$$

Зафиксируем индекс j (столбец матрицы коэффициентов $\|a_{ij}\|$) и рассмотрим соотношения (14) как линейную систему уравнений для неизвестных $\{a_{ij}\}_{i=0}^r$:

[illegible]

Согласно лемме 2, если $a_{i_0,j} \neq 0$ для некоторого $i_0 \in \{0, \dots, r\}$ и $a_{ij} = 0$ при всех $i < i_0$ (если такие значения индекса существуют), то $i_0 + p \leq r$, и среди чисел $a_{i_0+p,j}, \dots, a_{rj}$ также есть ненулевые.

Аналогичное свойство коэффициентов матрицы $\|a_{ij}\|$ справедливо и для ее строк: если $a_{i,j_0} \neq 0$ для некоторого $j_0 \in \{0, \dots, s\}$ и $a_{ij} = 0$ при всех $j < j_0$ (если такие значения индекса существуют), то $j_0 + q \leq s$, и среди чисел $a_{i,j_0+q}, \dots, a_{is}$ также есть ненулевые. Для доказательства этого факта необходимо в равенство (13) подставить нули $\xi_1 = \beta_k$, $k \in \{1, \dots, q\}$ полинома $Q(\xi_1, \xi_2)$ и затем провести аналогичные рассуждения для каждой из строк матрицы $\|a_{ij}\|$ (при фиксированном i).

Рассмотрим теперь пару индексов (i_0, j_0) такую, что $a_{i_0, j_0} \neq 0$, но при этом $a_{i, j_0} = a_{i_0, j} = 0$ для всех $i \leq i_0$ и $j \leq j_0$, кроме случая, когда $i = i_0$ и $j = j_0$ одновременно (см. рис. 4). Легко показать, что такая пара индексов найдется. В самом деле, если $a_{00} \neq 0$, то требуемая пара найдена. Если $a_{00} = 0$, но a_{10} или a_{01} отличны от нуля, то выбираем соответственно пару $(1; 0)$ или $(0; 1)$. Если $a_{00} = a_{01} = a_{10} = 0$, но $a_{11} \neq 0$, то пара $(1; 1)$ — искомая. И т. д. Увеличивая индексы, требуемая пара будет найдена, поскольку по условию не все коэффициенты a_{ij} полинома $Q(\xi)$ равны нулю.

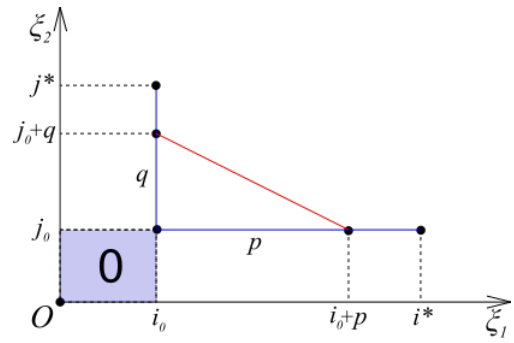


Рис. 4

Далее, по доказанному выше, найдутся индексы $i^* \geq i_0 + p$ и $j^* \geq j_0 + q$ такие, что $a_{i^*, j_0} \neq 0$ и $a_{i_0, j^*} \neq 0$. Это означает, что точки (i^*, j_0) и (i_0, j^*) вместе с точкой (i_0, j_0) входят в многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(Q)$ многочлена $Q(\xi)$. А, следовательно, в него входят и точки $(i_0 + p, j_0)$ и $(i_0, j_0 + q)$ — концы главной диагонали целочисленного $p \times q$ -прямоугольника, одной из вершин которого является (i_0, j_0) (см. рис. 4). $\square$

§ 3. Основная теорема.

Теорема 3. Пусть $n = 2$, $P(D_1, D_2) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$, причем символы сомножителей $p_j(\xi_j)$, $j = 1, 2$ имеют вид:

$$p_1(\xi_1) = (\xi_1 - \alpha_0)^l (\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_1 - \alpha_p), \quad p_2(\xi_2) = (\xi_2 - \beta_0)^m (\xi_2 - \beta_1) \dots (\xi_2 - \beta_q), \quad (16)$$

где $\{\alpha_j\}_0^p$ и $\{\beta_j\}_0^q$ — вещественные числа такие, что $\alpha_j \neq \alpha_k$ и $\beta_j \neq \beta_k$ при $j \neq k$.

Тогда включение $Q \in \mathcal{L}(P)$ эквивалентно тождеству $Q(D) = c_0 P(D) + c_1$ с некоторыми константами c_0, c_1 , т. е. равенству $\dim \mathcal{L}(P) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in \mathcal{L}(P)$. Заметим сначала, что без ограничения общности можно считать, что $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. В самом деле, по теореме 1 де Лю и Миркила, включение $Q \in \mathcal{L}(P)$ эквивалентно тождеству (5) с некоторыми мультипликаторами $M(\xi), N(\xi) \in \mathcal{M}$. Согласно следствию 1, после сдвига $\xi'_1 = \xi_1 - \alpha_0$, $\xi'_2 = \xi_2 - \beta_0$ новые функции $M(\xi')$ и $N(\xi')$ останутся мультипликаторами, и поэтому включение $Q \in \mathcal{L}(P)$ после указанной замены сохранится.

Таким образом, будем считать, что символ $P(\xi) = p_1(\xi_1) \otimes p_2(\xi_2)$ имеет вид

$$P(\xi) = \xi_1^l (\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_1 - \alpha_p) \otimes \xi_2^m (\xi_2 - \beta_1) \dots (\xi_2 - \beta_q), \quad (17)$$

где $\{\alpha_j\}_1^p$ и $\{\beta_j\}_1^q$ различны внутри каждого из наборов и отличны от нуля (так как при указанном сдвиге числа α_j и β_j перейдут в $\alpha_j - \alpha_0$ и $\beta_j - \beta_0$ соответственно).

К полиному $P(\xi)$ применимо предложение 2, так как символы сомножителей $p_1(\xi_1)$ и $p_2(\xi_2)$ являются старшими коэффициентами полинома $P(\xi)$ по переменным ξ_2 и ξ_1 соответственно и не имеют неведущих нулей. Тогда $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi) = c_0 P(\xi) + \tilde{Q}(\xi), \quad (18)$$

где c_0 — константа, и выполнены неравенства

$$\deg_{\xi_1} \tilde{Q} \leq l + p - 1, \quad \deg_{\xi_2} \tilde{Q} \leq m + q - 1. \quad (19)$$

Далее, из (18) вытекает, что $\tilde{Q} \in \mathcal{L}(P)$ и поэтому по лемме 1 имеет вид

$$\tilde{Q}(\xi) = (\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_1 - \alpha_p)(\xi_2 - \beta_1) \dots (\xi_2 - \beta_q) \hat{Q}(\xi) + c_1, \quad (20)$$

где $\hat{Q}(\xi)$ — многочлен, c_1 — константа.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $\tilde{Q}(\xi) \equiv c_1$, т. е. $\hat{Q}(\xi) \equiv 0$. Предположим, что это не так, т. е. полином $\hat{Q}(\xi)$ ненулевой.

Обратимся к многоугольникам Ньютона $\mathcal{N}(P)$ и $\mathcal{N}(\tilde{Q})$ полиномов $P(\xi)$ и $\tilde{Q}(\xi)$ соответственно. Так как согласно (17)

$$P(\xi) = \xi_1^l [\xi_1^p + \dots + (-1)^p \alpha_1 \dots \alpha_p] \otimes \xi_2^m [\xi_2^q + \dots + (-1)^q \beta_1 \dots \beta_q]$$

и $\alpha_1 \dots \alpha_p \neq 0$, $\beta_1 \dots \beta_q \neq 0$, то м. Н. полинома $P(\xi)$ — это выпуклый четырехугольник $OABC$ с вершинами $O(0; 0)$, $A(l; m+q)$, $B(l+p; m+q)$ и $C(l+p; m)$ (см. рис. 5). По теореме 2, $\mathcal{N}(\tilde{Q}) \subset \mathcal{N}(P)$. С другой стороны, обозначим через Π целочисленный прямоугольник с противоположными вершинами $(0; 0)$ и $(l+p-1; m+q-1)$. В силу неравенств (19) имеем $\mathcal{N}(\tilde{Q}) \subset \Pi$. Значит,

$$\mathcal{N}(\tilde{Q}) \subset \mathcal{N}(P) \cap \Pi := \tilde{\mathcal{N}}(P), \quad (21)$$

т. е. $\mathcal{N}(\tilde{Q})$ принадлежит части $\tilde{\mathcal{N}}(P)$ многоугольника Ньютона $\mathcal{N}(P)$, ограниченной прямыми $\xi_1 = l+p-1$ и $\xi_2 = m+q-1$ (см. рис. 6).

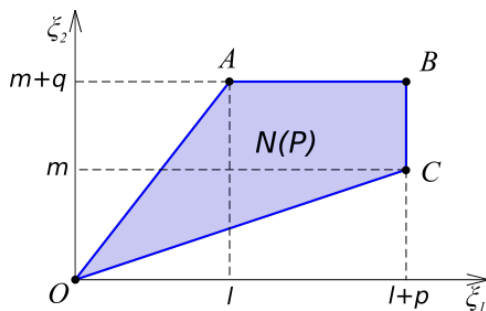


Рис. 5

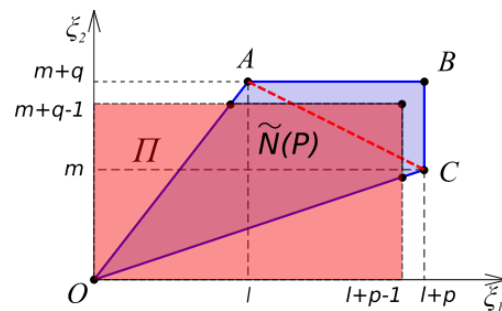


Рис. 6

Согласно предложению 3, в м. Н. ненулевого полинома

$$\tilde{Q}(\xi) - c_1 = (\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_1 - \alpha_p)(\xi_2 - \beta_1) \dots (\xi_2 - \beta_q) \hat{Q}(\xi)$$

содержится главная диагональ целочисленного $p \times q$ -прямоугольника и, значит, согласно (21), она содержится и в $\tilde{\mathcal{N}}(P)$. Но это невозможно из геометрических соображений. В самом деле, пересекая четырехугольник $OABC$ прямыми, параллельными главной диагонали целочисленного $p \times q$ -прямоугольника, получим множество параллельных друг другу отрезков. Из них наибольшую длину имеет только отрезок AC , соединяющий вершины $A(l; m+q)$ и $C(l+p; m)$, причем длина этого отрезка равна как раз длине главной диагонали целочисленного $p \times q$ -прямоугольника (см. рис. 6). Но прямоугольник с вершинами в указанных точках не входит в $\tilde{\mathcal{N}}(P)$. И, значит, $\tilde{\mathcal{N}}(P)$ не может содержать главную диагональ целочисленного $p \times q$ -прямоугольника.

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boman J. Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables / J. Boman // Illinois J. Math. 1972. – V. 16, № 2. – P. 203–216.
2. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 480 с.
3. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
4. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ / М. М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т. 56. – С. 206–261.
5. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. – 1964. – V. 8, № 1. – P. 112–124.
6. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75–112.
7. Лиманский Д. В. Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов / Д. В. Лиманский // Укр. матем. вісник. – 2011. – Т. 8, № 1. – С. 101–111.
8. Лиманський Д. В. Умови підпорядкованості для тензорного добутку двох звичайних диференціальних операторів / Д. В. Лиманський // Доповіді НАН України. – 2012. – № 4. – С. 25–29.
9. Лиманский Д. В. Многоугольник Ньютона и априорные оценки для дифференциальных полиномов на плоскости / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 67–79.
10. Лиманский Д. В. О подчиненности одного дифференциального оператора тензорному произведению других в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 41–49.
11. Лиманский Д. В. Об условиях подчиненности для тензорного произведения двух обыкновенных дифференциальных полиномов с кратными вещественными нулями / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 90–100.
12. Лиманский Д. В. Обобщения теоремы Бомана и априорные оценки для систем минимальных дифференциальных операторов / Д. В. Лиманский // Труды ИПММ. – 2017. – Т. 31. – С. 118–133.
13. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 472 с.
15. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
16. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1965. – 431 с.

Поступила в редакцию 20.08.2022 г.

ON A PRIORI ESTIMATES FOR A TENSOR PRODUCT OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL POLYNOMIALS WITH A UNIQUE MULTIPLE REAL ZERO

D. V. Limanskii

We consider a linear space of minimal differential polynomials in two variables subordinated in the $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ norm to the tensor product of two ordinary differential operators whose symbols have the following property: all their zeros are real and only one of them is multiple. It is proved that the dimension of the indicated space is equal to two, i. e., is the minimal possible.

Keywords: a priori estimate, differential polynomial, tensor product, Newton polygon.

Лиманский Дмитрий Владимирович

канд. физ.-мат. наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
d.limanskiy@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Limanskii Dmitrii Vladimirovich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor,
Donetsk National University, Donetsk, DPR

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ

© 2022. А. Д. Манов

В данной работе рассматривается экстремальная задача, связанная с множеством непрерывных положительно определённых функций на $\mathbb{R}$, носитель которых содержится в отрезке $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, а значение в нуле фиксировано (класс $\mathfrak{F}_\sigma$).

Пусть $\rho(x) := \cos \alpha \operatorname{ch}(px) + i \sin \alpha \operatorname{sh}(px)$, где $p > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим на множестве финитных непрерывных функций $C_c(\mathbb{R})$ линейный функционал $\langle \rho, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. При фиксированном $\sigma > 0$ требуется найти следующие величины:

$$M(\rho, \sigma) := \sup \{ \langle \rho, \varphi \rangle : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}, \quad m(\rho, \sigma) := \inf \{ \langle \rho, \varphi \rangle : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}.$$

В данной работе доказано, что

$$M(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} \left(\cos \alpha + \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{\sigma p} \right)^2 - \sin^2 \alpha} \right), \quad m(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} \left(\cos \alpha - \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{\sigma p} \right)^2 - \sin^2 \alpha} \right).$$

Ключевые слова: положительно определённые функции, экстремальные задачи, теорема Бохнера, преобразование Фурье.

1. Введение. Комплекснозначная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f \in \Phi(\mathbb{R})$), если для любого $m \in \mathbb{N}$, и для любых точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geq 0. \quad (1)$$

Если $f \in \Phi(\mathbb{R})$, то из неравенства (1) при $m = 2$ вытекает, что $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ и функция f является эрмитовой, т. е. $f = \tilde{f}$, где $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

В данной работе нас будет интересовать следующее выпуклое подмножество положительно определённых функций. Пусть $\sigma > 0$. Символом $\mathfrak{F}_\sigma$ обозначим множество функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{supp} \varphi \subset [-\sigma, \sigma]$ и $\varphi(0) = 1$. Класс функций $\mathfrak{F}_\sigma$ не пуст. Например, можно показать, функция $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$, $x \in \mathbb{R}$ принадлежит классу $\mathfrak{F}_\sigma$.

Пусть $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$. По функции ρ определим следующий линейный функционал:

$$\langle \rho, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx, \quad \varphi \in C_c(\mathbb{R}). \quad (2)$$

Не сложно проверить, что если $\rho = \tilde{\rho}$, то функционал (2) на функциях из $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C_c(\mathbb{R})$ принимает только вещественные значения. Рассмотрим следующую общую задачу.

Задача 1. Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$, $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Требуется найти следующие величины:

$$M(\rho, \sigma) := \sup \{ \langle \rho, \varphi \rangle : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}, \quad m(\rho, \sigma) := \inf \{ \langle \rho, \varphi \rangle : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}. \quad (3)$$

Если $\rho(x) \equiv 1$, то величина $M(\rho, \sigma)$ была найдена Зигелем [1] в 1935 году и независимо Боасом и Кацом (см. [2, Theorem 5]) в 1945 году. В этом случае $M(\rho, \sigma) = \sigma$ и достигается она на функции $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$. Отметим также, что Зигелем было получено решение более общей задачи для положительно определённых функций в $\mathbb{R}^n$ с носителем в шаре. Результат Зигеля был также получен независимо Д. В. Горбачевым [3].

В работе автора [4] была доказана следующая общая теорема.

Теорема А. Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_{loc}(\mathbb{R})$, $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Определим оператор A_ρ на функциях $u \in L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ следующим образом:

$$(A_\rho u)(t) := \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \rho(t-x)u(x)dx, \quad -\sigma/2 \leq t \leq \sigma/2.$$

Тогда A_ρ – ограниченный самосопряжённый оператор в $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ и имеют место следующие равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \sup(\text{spec } A_\rho), \quad m(\rho, \sigma) = \inf(\text{spec } A_\rho),$$

где $\text{spec } A_\rho$ – спектр оператора A_ρ .

В частности, в работе [4] найдены явные решения задачи 1 в следующих случаях: $\rho(x) = ix$, $\rho(x) = x^2$ и $\rho(x) = i \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\sigma > 0$ и $\rho(x) := \cos \alpha \operatorname{ch}(px) + i \sin \alpha \operatorname{sh}(px)$, где $p > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$M(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} \left(\cos \alpha + \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{\sigma p} \right)^2 - \sin^2 \alpha} \right),$$

$$m(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} \left(\cos \alpha - \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{\sigma p} \right)^2 - \sin^2 \alpha} \right).$$

2. Доказательство теоремы 1.

Пусть $\rho(x) := \xi \operatorname{ch}(px) + i\eta \operatorname{sh}(px)$, где $p > 0$ и $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. В этом случае, оператор A_ρ

– конечномерный и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 (A_\rho u)(t) &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \rho(t-x)u(x)dx \\
 &= \xi \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \operatorname{ch}(pt - px)u(x)dx + i\eta \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \operatorname{sh}(pt - px)u(x)dx \\
 &= \left(\xi \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \operatorname{ch}(px)u(x)dx - i\eta \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \operatorname{sh}(px)u(x)dx \right) \operatorname{ch}(pt) + \\
 &\quad + \left(-\xi \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \operatorname{sh}(px)u(x)dx + i\eta \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \operatorname{ch}(px)u(x)dx \right) \operatorname{sh}(pt), \quad -\sigma/2 \leq t \leq \sigma/2.
 \end{aligned}$$

Так как A_ρ – компактный оператор на бесконечномерном пространстве, то спектр A_ρ содержит точку 0, и отличные от нуля точки спектра являются собственными значениями A_ρ .

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения $A_\rho u = \lambda u$. Будем искать решение в виде $u(x) = a \operatorname{ch}(px) + b \operatorname{sh}(px)$, где $a, b \in \mathbb{C}$. В этом случае,

$$\begin{aligned}
 (A_\rho u)(t) &= \left(\xi a \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} + \frac{\sigma}{2} \right) - i\eta b \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} - \frac{\sigma}{2} \right) \right) \operatorname{ch}(pt) + \\
 &\quad + \left(-\xi b \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} - \frac{\sigma}{2} \right) + i\eta a \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} + \frac{\sigma}{2} \right) \right) \operatorname{sh}(pt), \quad -\sigma/2 \leq t \leq \sigma/2.
 \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при $\operatorname{ch}(pt)$ и $\operatorname{sh}(pt)$ в уравнении $A_\rho u = \lambda u$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \xi \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} + \frac{\sigma}{2} \right) \cdot a - i\eta \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} - \frac{\sigma}{2} \right) \cdot b = \lambda a, \\ i\eta \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} + \frac{\sigma}{2} \right) \cdot a - \xi \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} - \frac{\sigma}{2} \right) \cdot b = \lambda b. \end{cases}$$

Найдём собственные значения следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} \xi \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} + \frac{\sigma}{2} \right) & -i\eta \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} - \frac{\sigma}{2} \right) \\ i\eta \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} + \frac{\sigma}{2} \right) & -\xi \left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{2p} - \frac{\sigma}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнения имеет вид:

$$\lambda^2 - (\xi\sigma)\lambda - (\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{\operatorname{sh}^2(\sigma p)}{4p^2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) = 0. \quad (4)$$

Так как $\operatorname{sh}^2(\sigma p) - (\sigma p)^2 > 0$ при $p > 0$, то (4) имеет два различных действительных корня. Пусть $\xi = \cos \alpha$ и $\eta = \sin \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда корнями уравнения (4) являются:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma}{2} \left(\cos \alpha + \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{\sigma p} \right)^2 - \sin^2 \alpha} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma}{2} \left(\cos \alpha - \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{\sigma p} \right)^2 - \sin^2 \alpha} \right).$$

Теорема доказана. $\square$

5. Заключение. В заключении отметим, что экстремальные задачи вида (3) связаны с экстремальными задачами для целых функций экспоненциального типа, неотрицательных на вещественной прямой (см., например, [4], [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem / C. L. Siegel // Acta Math. – 1935. – Vol. 65, № 1. – P. 307 – 323.
2. Boas R. P., Jr. Inequalities for Fourier transforms of positive functions / R. P., Jr Boas, M. Кас // Duke Math. J. – 1945. – Vol. 12, № 1. – P. 189 – 206.
3. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре / Д. В. Горбачев // Матем. заметки. – 2001. – Т. 69, № 3. – С. 346 – 352.
4. Манов А. Д. Об одной экстремальной задаче для положительно определённых функций / А. Д. Манов // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22, № 5. – С. 161 – 171.
5. Горбачев Д. В. Константы Никольского-Бернштейна для неотрицательных целых функций экспоненциального типа на оси / Д. В. Горбачев // Тр. ИММ УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 4. – С. 93 – 103.

Поступила в редакцию 10.06.2022 г.

ON A PROBLEM FOR POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS WITH COMPACT SUPPORT

A. D. Manov

In this paper we consider an extremal problem related to a set of continuous positive definite functions on $\mathbb{R}$ whose support is contained in the closed interval $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$ and the value at the origin is fixed (the class $\mathfrak{F}_\sigma$).

Let $\rho(x) := \cos \alpha \operatorname{ch}(px) + i \sin \alpha \operatorname{sh}(px)$, where $p > 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Define a linear functional on the set of continuous functions which have compact support $C_c(\mathbb{R})$: $\langle \rho, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. For a fixed $\sigma > 0$, it is required to find the following constants:

$$M(\rho, \sigma) := \sup \{ \langle \rho, \varphi \rangle : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}, \quad m(\rho, \sigma) := \inf \{ \langle \rho, \varphi \rangle : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \}.$$

In this paper we prove, that

$$M(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} \left(\cos \alpha + \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{\sigma p} \right)^2 - \sin^2 \alpha} \right), \quad m(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} \left(\cos \alpha - \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(\sigma p)}{\sigma p} \right)^2 - \sin^2 \alpha} \right).$$

Keywords: positive-definite functions, extremal problems, Bochner theorem, Fourier transform.

Манов Анатолий Дмитриевич

кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
manov.ad@ro.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ

Manov Anatoliy Dmitrievych

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National University,
Donetsk, DPR

УДК 517.988.28

РАДИУС ПОМПЕЙЮ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ИЗ СЕКТОРА И ПОЛУКРУГА

© 2022. П. А. Машаров

Найдено значение наименьшего радиуса круга, в котором данный набор множеств является семейством Помпейю. В качестве наборов множеств рассмотрена совокупность кругового сектора и полукруга. Для рассмотренного семейства радиус Помпейю оказался меньше минимального из радиусов Помпейю для каждого из множеств.

Ключевые слова: множество Помпейю, экстремальный вариант проблемы Помпейю, семейство Помпейю, радиус Помпейю для семейства, круговой сектор.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Часть этой группы, оставляющая компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ внутри B , традиционно обозначаем $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in M(n) : \lambda A \subset B\}$, $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ — шар радиуса R .

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

при всех $\lambda \in M(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A . В этой постановке указанная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получили румынский математик Помпейю в 1929 году [1, 2] и другие [3–5].

Для многих конкретных случаев известен ряд результатов, с помощью которых можно определить, имеет ли множество A свойство Помпейю или нет [6–9]. Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [10]:

Пусть A — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\bar{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно–аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Этот результат показывает, что многие множества A с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. В случае множества A с вещественно–аналитической границей ситуация сложнее. Примерами множеств $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ для любого $n \geq 2$ являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [11].

Относительно недавно были получены примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева [12]. Одним из таких множеств является «снежинка Кох».

В случае, когда некоторое множество не обладает свойством Помпейю, наличие ненулевой функции с условием (1) дает возможность получить нетривиальные оценки плотности укладки произвольного компакта в $\mathbb{R}^n$ множествами вида λA , $\lambda \in M(n)$. Такие оценки получил Б. Д. Котляр [13]. Если же A имеет свойство Помпейю, то в силу теоремы Винера возможна аппроксимация в $L_1(\mathbb{R}^n)$ линейными комбинациями индикаторов множеств вида λA , $\lambda \in M(n)$ [14].

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки $(\mathbb{R}^n, \mathbf{M}(n), dx)$ на тройку $(X, \mathcal{Z}, d\mu)$, где X — многообразие, $\mathcal{Z}$ — группа Ли, действующая транзитивно на X , $d\mu$ — инвариантная относительно $\mathcal{Z}$ мера на X . Одним из наиболее интересных примеров является случай, когда X — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\mathcal{Z}$ — группа конформных автоморфизмов X [15, 16].

Другие обобщения проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Упоминая о методике решения указанных задач, следует отметить, что наиболее сильные результаты из цитированных выше работ получены с помощью аппарата преобразования Фурье и других элементов гармонического анализа. Несмотря на достигнутые успехи, в ряде случаев такой подход является либо неприменимым, либо недостаточно тонким (например, при изучении локальных вариантов проблемы Помпейю). Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы.

Постановка задачи

Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R^n$ и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ таких, что $\lambda A \subset \mathbb{B}_R^n$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ п.в. в $\mathbb{B}_R^n$, будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}_R^n$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (по сравнению с размерами множества A) выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ [17–19].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf \{ R > 0 : A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A .

В [19] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(A)$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Беренштейном и Р. Гэм [17, 18], а также В. В. Волчковым [19, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [19–27].

Пусть имеем некоторое фиксированное семейство компактных множеств $\{A_j\}_{j=1}^m$. Если для комплекснозначной локально суммируемой в шаре $\mathbb{B}_R^n$ функции f из выполнения условия (1) при всех $A = A_j$ ($j = \overline{1, m}$) и $\lambda_j \in \mathbf{M}(n)$ таких, что $\lambda_j A_j \subset \mathbb{B}_R^n$, следует, что $f = 0$ п.в. в $\mathbb{B}_R^n$, будем говорить, что $\{A_j\}_{j=1}^m$ является семейством Помпейю в шаре $\mathbb{B}_R^n$ и обозначать $\{A_j\} \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$.

Аналогично проблеме 1 возникает (см., например, [25, 28, 29])

Проблема 2. Для данного семейства $\{A_j\}_{j=1}^m$ компактных множеств $A_j \subset \mathbb{R}^n$ найти значение

$$\mathcal{R}(\{A_j\}) = \inf \{ R > 0 : \{A_j\} \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \}.$$

Отметим, что если по крайней мере для одного $k \in \{1, \dots, m\}$ множество $A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$, то все семейство $\{A_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Отсюда следует

Лемма 1. Для любой совокупности множеств $\{A_j\}_{j=1}^m$ верно неравенство

$$\mathcal{R}(\{A_j\}_{j=1}^m) \leq \min \{ \mathcal{R}(A_1), \dots, \mathcal{R}(A_m) \}.$$

При этом возникает вопрос, существует ли набор множеств $\{A_j\}_{j=1}^m$, для которого неравенство в лемме 1 является строгим? Примеры совокупностей таких множеств построены в [25, 28].

В данной работе проблема 2 решена для семейства, состоящего из кругового сектора и полукруга в $\mathbb{R}^2$. Таким образом, здесь будет получен еще один пример совокупности, для которого неравенство в лемме 1 строгое.

Рассмотрим круговой сектор раствора $\pi/2$

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq x\}$$

и полукруг

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

Для произвольного компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и положительного числа μ рассмотрим множество $\mu A = \{x \in \mathbb{R}^n: x/\mu \in A\}$. Очевидно, что для любого такого μ и компакта A имеет место равенство $\mathcal{R}(\mu A) = \mu \mathcal{R}(A)$.

Поскольку $\mathcal{R}(L_1) = 1$, $\mathcal{R}(D) = \sqrt{5}/2$ (см., например, [26, § 41]), рассмотрим $L = \frac{\sqrt{5}}{2} L_1$. В этом случае $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(D) = \sqrt{5}/2$. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}(\{L, D\}) = \frac{9\sqrt{5}}{20}. \quad (2)$$

Вспомогательные обозначения и утверждения

Всюду далее, если не будет явно указано, считаем размерность пространства $n = 2$, круг $\mathbb{B}_R = \mathbb{B}_R^2$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим $\mathbb{B}(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^2: r < |x| < R\}$ — кольцо, если $r \geq 0$, или круг $\mathbb{B}_R$, если $r < 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества $B \subset \mathbb{R}^2$ под $C^k(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в B , $C(B)$ — класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(B)$.

Под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс локально суммируемых в B функций, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \text{Mot}(\overline{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^k(B)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{P}_0^\infty(A, B)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$, то есть таких, для которых из условия $\forall x, y \in B: |x| = |y|$ следует $f(x) = f(y)$.

Для обозначения частной производной функции $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ по переменным x и y будем использовать запись $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Для произвольного непустого $A \subset \mathbb{R}^2$, фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и вектора $t \in \mathbb{R}^2$ положим $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2: |x - y| < \varepsilon, y \in A\}$, $A + t = \{x + t \in \mathbb{R}^2: x \in A\}$.

Для каждого из рассматриваемых множеств A найдем значение величины $r^*(A) = \inf\{r > 0: \text{Mot}(A, \mathbb{B}_r) \neq \emptyset\}$. Заметим, что указанная величина играет важную роль в локальном варианте проблемы Помпейю, поскольку для широкого класса множеств справедлива оценка $\mathcal{R}(A) \leq 2r^*(A)$ [19].

Найдем радиус замкнутого круга, внутри которого можно так разместить сектор L , чтобы все его три вершины оказались на окружности (см. рис. 1). Так как $\angle CAB = 90^\circ$, то центр круга $O \in BC$, $BO = OC$. Диаметр BC , являющийся гипотенузой прямоугольного

треугольника BCA , равен $AC\sqrt{2}$, откуда радиус круга $R = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$. Отсюда получаем $r^*(L) = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Для полуокруга D значение $r^*(D) = 1$, и достигается при таком расположении $\lambda D \subset \mathbb{B}_R$, при котором прямолинейный отрезок D совпадает с диаметром круга $\mathbb{B}_R$.

Так как $\frac{\sqrt{10}}{4} < 1$, то имеет смысл рассматривать только $R > 1$, поскольку при $R < 1$ множество $\text{Mot}(D, \mathbb{B}_R) = \emptyset$, а $\mathcal{R}(L) = \sqrt{5}/2 > 1$. Учитывая лемму 1, получаем оценку $1 \leq \mathcal{R}(\{L, D\}) \leq \sqrt{5}/2$, поэтому в дальнейших геометрических конструкциях имеет смысл рассматривать только значения

$$1 < R < \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (3)$$

Обозначим вершины сектора L : $A_L(0, 0)$, $B_L(\frac{\sqrt{10}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{4})$, $C_L(\frac{\sqrt{10}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4})$, полуокруга D : $Q_D(0, 1)$, $W_D(0, -1)$ и дифференциальные операторы $\nu_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nu_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_4 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_5 = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

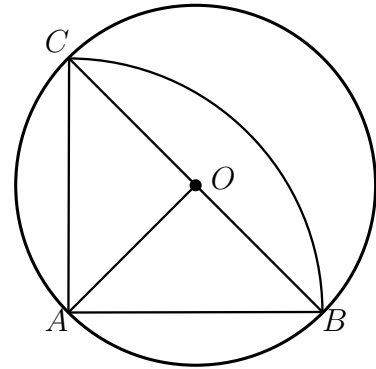


Рис. 1. Минимальный круг, содержащий L

Лемма 2. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ $f \in C^5(L_\varepsilon)$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \iint_L \nu_4 f(x, y) dx dy &= \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin t + \cos t) f\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cos t; \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t\right) dt - \\ &- 2 \int_{-\sqrt{10}/4}^0 f(-t, t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \iint_L \nu_3 \nu_4^2 \nu_5 f(x, y) dx dy &= -\frac{\sqrt{10}}{2} \nu_4 \nu_5 f(C_L) + 2 \nu_5 f(C_L) - 2 \nu_5 f(A_L) - \\ &- \frac{\sqrt{10}}{2} \nu_4^2(B_L) + 2 \int_{-\sqrt{10}/4}^0 \nu_4^2 f(-t, t) dt; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \iint_L \nu_3 \nu_4^2 \nu_5^2 f(x, y) dx dy &= -\frac{\sqrt{10}}{2} \nu_4 \nu_5^2 f(C_L) + 2 \nu_5^2 f(C_L) - 2 \nu_5^2 f(A_L) - \\ &- \frac{\sqrt{10}}{2} \nu_5 \nu_4^2(B_L) + 2 \nu_4^2 f(L_A) - 2 \nu_4^2 f(L_B). \end{aligned} \quad (6)$$

Если $f \in C^2(D_\varepsilon)$, то

$$\iint_D \nu_3 \nu_2 f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 f(0, t) dt - f(Q_D) - f(W_D). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведем двойной интеграл по L к повторному и расставим пределы интегрирования в обоих порядках: $\iint_L f(x, y) dx dy = \int_0^{\sqrt{10}/4} dx \int_{-x}^x f(x, y) dy + \int_{\sqrt{10}/4}^{\sqrt{5}/2} dx \int_{-\sqrt{5/4-x^2}}^{\sqrt{5/4-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{10}/4}^{\sqrt{10}/4} dy \int_{|y|}^{\sqrt{5/4-y^2}} f(x, y) dx$.

Применим оператор ν_4 к функции f : $\iint_L \nu_4 f(x, y) dx dy = \int_{-\sqrt{10}/4}^{\sqrt{10}/4} (f(\sqrt{5/4-y^2}, y) - f(|y|, y)) dy + \int_0^{\sqrt{10}/4} (f(x, x) - f(x, -x)) dx + \int_{\sqrt{10}/4}^{\sqrt{5}/2} (f(x, \sqrt{5/4-x^2}) - f(x, -\sqrt{5/4-x^2})) dx$.

Преобразуем интегралы при помощи замен:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{10}/4}^{\sqrt{10}/4} f(\sqrt{5/4 - y^2}, y) dy &= \{y = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t\} = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t f(\frac{\sqrt{5}}{2} \cos t; \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t) dt; \\ - \int_{-\sqrt{10}/4}^{\sqrt{10}/4} f(|y|, y) dy &= \{y = t\} = - \int_{-\sqrt{10}/4}^0 f(-t, t) dt - \int_0^{\sqrt{10}/4} f(t, t) dt; \\ \int_0^{\sqrt{10}/4} f(x, x) dx &= \{x = t\} = \int_0^{\sqrt{10}/4} f(t, t) dt; \\ - \int_0^{\sqrt{10}/4} f(x, -x) dx &= \{x = -t\} = - \int_{-\sqrt{10}/4}^0 f(-t, t) dt; \\ \int_{\sqrt{10}/4}^{\sqrt{5}/2} f(x, \sqrt{5/4 - x^2}) dx &= \{x = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t\} = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^{\pi/4} \sin t f(\frac{\sqrt{5}}{2} \cos t; \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t) dt; \\ - \int_{\sqrt{10}/4}^{\sqrt{5}/2} f(x, -\sqrt{5/4 - x^2}) dx &= \{x = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t\} = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{-\pi/4}^0 \sin t f(\frac{\sqrt{5}}{2} \cos t; \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t) dt. \end{aligned}$$

Соединяя все вместе, получаем (4).

Применив оператор ν_3 к функции f , получаем $\iint_L \nu_3 f(x, y) dx dy =$
 $= \int_{-\sqrt{10}/4}^{\sqrt{10}/4} y(f(\sqrt{5/4 - y^2}, y) - f(|y|, y)) dy - \int_0^{\sqrt{10}/4} x(f(x, x) - f(x, -x)) dx -$
 $- \int_{\sqrt{10}/4}^{\sqrt{5}/2} x(f(x, \sqrt{5/4 - x^2}) - f(x, -\sqrt{5/4 - x^2})) dx.$

Преобразуем интегралы при помощи замен:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{10}/4}^{\sqrt{10}/4} y f(\sqrt{5/4 - y^2}, y) dy &= \{y = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t\} = \frac{5}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin t \cos t f(\frac{\sqrt{5}}{2} \cos t; \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t) dt; \\ - \int_{-\sqrt{10}/4}^{\sqrt{10}/4} y f(|y|, y) dy &= \{y = t\} = - \int_{-\sqrt{10}/4}^0 t f(-t, t) dt - \int_0^{\sqrt{10}/4} t f(t, t) dt; \\ - \int_0^{\sqrt{10}/4} x f(x, x) dx &= \{x = t\} = - \int_0^{\sqrt{10}/4} t f(t, t) dt; \\ \int_0^{\sqrt{10}/4} x f(x, -x) dx &= \{x = -t\} = - \int_{-\sqrt{10}/4}^0 t f(-t, t) dt; \\ - \int_{\sqrt{10}/4}^{\sqrt{5}/2} x(f(x, \sqrt{5/4 - x^2}) - f(x, -\sqrt{5/4 - x^2})) dx &= \{x = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t\} = \\ = - \frac{5}{4} \int_0^{\pi/4} \sin t \cos t f(\frac{\sqrt{5}}{2} \cos t; \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t) dt - \frac{5}{4} \int_{-\pi/4}^0 \sin t \cos t f(\frac{\sqrt{5}}{2} \cos t; \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t) dt. \end{aligned}$$

Соединяя все вместе, получаем

$$\iint_L \nu_3 f(x, y) dx dy = -2 \int_{-\sqrt{10}/4}^0 t f(-t, t) dt - 2 \int_0^{\sqrt{10}/4} t f(t, t) dt.$$

Заметим, что $df(t, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dt + \frac{\partial f}{\partial y} dt = \nu_4 f(t, t) dt$, аналогично $df(-x, x) = \nu_5 f(-t, t) dt$.

Применяя метод интегрирования по частям, получаем $\int_0^{\sqrt{10}/4} t \nu_4^2 f(t, t) dt = t \nu_4 f(t, t) \Big|_0^{\sqrt{10}/4} -$
 $- \int_0^{\sqrt{10}/4} df(t, t) = \frac{\sqrt{10}}{4} \nu_4 f(C_L) - f(C_L) + f(A_L), \int_{-\sqrt{10}/4}^0 t \nu_5 f(-t, t) dt = t f(-t, t) \Big|_{-\sqrt{10}/4}^0 -$
 $- \int_{-\sqrt{10}/4}^0 f(-t, t) dt = \frac{\sqrt{10}}{4} f(B_L) - \int_{-\sqrt{10}/4}^0 f(-t, t) dt, \int_{-\sqrt{10}/4}^0 t \nu_5^2 f(-t, t) dt =$
 $= t \nu_5 f(-t, t) \Big|_{-\sqrt{10}/4}^0 - \int_{-\sqrt{10}/4}^0 df(-t, t) = \frac{\sqrt{10}}{4} \nu_5 f(B_L) - f(L_A) + f(L_B).$

Учитывая перестановочность дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами ν_4 и ν_5 , получаем (5) и (6).

Сведем двойной интеграл по D к повторному и расставим пределы интегрирования в обоих порядках: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

Применив оператор ν_3 к функции f , получаем $\iint_D \nu_3 f(x, y) dx dy =$
 $= \int_{-1}^1 y(f(\sqrt{1-y^2}, y) - f(0, y)) dy - \int_0^1 x(f(x, \sqrt{1-x^2}) - f(x, -\sqrt{1-x^2})) dx.$

Преобразуем интегралы при помощи замен:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y f(\sqrt{1-y^2}, y) dy &= \{y = \sin t\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos t f(\cos t, \sin t) dt; \\ - \int_{-1}^1 y f(0, y) dy &= \{y = t\} = - \int_{-1}^1 t f(0, t) dt; \\ - \int_0^1 x(f(x, \sqrt{1-x^2}) - f(x, -\sqrt{1-x^2})) dx &= \{x = \cos t\} = \\ = - \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t f(\cos t, \sin t) dt - \int_{-\pi/2}^0 \sin t \cos t f(\cos t, \sin t) dt. \end{aligned}$$

Соединяя все вместе, получаем $\int_D \nu_3 f(x, y) dx dy = - \int_{-1}^1 t f(0, t) dt$.

Учитывая $df(0, t) = \frac{\partial f}{\partial y} dt = \nu_2 f(0, t) dt$ и применяя метод интегрирования по частям, получаем $\int_{-1}^1 t \nu_2 f(0, t) dt = t f(0, t) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(0, t) dt = f(Q_D) + f(W_D) - \int_{-1}^1 f(0, t) dt$. Отсюда приходим к (7). $\square$

Лемма 3. Пусть A — компакт в $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{d}$ — один из дифференциальных операторов ν_1, ν_2, ν_3 , и для некоторого открытого множества B , для которого $\text{Mot}(A, B) \neq \emptyset$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$. Тогда $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$.

Доказательство. Учитывая определение класса $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$, достаточно доказать, что если f имеет нулевые интегралы, то и $\mathfrak{d}f$ обладает этим же свойством. Для произвольного $\lambda \in \text{Mot}(A, B)$ и любого $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, норма которого меньше некоторого $\varepsilon > 0$, $\lambda A + \zeta \subset B$, значит

$$0 = \int_{\lambda A + \zeta} f(x, y) dx dy = \int_{\lambda A} f(x + \xi, y + \eta) dx dy.$$

Дифференцируя это равенство по ξ и η и полагая в полученных равенствах $\xi = \eta = 0$, приходим к $\int_{\lambda A} \nu_1 f(x, y) dx dy = \int_{\lambda A} \nu_2 f(x, y) dx dy = 0$, что означает $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$ для первых двух дифференциальных операторов.

Для произвольного $\lambda \in \text{Mot}(A, B)$ и любого достаточно малого по модулю угла φ множество, полученное из λA вращением вокруг начала координат на угол φ , также будет лежать в B , значит $\int_{\lambda A} f(x \cos \varphi - y \sin \varphi; y \cos \varphi + x \sin \varphi) dx dy = 0$. Дифференцируя это равенство по φ , получаем

$$\int_{\lambda A} ((-x \sin \varphi - y \cos \varphi) \nu_1 f + (-y \sin \varphi + x \cos \varphi) \nu_2 f) dx dy = 0.$$

Полагая здесь $\varphi = 0$, приходим к $-\nu_3 f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$, откуда следует требуемое. $\square$

Пусть $O(0, 0)$, $\rho(e) = \rho(O, \lambda e) = \inf \{ \|OX\| : X \in e \}$ — расстояние от центра круга, точки O , до элемента λe множества λE (сектора λL или полукруга λD) при условии $\lambda \in \text{Mot}(E, \mathbb{B}_R)$. В зависимости от значения R , удовлетворяющего (3), рассмотрим интересующие нас максимальные и минимальные возможные расстояния до соответствующих элементов:

$$\begin{aligned} \max(A) &= \sup \{ \rho(A_L) \}, \max(AB) = \sup \{ \rho(A_L B_L) \}, \\ \max(BC) &= \sup \{ \rho(B_L C_L) \}, \max(QW) = \sup \{ \rho(Q_D W_D) \}, \\ \min(A) &= \inf \{ \rho(A_L) \}, \min(AB) = \inf \{ \rho(A_L B_L) \}, \\ \min(BC) &= \inf \{ \rho(B_L C_L) \}, \min(QW) = \inf \{ \rho(Q_D W_D) \}. \end{aligned}$$

Здесь под $B_L C_L$ понимается дуга окружности сектора L .

Так как $r^*(L) = \frac{\sqrt{10}}{4} < 1$ и (3), то всегда можно будет так расположить сектор L внутри круга $\mathbb{B}_R$, что вершина его прямого угла окажется на границе. Значит $\max(A) = R$.

Найдем максимальное расстояние до стороны сектора $\lambda L \subset \overline{\mathbb{B}_R}$. Для этого расположим сектор так, чтобы концы стороны лежали на окружности (см. рис. 2). Проведем перпендикуляр на эту сторону: $OH \perp AB$. Тогда $AH = HB = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $OA = R$. Из прямоугольного треугольника AOH получаем $\max(AB) = OH = \sqrt{R^2 - \frac{5}{16}}$.

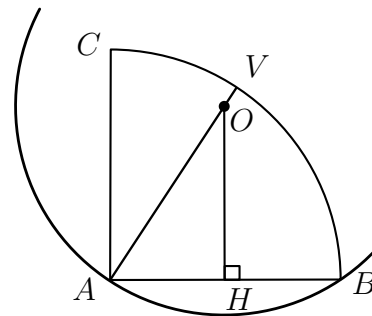


Рис. 2. Вычисление $\max(AB)$ и $\min(BC)$

Так как $R < \sqrt{5}/2$, то расстояние до дуги сектора λL будет положительным и минимальным, когда расстояние до вершины A окажется максимальным (см. рис. 2). Значит $\min(BC) = OV = AV - AO = \frac{\sqrt{5}}{2} - R$.

Найдем минимальное расстояние до вершины прямого угла и стороны сектора $\lambda L \subset \mathbb{B}_R$. Для этого расположим сектор так, чтобы концы гипотенузы лежали на окружности (см. рис. 3). Пусть Z — середина BC . Тогда прямая AZ — ось симметрии, значит проходит через центр круга O . Так как $AZ \perp BC$, то из прямоугольного треугольника OBZ получаем $OZ = \sqrt{R^2 - \frac{5}{8}}$. Отсюда $\min(A) = AO = AZ - OZ = \frac{\sqrt{10}}{4} - \sqrt{R^2 - \frac{5}{8}}$. Проведем $OH \perp AB$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника AON найдем $\min(AB) = OH = AO \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{5}{16}}$.

Пусть $V = AZ \cap \widetilde{BC}$. Вычислим $ZV = AV - AZ = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{4}$. Отсюда находим $\max(BC) = OV = OZ + ZV = \sqrt{R^2 - \frac{5}{8}} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Найдем максимальное расстояние до стороны полуокруга $\lambda D \subset \mathbb{B}_R$. Для этого расположим полуокруг так, чтобы концы стороны лежали на окружности (см. рис. 4). Проведем перпендикуляр на эту сторону: $OH \perp PQ$. Тогда $QH = HW = 1$, $OW = R$. Из $\triangle WOH$ получаем $\max(QW) = OH = \sqrt{R^2 - 1}$.

Так как $R > 1$, то полуокруг λD можно расположить так, что его прямолинейный участок границы содержит точку O , поэтому $\min(QW) = 0$.

Собрав вместе результаты геометрических рассуждений, получаем

Лемма 4. При выполнении (3) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \max(AB) &= \sqrt{R^2 - \frac{5}{16}}, & \max(QW) &= \sqrt{R^2 - 1}, \\ \max(A) &= R, & \max(BC) &= \sqrt{R^2 - \frac{5}{8}} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{4}, \\ \min(A) &= \frac{\sqrt{10}}{4} - \sqrt{R^2 - \frac{5}{8}}, & \min(BC) &= \frac{\sqrt{5}}{2} - R, \\ \min(AB) &= \frac{\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{5}{16}}, & \min(QW) &= 0. \end{aligned}$$

Лемма 5 ($\min(A) < \max(AB)$). Неравенство

$$\frac{\sqrt{10}}{4} - \sqrt{R^2 - \frac{5}{8}} < \sqrt{R^2 - \frac{5}{16}}$$

выполняется при всех $R > 1$.

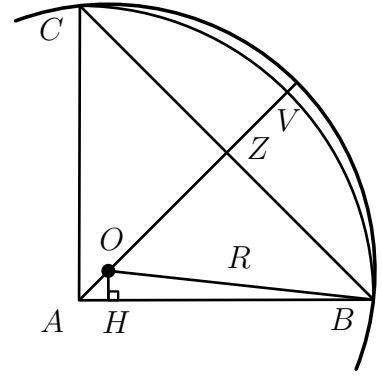


Рис. 3. Нахождение $\min(A)$, $\min(AB)$ и $\max(BC)$

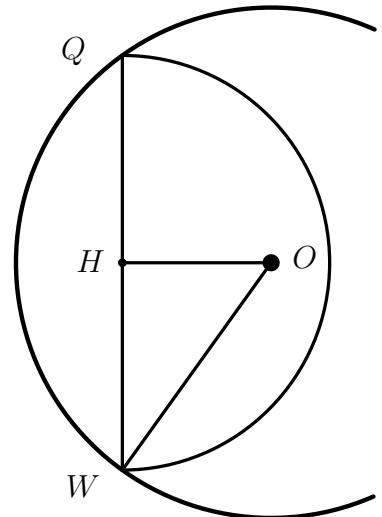


Рис. 4. Нахождение $\max(QW)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $g(R) = \sqrt{R^2 - \frac{5}{8}} + \sqrt{R^2 - \frac{5}{16}}$ возрастает при $R > \frac{\sqrt{10}}{4}$, то достаточно показать выполнение неравенства при $R = 1$: $\sqrt{\frac{5}{8}} - \sqrt{\frac{3}{8}} < \sqrt{\frac{11}{16}}$. Выполним эквивалентные преобразования: $\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{3}{8} < \frac{11}{16}$; $\frac{5}{16} < \frac{\sqrt{15}}{4}$; $5 < 4\sqrt{15}$; $25 < 240$ — верное неравенство. $\square$

Лемма 6 ($\min(AB) < \max(BC)$). *Неравенство*

$$\frac{\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{5}{16}} < \sqrt{R^2 - \frac{5}{8}} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{4} \quad (8)$$

выполняется при всех $R > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем (8) к виду $(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{R^2 - \frac{5}{8}} > \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{4}$. Так как функция, находящаяся в левой части полученного неравенства возрастает при $R \geq 1$, то достаточно доказать его справедливость при $R = 1$: $\frac{\sqrt{2}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} > \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{4}$. Эквивалентными преобразованиями сведем его к верному: $(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3} > \sqrt{10}(\sqrt{2} - 1)$; $3(3 + 2\sqrt{2}) > 10(3 - 2\sqrt{2})$; $26\sqrt{2} > 21$. $\square$

Лемма 7 ($\min(BC) < \max(QW)$). *Решением неравенства*

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - R < \sqrt{R^2 - 1}$$

при условии (3) является $\frac{9\sqrt{5}}{20} < R < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при рассматриваемых значениях R обе части неравенства одного знака, возведем их в квадрат: $\frac{5}{4} - R\sqrt{5} + R^2 < R^2 - 1$. Отсюда $R\sqrt{5} > \frac{9}{4}$ и лемма доказана. $\square$

Перед формулировкой необходимого в дальнейшем утверждения, доказательство которого можно найти в [19], введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $v_i \neq v_j$ для $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, числа $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_{\nu, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\}$, $\nu = 1, \dots, k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в $\mathcal{U}$ распределений. $\vec{\partial} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$.

Утверждение 1. (Теорема 3.2 из [19]) Пусть $F_\nu \in \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu, \varepsilon})$ для $\nu = 1, \dots, k$ и существуют многочлены $P_\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$ выполняется $\sum_{\nu=1}^k (P_\nu(\vec{\partial})F_\nu)(x + v_\nu) = 0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta)F_\nu = 0$ в $\Omega_{\nu, \varepsilon}$.

Лемма 8. Пусть (3), и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(L, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(\min(A), R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя утверждение 1 к функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(L, \mathbb{B}_R) \subset \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu, \varepsilon})$ для набора точек $\{A_L, B_L, C_L\}$, учитывая (6) из леммы 2 (его левая часть в данном случае обращается в нуль), приходим к существованию нетривиального многочлена $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, для которого $q(\Delta)f = 0$ в $\Omega_{\nu, \varepsilon}$. Последнее множество представляет из себя набор точек из $\mathbb{B}_R$, в которых может оказаться вершина λA_L при $\lambda \in \text{Mot}(L, \mathbb{B}_R)$. Учитывая обозначения $\min(A)$, $\max(A)$ и лемму 4, приходим к завершению доказательства. $\square$

Лемма 9. Пусть $\frac{9\sqrt{5}}{4} < R < \sqrt{5}/2$, и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(L, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(D, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая леммы 5, 6 и 7, для указанных в условии леммы значений R выполняются все три неравенства: $\min(A) < \max(AB)$, $\min(AB) < \max(BC)$, и $\min(BC) < \max(QW)$.

Рассмотрим многочлен q из леммы 8 и функцию $F = q(\Delta)f$. По лемме 3, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, получаем $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(L, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(D, \mathbb{B}_R)$. При этом $F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(A), R)$. Доопределим F нулём вне $\mathbb{B}_R$. Рассмотрев различные $\lambda \in \text{Mot}(L, \mathbb{B}_R)$, из равенства 5 леммы 2 получаем, что интегралы от $\nu_4^2 F$ по одной из сторон λL , а значит и по всем прямым, их содержащим, равны нулю. То есть преобразование Радона по всем прямым, расстояние до которых от начала координат больше $\min(AB)$, равно нулю. Отсюда (см., например, лемму 1.8.3 из [19]) следует $\nu_4^2 F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(AB), R)$. Так как функция F радиальна, то $\nu_1 F(\rho) = \frac{x}{\rho} F'(\rho)$, $\nu_2 F(\rho) = \frac{y}{\rho} F'(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Отсюда $\nu_1^2 F(\rho) = \frac{y^2}{\rho^3} F'(\rho) + \frac{x^2}{\rho^2} F''(\rho)$, $\nu_2^2 F(\rho) = \frac{x^2}{\rho^3} F'(\rho) + \frac{y^2}{\rho^2} F''(\rho)$, $\nu_1 \nu_2 F(\rho) = -\frac{xy}{\rho^3} F'(\rho) + \frac{xy}{\rho^2} F''(\rho)$. Учитывая $\nu_4^2 = \nu_1^2 + 2\nu_1 \nu_2 + \nu_2^2$, получаем равенство $\nu_4^2 F = (\frac{1}{\rho} - \frac{2xy}{\rho^3}) F'(\rho) + (1 + \frac{2xy}{\rho^2}) F''(\rho)$. Приняв $y = 0$, получаем дифференциальное уравнение $\frac{1}{x} F'(x) + F''(x) = 0$ при $x > \min(AB)$. Решением его является $F(x) = C_1 \ln |x| + C_2$. Учитывая $F(x) = 0$ при $x > \min(A)$, получаем $F(\rho) = 0$ при $\rho > \min(AB)$.

Так как для всех $\lambda \in \text{Mot}(L, \mathbb{B}_R)$ прямолинейный отрезок границы L попадает в область нулей функции F , равенство (4) из леммы 2 означает, что интегралы по всем дугам $\lambda(B_L C_L)$ от функции $(\sin t + \cos t)F$ равны нулю. Применяя предложение 2.2 из [31], получаем $F(\rho) = 0$ при $\rho > \min(BC)$.

Учитывая (7) из леммы 2 и $\min(QW) = 0$, преобразование Радона по всем прямым равно нулю. Отсюда $F = 0$ в $\mathbb{B}_R$. $\square$

Приведем также два утверждения, доказательства которых полностью аналогичны леммам 7 и 8 из [30].

Лемма 10. Пусть $\mathfrak{P}_0^\infty(L, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(D, \mathbb{B}_R) = \{0\}$ для некоторого $R > \frac{9\sqrt{5}}{20}$. Тогда $\mathcal{R}(\{L, D\}) \leq R$.

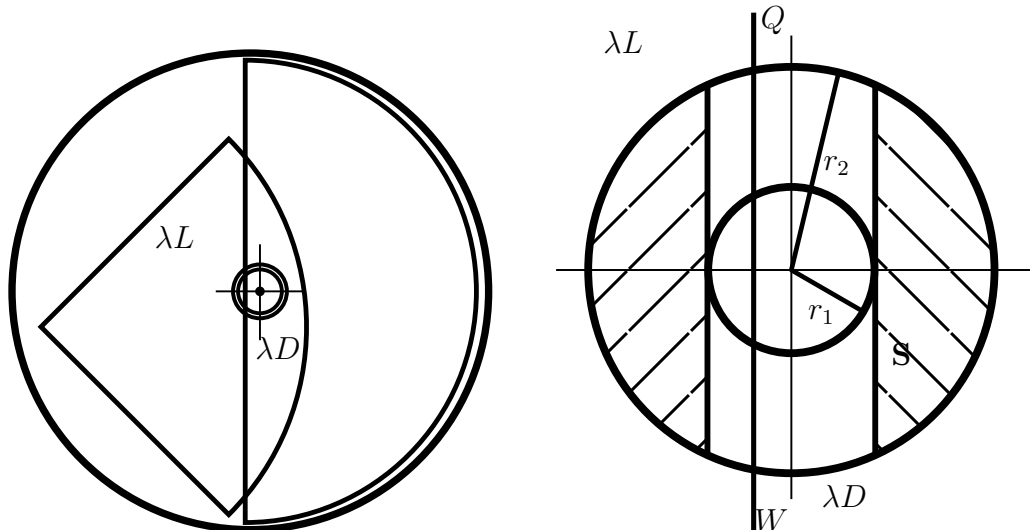
Лемма 11. Пусть $R > \frac{9\sqrt{5}}{20}$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(L, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(D, \mathbb{B}_R)$ и для некоторого многочлена $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.

Доказательство основного результата

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим сначала $1 < R < \frac{9\sqrt{5}}{20}$. Для таких значений R выполняется неравенство $r_1 = \max(QW) < r_2 = \min(BC)$. Для $j \in \{1, 2\}$ рассмотрим функции

$$g_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq d \leq r_1 \text{ или } d \geq r_2; \\ \exp\left(\frac{j}{(d-r_1)(d-r_2)}\right), & \text{если } r_1 < d < r_2. \end{cases}$$

Тогда существуют такие радиальные функции $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что их преобразования Радона по прямым $\mathbf{R}f_j(\omega, d) = g_j(d)$ для всех $|\omega| = 1$ и $d \geq 0$ (см., например, [19, Глава 1]). Эти функции линейно независимы, поэтому существует такой ненулевой набор чисел $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, что линейная комбинация $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ не равна тождественно нулю и обладает следующими свойствами. Она имеет нулевые интегралы по всем прямым, расстояние до начала координат от которых лежит в пределах от 0 до r_1 , интеграл равный нулю по сегменту S круга радиуса r_2 с расстоянием до хорды равном r_1 (заштрихованный сегмент на рис. 5), равна нулю во внешности $\mathbb{B}_{r_2}$. Значит функция f имеет нулевой интеграл по $\mathbb{B}_{r_2}$, а вне этого круга равна нулю.

Рис. 5. Расположение λL и λD в $\mathbb{B}_R$

Так как для рассматриваемых значений R выполняются неравенства $\min(BC) \geq r_2$, $\min(AB) \geq r_2$, то $\mathbb{B}_{r_2} \subset \lambda L$ для любого $\lambda \in \text{Mot}(L, \mathbb{B}_R)$. Значит выполняется (1) для $A = L$ и всех соответствующих λ .

Так как $\max(QW) \leq r_1$, то для любого $\lambda \in \text{Mot}(D, \mathbb{B}_R)$ множество $\lambda D \cap \mathbb{B}_{r_2}$ можно разбить на две части: сегмент S и набор отрезков, параллельных стороне сегмента S , расстояние от которых до начала координат не превосходит r_1 . Значит для рассматриваемой функции выполняются равенства (1) и для $A = D$ и всех соответствующих λ .

Построенная функция доказывает оценку $\mathcal{R}(\{L, D\}) \geq \frac{9\sqrt{5}}{20}$.

Если $R > \frac{9\sqrt{5}}{20}$, то, используя леммы 9, 11, 10, получаем оценку $\mathcal{R}(\{L, D\}) \leq \frac{9\sqrt{5}}{20}$, откуда следует доказательство теоремы. $\square$

Выводы

Как отмечалось выше, для любой совокупности множеств $\{A_j\}_{j=1}^m$ имеет место неравенство

$$\mathcal{R}(\{A_j\}_{j=1}^m) \leq \min\{\mathcal{R}(A_1), \dots, \mathcal{R}(A_m)\}.$$

В данной работе рассмотрена совокупность множеств $\{L, D\}$, для которых $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(D)$, но при этом получено $\mathcal{R}(\{L, D\}) < \mathcal{R}(L)$. Очевидной оценкой искомой величины была $1 \leq \mathcal{R}(\{L, D\}) \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Учитывая приближенные значения $\frac{9\sqrt{5}}{20} \approx 1,0062$ и $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,1180$, видим, что в работе получено существенное уточнение этой величины.

Решение локального варианта проблемы Помпейю применяется в комплексном анализе, теории аппроксимации, теории отображений, сохраняющих меру (см., например, [19, 30]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur certains systems d'equation lineaires et sur une propriete integrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Accd. Sci. Paris. – 1929. – V. 188. – P. 1138–1139.
2. Pompeiu D. Sur une propriete de fonctions continues depended de deux variables reelles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1929. – V. 15, № 5. – P. 265–269.
3. Nicolesco M. Sur un theoreme de Pompeiu / M. Nicolesco // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1930. – V. 16, № 5. – P. 817–822.
4. Ilieff L. Sur un probleme de Pompeiu / L. Ilieff // Ann. Univ. Sofia Fac. Phys., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 111–114.

5. Christov C. Sur l'equation integrale generalisee de Pompeiu / C. Christov // Ann. Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 167–178.
6. Произволов В. В. Об интегралах, постоянных на конгруэнтных областях / В. В. Произволов // Мат. заметки. – 1977. – Т. 21, №2. – С. 183–186.
7. Заставный В. П. Теорема о нулях преобразования Фурье индикатора и ее применение / В. П. Заставный // Новосибирск: Ред. «Сиб. мат. журн.». – 1986. – 18 с. Деп. в ВИНТИ 29.10.87: № 701-в. 87.
8. Ebenfalt P. Some results on the Pompeiu problem / P. Ebenfalt // Ann. Acad. Sci. Ser. A. J. Math. – 1993. – V. 24. – P. 16–31.
9. Garofalo N. Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // J. Anal. Math. – 1991. – v. 56. – p. 1–28.
10. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183–190.
11. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 2723–2736.
12. Volchkov V. V. New results in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 417–432.
13. Котляр Б. Д. Плотности упаковок ограниченных множеств / Б. Д. Котляр // Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР. – 1987. – Т. 126, №3. – С. 469–472.
14. Sitaram A. On an analogue of the Wiener Tauberian theorem for symmetric spaces of the non-compact type / A. Sitaram // Pacific J. Math. – 1988. – V. 133. – P. 197–208.
15. Benyamini Y. Harmonic analysis of spherical functions on $SV(1, 1)$ / Y. Benyamini, Y. Weit // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1992. – V. 42. – P. 671–694.
16. Agranovsky M. L. Fourier transform on $SL_2(\mathbb{R})$ and Morera type theorem / M. L. Agranovsky // Sovo Math. Dokl. – 1978. – V. 19. – P. 1522–1525.
17. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
18. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
19. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
20. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185–194.
21. Zalcman L. Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem'. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
22. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
23. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
24. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
25. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.
26. Волчков В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 9–52.
27. Машаров П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 110–120.
28. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства круговых секторов / П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 166–171.
29. Masharov P. A. Morera type theorem for a family of circular sectors / P. A. Masharov // Contemporary problems of natural sciences. – 2014. – V. 1, № 1. – P. 97–99.
30. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.

31. Quinto E.T. Radon transform on curves in the plane / E. T. Quinto // Lect. Applied Math. – 1989. – V. 30. – P. 231–243.

Поступила в редакцию 25.08.2022 г.

THE POMPEII RADIUS FOR A FAMILY OF A SECTOR AND A SEMICIRCLE

P. A. Masharov

The value of the smallest radius of the circle in which this set of sets is the Pompey family is found. A set of circular sector and semicircle is considered as sets of sets. For the considered family, the Pompey radius turned out to be less than the minimum of the Pompey radii for each of the sets.

Keywords: the Pompeii set, the extreme version of the Pompeii problem, the Pompeii family, the Pompeii radius for the family, the circular sector.

Машаров Павел Анатольевич

кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
pavelmasharov@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Masharov Pavlo Anatoliyovych

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National University,
Donetsk, DPR