ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Основан в 1997 году

Серия А
Естественные науки

2/ 2023

Адрес редакции: ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, РФ, 283001

Тел: +7 (856) 302-92-56, 302-09-92

E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** http://donnu.ru/vestnikA

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 — Математика; 01.02.00 — Механика; 01.04.00 — Физика; 02.00.00 — Химические науки; 03.02.00 — Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

Печатается по решению Ученого совета ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет». Протокол № 9 от 29.09.2023 г.

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

***Серия А.* Естественные науки** **№ 2** Донецк **2023**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

***Series A*. Natural Sciences** **№ 2** Donetsk **2023**

CONTENTS

Mathematics

УДК 517.588

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ДЗЯДЫКА О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2023. *В. В. Волчков, Вит. В. Волчков*

Классическая теорема Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций уточняется в следующем направлении. Исследуется случай, когда вместо равенства рассматриваемых в теореме площадей требуются лишь оценки сверху для их разности в терминах специальных интегральных средних. При этом рассматриваются площади поверхностей над кругами, радиусы которых принадлежат заданному двухэлементному множеству из положительных чисел.

Ключевые слова: голоморфность, множества Помпейю, теоремы о двух радиусах, функции Бесселя, сферическое преобразование, свертка.

1. Введение.

Всюду в дальнейшем u, v — вещественные функции, заданные в области Ω на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Известная теорема Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций утверждает, что если $u, v \in C^1(\Omega)$, то для того чтобы хотя бы одна из функций $u + iv$, $u - iv$ была голоморфна в Ω, необходимо и достаточно, чтобы площади поверхностей графиков функций u, v, $\sqrt{u^2 + v^2}$, расположенные над любым компактным подмножеством из Ω, были равны [1]. Теорема Дзядыка получила дальнейшее развитие и уточнение в работах других авторов [2]– [4]. Например, было показано [2], что в ее формулировке вместо функции $\sqrt{u^2 + v^2}$ можно взять произвольную гладкую функцию $\varphi(u, v)$, с не равными нулю тождественно производными, для которой выполнены условия

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = 1 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0. \tag{1}$$

В частности, можно положить, $\varphi = \alpha u + \beta v$, где α, β — ненулевые вещественные постоянные, удовлетворяющие условию $\alpha^2+\beta^2 = 1$. Что касается снятия такого обременительного условия, как непрерывная дифференцируемость u, v, то известный пример функции Бора $w = x + i|y|$ на плоскости показывает, что даже условие Липшица не может обеспечить справедливость теоремы. Тем не менее, для некоторых φ теорема Дзядыка допускает усиление, если вместо непрерывности частных производных от u, v требовать лишь их существование всюду в области [3].

Для всякой функции $f \in C^1(\Omega)$ и компактного множества $A \subset \Omega$ символом $S(f, A)$ обозначим площадь поверхности графика f, расположенной над A. Положим также

$$f_1 = u, \quad f_2 = v, \quad f_3 = \varphi(u, v),$$

где $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ — заданная функция с условием (1). В работе [4, часть 5, гл. 4] рассмотрена следующая проблема.

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

Проблема 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— некоторая совокупность компактных подмножеств* Ω *и пусть* $u, v \in C^1(\Omega)$. *Предположим, что*

$$S(f_1, A) = S(f_2, A) = S(f_3, A) \quad \text{для любого} \quad A \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

При каких условиях на $\mathcal{A}$ *можно утверждать, что хотя бы одна из функций* $u + iv$, $u - iv$ *голоморфна в* Ω*?*

Например, если $\mathcal{A}$ состоит из всех компактных подмножеств Ω нулевой меры, то этого утверждать нельзя (условие (2) в этом случае выполняется для любых $u, v \in C^1(\Omega)$).

Обозначим символом $\mathcal{D}_\Omega$ множество всех пар u, v функций в Ω, таких что хотя бы одна из функций $u + iv$, $u - iv$ голоморфна в Ω. В [4, часть 5, гл. 4] получены положительные результаты, связанные с проблемой 1. В частности, показано, что если $u, v \in C^1(\Omega)$, то из (2) следует, что $(u, v) \in \mathcal{D}_\Omega$ в случае, когда $\mathcal{A} = \{gA\}$, где A — фиксированное множество со свойством Помпейю в Ω, а g — любой элемент группы евклидовых движений плоскости $\mathbb{C}$, для которого $gA \subset \Omega$ (определение и основные свойства множеств со свойством Помпейю см. в [4, часть 4], [5, гл. 19], [6, часть 2]).

В данной работе рассматривается случай, когда $\mathcal{A}$ состоит из всех замкнутых кругов в неограниченной области Ω, радиусы которых принадлежат заданному двухэлементному множеству из положительных чисел. При этом для шаров каждого из этих радиусов предполагается выполнение только одного из равенств в (2). Вместо другого равенства требуется лишь оценка сверху для разности соответствующих площадей в терминах некоторых интегральных средних.

2. Формулировка основного результата. Как обычно, для $z \in \mathbb{C}$ полагаем $x = \mathrm{Re} z$, $y = \mathrm{Im} z$, $\rho = |z|$, а если $z \neq 0$, то $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi]$. Если $r > 0$, обозначим

$$K_r(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| \le r\}, \quad K_r = K_r(0).$$

Для $R \ge r$ положим

$$U(R, r) = \{\zeta \in \mathbb{C} : R - r < |\zeta| < R + r\},$$

$$G_R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > R\}.$$

Определение 1. *Область* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *называется* r*-областью, если выполнены следующие условия:* 1) *каждая точка из* Ω *лежит в некотором замкнутом круге радиуса* r*, содержащимся в* Ω; 2) *множество центров всех замкнутых кругов радиуса* r*, содержащихся в* Ω*, является связным.*

Пусть J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν. Как известно, при $\nu > -1$ функция J_ν имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули являются вещественными и их множество симметрично относительно нуля (см. [7, гл. 7, п. 7.9]). Обозначим $\{\nu_1, \nu_2, \ldots\}$ — множество всех положительных нулей функции J_1, занумерованных в порядке возрастания. Пусть

$$\Lambda = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} : J_1(\alpha) = J_1(\beta) = 0, \ \alpha, \beta > 0 \right\}.$$

Для любого $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $\|t\|$ расстояние от t до ближайшего целого числа. Пусть также $[t]$ и $\{t\}$ — целая и дробная части числа t соответственно.

Определение 2. *Последовательность* $\{R_q\}_{q=1}^{\infty}$ *положительных чисел называется* r*-допустимой, если*

$$\varlimsup_{q\to\infty}\left\|\frac{\nu_m}{\pi r}R_q-\lambda\right\|>0$$

для любых $m\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Из следствия 1 в § 3 видно, что существуют сколь угодно редкие и быстро растущие r-допустимые последовательности.

Далее, если $f\in C^1(\Omega)$ и $K_r(z)\subset\Omega$, то положим

$$S(f,r,z)=S(f,K_r(z)).$$

Пусть также (i,j,k) — произвольная перестановка чисел $1,2,3$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $r_1,r_2>0$ фиксированы.

Перейдем к формулировке основного результата данной работы.

Теорема 1. *Пусть* $r_1,r_2>0$, $r_1/r_2\notin\Lambda$. *Пусть также* K *— компакт в* $\mathbb{C}$ *и множество* $\Omega=\mathbb{C}\backslash K$ *является* r*-областью при* $r=r_1,r_2$. *Предположим, что* $u,v\in C^1(\Omega)$ *и выполнены равенства*

$$S(f_i,r_1,z)=S(f_j,r_1,z), \tag{3}$$

$$S(f_j,r_2,z)=S(f_k,r_2,z), \tag{4}$$

когда круги $K_{r_1}(z)$ *и* $K_{r_2}(z)$ *соответственно лежат в* Ω. *Далее, пусть при любом* $\nu=1,2$ *последовательность* $\{R_{q,\nu}\}_{q=1}^{\infty}$ *является* r_ν*-допустимой и*

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\sqrt{R_{q,2}}}\int\limits_{U(R_{q,1},r_2)}|S(f_j,r_1,z)-S(f_k,r_1,z)|dxdy+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{R_{q,1}}}\int\limits_{U(R_{q,2},r_1)}|S(f_i,r_2,z)-S(f_j,r_2,z)|dxdy=0. \tag{5}$$

Тогда $(u,v)\in\mathcal{D}_\Omega$.

В § 3 данной работы содержатся необходимые в дальнейшем сведения и доказываются некоторые вспомогательные утверждения. Доказательство теоремы 1 приводится в § 4.

3. Вспомогательные утверждения.

Пусть $\nu>-1$. Рассмотрим четную целую функцию

$$I_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)2^{2m+\nu}},\quad z\in\mathbb{C}, \tag{6}$$

где Γ — гамма-функция. Функция I_ν связана с функцией Бесселя J_ν соотношением

$$I_\nu(z)=z^{-\nu}J_\nu(z),\quad z\neq0,$$

где, как обычно, $z^{-\lambda}=|z|^{-\lambda}e^{-i\lambda\arg z}$, $-\pi<\arg z\leq\pi$. Из (6) следует, что

$$I_1(0)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)2^\nu}.$$

Пусть $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в $\mathbb{C}$, Ω — область в $\mathbb{C}$. Теорема о среднем для решений уравнения Гельмгольца

$$\Delta f + cf = 0, \quad f \in C^2(\Omega), \tag{7}$$

при $c \in \mathbb{C}$ утверждает (см. [4, часть 1, гл. 7]), что равенство (7) эквивалентно условию

$$\int_{K_r(z)} f(\zeta) d\xi d\eta = 2\pi r^2 I_1(\sqrt{c} r) f(z), \tag{8}$$

выполненному для любого $K_r(z) \subset \Omega$.

Для каждого $r > 0$ обозначим через $V_r(\Omega)$ множество всех функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, имеющих нулевые интегралы по всем кругам $K_r(z) \subset \Omega$. Из вышесказанного следует, что если $f \in C^2(\Omega)$ и

$$\Delta f + \left(\frac{\nu_m}{r}\right)^2 f = 0 \tag{9}$$

для некоторых $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$, то $f \in V_r(\Omega)$.

Известно (см., например, [8, гл. 1, формула (14.6)]), что

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi}\,\Gamma\big(\nu + \frac{1}{2}\big)} \int_{-1}^{1} e^{izt} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \nu > -\frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (6) получаем оценку

$$|I_\nu(z)| \le \frac{e^{|\mathrm{Im}\, z|}}{2^\nu \Gamma\big(\nu + 1\big)}, \quad z \in \mathbb{C},\ \nu \ge -\frac{1}{2}. \tag{10}$$

Обозначим через $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C})$ пространство радиальных распределений в $\mathbb{C}$ с компактными носителями. Сферическое преобразование $\widetilde{T}$ распределения $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C})$ определяется равенством

$$\widetilde{T}(z) = \langle T(\zeta), I_0(z|\zeta|) \rangle$$

и является четной целой функцией переменной $z \in \mathbb{C}$. Для произвольного распределения T на $\mathbb{C}$ с компактным носителем преобразование Фурье-Лапласа имеет вид

$$\widehat{T}(z_1, z_2) = \left\langle T(\zeta), e^{-(z_1\xi + z_2\eta)} \right\rangle, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}.$$

Известно (см. [9, лемма 1]), что в случае $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C})$ выполнено равенство

$$\widetilde{T}(z) = \widehat{T}(z\cos\alpha, z\sin\alpha), \quad z, \alpha \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Из условия (8) следует, что если f удовлетворяет (7), то для любого $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C})$ с носителем в K_r

$$(f * T)(z) = \widetilde{T}(\sqrt{c}) f(z), \tag{12}$$

где $K_r(z) \subset \Omega$ и символ $*$ здесь и далее обозначает свёртку распределений.

Дифференциальное уравнение Бесселя имеет вид

$$z^2 g''(z) + z g'(z) + (z^2 - \nu^2) g(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \tag{13}$$

Общее решение уравнения (13) представимо в виде

$$g(z) = c_1 J_\nu(z) + c_2 N_\nu(z), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

где N_ν — функция Неймана порядка ν (см. [8, гл. 1]).

Для $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$ рассмотрим функции

$$\Phi_{k,m,r}(z) = J_k\Big(\frac{\nu_m}{r}\rho\Big)e^{ik\varphi}, \quad \Psi_{k,m,r}(z) = N_k\Big(\frac{\nu_m}{r}\rho\Big)e^{ik\varphi}.$$

Из (13) следует, что функция $\Phi_{k,m,r}$ удовлетворяет (9) в $\mathbb{C}$, а функция $\Psi_{k,m,r}$ удовлетворяет (9) в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда из (12) находим

$$(\Phi_{k,m,r} * T)(z) = \widetilde{T}\Big(\frac{\nu_m}{r}\Big)\Phi_{k,m,r}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

$$(\Psi_{k,m,r} * T)(z) = \widetilde{T}\Big(\frac{\nu_m}{r}\Big)\Psi_{k,m,r}(z), \quad z \in G_R \tag{15}$$

для любого $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{C})$ с носителем в K_R.

Далее нам потребуются следующие асимптотические формулы, выполненные при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \pi)$:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} z|}}{|z|^{3/2}}\right), \tag{16}$$

$$N_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} z|}}{|z|^{3/2}}\right), \tag{17}$$

где $z \to \infty$, $|\mathrm{arg} z| \le \pi - \varepsilon$ (см. [8, гл. 1]).

Пусть теперь $R > 0$ и $f \in L_{\mathrm{loc}}(G_R)$. Функции f соответствует ряд Фурье

$$f(z) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(z), \quad z \in G_R, \tag{18}$$

где

$$F_k(z) = \frac{e^{ik\varphi}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it})e^{-ikt}dt. \tag{19}$$

Из теоремы Фубини следует, что функции F_k определены почти всюду в G. Отметим также, что функции $|F_k(z)|$ являются радиальными в G_R.

Лемма 1. *Пусть $r > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует радиальная функция $T_m \in C(\mathbb{C})$ с носителем в K_r, такая что*

$$(\Phi_{k,l,r} * T_m)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{20}$$

$$(\Psi_{k,l,r} * T_m)(z) = 0, \quad z \in G_r \tag{21}$$

при всех $l \in \mathbb{N}$, $l \ne m$.

Доказательство. Рассмотрим радиальное распределение T_m, удовлетворяющее условию

$$\widetilde{T}_m(z) = \frac{J_1(rz)}{z(z^2-(\nu_m/r)^2)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{22}$$

Поскольку функция в правой части равенства (22) является целой и четной, из оценки (10) по теореме Пэли-Винера для сферического преобразования (см. [4, часть 1, гл. 6]) получаем, что носитель T_m содержится в K_r. Далее, из (22), (16) и (11) следует, что

$$\widehat{T}_m(x,y) = O\left(|z|^{-7/2}\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Это означает, что $\widehat{T}_m \in L(\mathbb{C})$. Отсюда и из формулы обращения для преобразования Фурье вытекает, что $T_m \in C(\mathbb{C})$. Используя теперь равенства (14), (15) и (22), получаем (20) и (21). □

Лемма 2. *Пусть* $0 < r < R$, $k \in \mathbb{Z}$, $f \in L(U(R,r))$, $g \in C(\mathbb{C})$, $\operatorname{supp} g \subset K_r$. *Тогда*

$$\left| \int\limits_{|z-R|\le r} F_k(z) g(z-R)\,dxdy \right| \le \frac{c}{R} \int\limits_{U(R,r)} |f(z)|\,dxdy,$$

где постоянная $c > 0$ *зависит только от* r *и* g.

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{z\in\mathbb{C}} |g(z)|$. Тогда

$$\left| \int\limits_{|z-R|\le r} F_k(z) g(z-R)\,dxdy \right| \le M \int\limits_{|z-R|\le r} |F_k(z)|\,dxdy. \tag{23}$$

Поскольку функция $|F_k(z)|$ радиальна, интеграл в правой части (23) не изменится, если R заменить на $Re^{i\alpha}$ при любом $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Поэтому

$$\int\limits_{|z-R|\le r} |F_k(z)|\,dxdy \le \frac{1}{N(R,r)} \int\limits_{U(R,r)} |F_k(z)|\,dxdy, \tag{24}$$

где $N(R,r)$ — количество непересекающихся открытых кругов радиуса r, содержащихся в $U(R,r)$. Каждый такой круг лежит в угле величины $2\arcsin\dfrac{r}{R}$ с вершиной в нуле, следовательно,

$$N(R,r) \ge \left[\pi\left(\arcsin\frac{r}{R}\right)\right]^{-1}. \tag{25}$$

Далее, используя (19), имеем

$$\int\limits_{U(R,r)} |F_k(z)|\,dxdy \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{R-r}^{R+r} \rho |f(\rho e^{it})|\,dt\,d\varphi = \int\limits_{U(R,r)} |f(z)|\,dxdy.$$

Из последнего неравенства и оценок (23), (24) и (25) получаем утверждение леммы 2. □

Лемма 3. *Пусть $r, R > 0$, $f \in L_{\text{loc}}(G_R)$. Тогда для того чтобы $f \in V_r(G_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $k \in \mathbb{Z}$ в области G_R было выполнено равенство*

$$F_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{k,m}\Phi_{k,m,r}(z) + b_{k,m}\Psi_{k,m,r}(z), \tag{26}$$

где $a_{k,m}, b_{k,m} \in \mathbb{C}$ и ряд сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'(G_R)$.

Доказательство. Данное утверждение является частным случаем теоремы об описании множества решений уравнения свертки, полученной в [4, часть 3, гл. 2]. □

Лемма 4. *Пусть $r > 0$, $\varepsilon > 0$ и множество $G \subset \mathbb{C}$ является объединением всех открытых кругов радиуса $r + \varepsilon$ с центрами на некоторой ломаной L. Пусть также $\zeta \in L$, $f \in V_r(G)$ и $f = 0$ в круге $|z - \zeta| < r + \varepsilon$. Тогда $f = 0$ в G.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что L является отрезком, одним из концов которого является точка $\zeta = 0$. Можно также считать, что длина l отрезка L меньше ε, поскольку в противном случае отрезок L можно разбить на отрезки длины меньше ε и последовательно доказывать утверждение для каждого из этих отрезков. В рассматриваемом случае утверждение следует из теоремы единственности для класса $V_r(G)$ (см. [4, часть 2, гл. 1]). □

Лемма 5. *Пусть $r > 0$, K — компакт в $\mathbb{C}$ и множество $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ является r-областью. Предположим, что $f \in V_r(\Omega)$ и для некоторой r-допустимой последовательности $\{R_q\}_{q=1}^{\infty}$ выполнено равенство*

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sqrt{R_q}} \int\limits_{U(R_q,r)} |f(z)|dxdy = 0. \tag{27}$$

Тогда $f = 0$.

Доказательство. Пусть $R > 0$ и $K \subset K_R$. Сначала докажем, что $f = 0$ в G_R. Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Из леммы 3 следует, что в области G_R имеет место равенство (26), где ряд сходится в пространстве $\mathcal{D}'(G_R)$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и радиальная функция $T_m \in C(\mathbb{C})$ с носителем в K_R определена в лемме 1. Используя (12), из (26) находим

$$\int\limits_{|z-R_q|\le r} F_k(z)T_m(z-R_q)dxdy = c\left(a_{k,m}J_k\left(\frac{\nu_m}{r}R_q\right) + b_{k,m}N_k\left(\frac{\nu_m}{r}R_q\right)\right),$$

где $R_q > r + R$ и $c \in \mathbb{C}$ — ненулевая постоянная, не зависящая от q. Из условия (27) и леммы 2 получаем, что

$$a_{k,m}J_k\left(\frac{\nu_m}{r}R_q\right) + b_{k,m}N_k\left(\frac{\nu_m}{r}R_q\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{R_q}}\right) \tag{28}$$

при $q \to \infty$. Докажем, что $a_{k,m} = b_{k,m} = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{k,m} \in \mathbb{R}$, $b_{k,m} \in \mathbb{R}$. Предположим противное, тогда $\sqrt{a_{k,m}^2 + b_{k,m}^2} \neq 0$ и существует $\alpha_{k,m} \in \mathbb{R}$, такое что

$$\frac{a_{k,m}}{\sqrt{a_{k,m}^2 + b_{k,m}^2}} = \sin\alpha_{k,m}, \qquad \frac{b_{k,m}}{\sqrt{a_{k,m}^2 + b_{k,m}^2}} = \cos\alpha_{k,m}.$$

Используя эти равенства и асимптотики (16) и (17) функций Бесселя и Неймана на бесконечности, из (28) имеем

$$\sin\left(\frac{\nu_m}{r}R_q - \frac{\pi(2k-1)}{4} + \alpha_{k,m}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad q\to\infty.$$

Это означает, что существует последовательность $\{n_q\}_{q=1}^{\infty}$ целых чисел, такая что

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{\nu_m}{r}R_q - \frac{\pi(2k-1)}{4} + \alpha_{k,m} - \pi n_q\right) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\left\|\frac{\nu_m}{\pi r}R_q - \lambda\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad q\to\infty, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{2k-1}{4} - \frac{\alpha_{k,m}}{\pi}.$$

Это противоречит r-допустимости последовательности $\{R_q\}_{q=1}^{\infty}$, следовательно, $a_{k,m} = b_{k,m} = 0$. Поскольку k и m произвольны, из (26) и (18) заключаем, что $f = 0$ в G_R. Учитывая, что Ω является r-областью, из определения 1 и леммы 4 получаем, что $f = 0$ в Ω. □

Лемма 6. *Пусть $\xi, \eta \in [0,1]$, $\xi \neq \eta$. Тогда для любой возрастающей последовательности $\{\alpha_q\}_{q=1}^{\infty}$ положительных чисел существует последовательность $\{\beta_q\}_{q=1}^{\infty}$ натуральных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\beta_q > \alpha_q$ при всех $q \in \mathbb{N}$;

2) при любом $m \in \mathbb{N}$ множество предельных точек последовательности дробных частей $\{\beta_q \nu_m\}$, $q = 1, 2, \ldots$ содержит точки ξ и η.

Доказательство. Известно, что при любом $m \in \mathbb{N}$ число ν_m трансцендентно (см., например, [7, гл. 7, п. 7.9]). Поэтому множеством предельных точек последовательности $\{\nu_m n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ является отрезок $[0,1]$. Пусть $\xi, \eta \in [0,1]$ и $\xi \neq \eta$. Согласно сказанному выше, при любом $m \in \mathbb{N}$ существуют последовательности $\{\xi_{q,m}\}_{q=1}^{\infty}$ и $\{\eta_{q,m}\}_{q=1}^{\infty}$ из натуральных чисел, такие что

$$\lim_{q\to\infty} \xi_{q,m} = \xi, \quad \lim_{q\to\infty} \eta_{q,m} = \eta.$$

Построим теперь последовательность $\{\beta_q\}$ следующим образом. Выберем $\beta_1 \in \{\xi_{q,1}\}$, $\beta_2 \in \{\eta_{q,1}\}$ так, что $\beta_1 > \alpha_1$ и $\beta_2 > \alpha_2$. Затем выбираем $\beta_3 \in \{\xi_{q,1}\}$, $\beta_4 \in \{\xi_{q,2}\}$, $\beta_5 \in \{\eta_{q,1}\}$, $\beta_6 \in \{\eta_{q,2}\}$ с условием $\beta_j > \alpha_j$ при всех $j = 3,4,5,6$. На следующем шаге выбираем $\beta_7 \in \{\xi_{q,1}\}$, $\beta_8 \in \{\xi_{q,2}\}$, $\beta_9 \in \{\xi_{q,3}\}$, $\beta_{10} \in \{\eta_{q,1}\}$, $\beta_{11} \in \{\eta_{q,2}\}$, $\beta_{12} \in \{\eta_{q,3}\}$ с сохранением условия $\beta_j > \alpha_j$ при любом $j \leq 12$. Повторяя этот процесс, получим последовательность $\{\beta_q\}_{q=1}^{\infty}$, удовлетворяющую требуемым условиям 1) и 2). □

Следствие 1. *Пусть $r > 0$. Тогда для любой возрастающей последовательности $\{\alpha_q\}_{q=1}^{\infty}$ существует r-допустимая последовательность $\{R_q\}_{q=1}^{\infty}$, такая что $R_q > \alpha_q$ при всех q.*

Доказательство. Пусть $\xi, \eta \in (0,1)$, $\xi \neq \eta$. Положим $R_q = \pi r \beta_q$, где $\{\beta_q\}_{q=1}^{\infty}$ — последовательность из леммы 6, построенной для последовательности $\{\pi r \alpha_q\}_{q=1}^{\infty}$ вместо $\{\alpha_q\}_{q=1}^{\infty}$. Тогда для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\left\|\frac{\nu_m}{\pi r}R_q - \lambda\right\| = \overline{\lim_{q\to\infty}}\|\nu_m \beta_q - \lambda\| =$$

$$= \overline{\lim_{q\to\infty}} \ \|\{\nu_m\beta_q\} - \{\lambda\}\| \geq \max\{\|\xi - \{\lambda\}\|, \|\eta - \{\lambda\}\|\} > 0.$$

Это означает, что последовательность R_q является r-допустимой и утверждение доказано. □

4. Доказательство основного результата. Перейдем к доказательству теоремы 1. Как известно, для любой функции $f \in C^1(K_r)(z)$ площадь поверхности графика f, расположенного над кругом $K_r(z)$, равна

$$S(f, K_r(z)) = \int\limits_{K_r(z)} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right)^{1/2} d\xi d\eta.$$

Пусть $m \in \{1, 2, 3\}$. Для данных $u, v \in C^1(\Omega)$ положим

$$g_m(\xi, \eta) = \left(1 + \left(\frac{\partial f_m}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_m}{\partial \eta}\right)^2\right)^{1/2}, \quad \xi + i\eta \in \Omega.$$

Тогда имеем

$$S(f_m, r, z) = \int\limits_{K_r(z)} g_m(\xi, \eta) d\xi d\eta = (g_m * \chi_r)(z)$$

где χ_r — индикатор круга K_r, $z \in \Omega$, $K_r(z) \subset \Omega$, $r = r_1, r_2$. Пусть

$$h_1 = g_i - g_j, \quad h_2 = g_j - g_k. \tag{29}$$

Тогда условия (3) и (4) можно записать в виде

$$h_1 * \chi_{r_1} = 0, \quad h_2 * \chi_{r_2} = 0. \tag{30}$$

Кроме того, из (5) следует, что

$$\int\limits_{U(R_{q,2}, r_1)} |h_1 * \chi_{r_2}(z)| dx dy = o\left(\sqrt{R_{q,1}}\right) \tag{31}$$

и

$$\int\limits_{U(R_{q,1}, r_2)} |h_2 * \chi_{r_1}(z)| dx dy = o\left(\sqrt{R_{q,2}}\right) \tag{32}$$

при $q \to \infty$. Полагая $H_1 = h_1 * \chi_{r_2}$, $H_2 = h_2 * \chi_{r_1}$, из (30) находим

$$H_1 * \chi_{r_1} = 0, \quad H_2 * \chi_{r_2} = 0$$

в области G_R при достаточно большом $R > 0$. Используя (31) и (32), из этих равенств и леммы 5 получаем $H_1 = H_2 = 0$ в G_R. Таким образом,

$$h_1 * \chi_{r_2} = 0 \quad \text{и} \quad h_2 * \chi_{r_1} = 0 \quad \text{в} \quad G_R.$$

Сопоставляя эти равенства с (30), по теореме о двух радиусах (см. [10]) имеем $h_1 = h_2 = 0$ в G_R. Снова используя равенства (30), отсюда и из леммы 4 заключаем, что $h_1 = h_2 = 0$ в Ω. В силу (29), это означает, что $g_i = g_j = g_k$ в Ω. Тогда площади поверхностей графиков функций f_1, f_2, f_3, расположенных над любым компактным подмножеством $E \subset \Omega$, равны. Отсюда и из теоремы Дзядыка заключаем, что $(u, v) \in \mathcal{D}_\Omega$. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык В. К. Геометрическое определение аналитических функций / В. К. Дзядык // УМН. – 1960. – Т. 15. – Вып. 1(91). – С. 191–194.
2. Goodman A. On the criterium of analytical function / A. Goodman // Amer. Math. Monthly. – 1964. – V. 71. – P. 265–267.
3. Трохимчук Ю. Ю. Об одном критерии аналитичности функций / Ю. Ю. Трохимчук // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 10. – С. 1410–1418.
4. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
5. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.
6. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
7. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973, 1974. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
8. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б. Г. Коренев. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
9. Volchkov V. V. Tangent approximation by solutions of the convolution equation / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Issues of Analysis. – 2022. – V. 11(29). – Issue 3. – P. 125–142.
10. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах / В. В. Волчков // Мат. сб. – 1995. – Т. 186, № 6. – С. 15–34.

Поступила в редакцию 29.07.2023 г.

ANALOGS OF DZYADYK'S THEOREM ON THE GEOMETRIC DESCRIPTION OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Dzyadyk's classical theorem on the geometric description of holomorphic functions is refined in the following direction. The case is investigated when, instead of equality of the areas considered in the theorem, only upper estimates are required for their difference in terms of special integral averages. In this case, the areas of surfaces over circles whose radii belong to a given two-element set of positive numbers are considered.

Keywords: holomorphicity, Pompeiu sets, two-radii theorems, Bessel functions, spherical transform, convolution.

Волчков Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
valeriyvolchkov@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Valeriy Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk State University, Donetsk, Russia

Волчков Виталий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
volna936@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Vitaliy Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 517.988.28

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С МНОЖЕСТВАМИ ПОМПЕЙЮ

© 2023. *В. В. Волчков, И. С. Пилипенко*

Рассматривается локальный вариант проблемы Помпейю для семейства множеств, состоящего из единичного квадрата и единичного полукруга. Найдена нижняя оценка для значения радиуса круга, при выполнении которой данное семейство будет семейством Помпейю на этом круге.

Ключевые слова: проблема Помпейю, локальное свойство Помпейю, множество Помпейю, семейство Помпейю.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Часть этой группы, оставляющая компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ внутри B, традиционно обозначим $\mathrm{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) : \lambda A \subset B\}$, $\mathbb{B}^n_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ — шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$, если всякая локально суммируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$, равна нулю почти всюду.

Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств А. Данная статья связана с локальным вариантом проблемы Помпейю на шаре. Приведём одну из её возможных постановок.

Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}^n_R$ и равенство $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$ выполняется при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ таких, что $\lambda A \subset \mathbb{B}^n_R$. Если из условия следует, что $f = 0$ п.в. в $\mathbb{B}^n_R$, будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}^n_R$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)$.

Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R(по сравнению с размерами множества) выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)$ [1–3]. Поэтому представляет интерес следующая проблема.

Проблема 1. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение

$$\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)\}.$$

Несколько общих результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем [1, 2], а также В.В. Волчковым [3, глава 4, §1-2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, можно найти в [3–9].

Укажем некоторые примеры множеств, для которых известно точное значение $\mathcal{R}(A)$.

1. Пусть A – правильный треугольник со стороной a. Тогда $\mathcal{R}(A) = a\sqrt{3}/2$ ([10], В.В. Волчков, 1996).

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

2. Пусть A – правильный m-угольник со стороной длины l. Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \begin{cases} l\mathrm{ctg}(\pi/2m)/2, & \text{если } m \text{ - нечетно;} \\ l\sqrt{1+4\mathrm{ctg}^2(\pi/m)}/2, & \text{если } m \text{ - четно} \end{cases}$$

([3], В.В. Волчков, 2000-2003).

3. Пусть A – треугольник Рело ширины 1 в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathcal{R}(A) = 1$ ([11], П.А. Машаров, 2001).

4. Пусть A – куб в с ребром длины 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{n+3}/2$ ([12], В.В. Волчков, 1996).

5. Пусть A – полушар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{5}/2$ ([3], В.В. Волчков, 1996).

6. Пусть $A(h)$ – сегмент шара единичного радиуса высоты h в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{R}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{8h-3h^2}/2, & 1 < h \leqslant 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2 \end{cases}$$

([13], П.А. Машаров, 2011).

7. Пусть A – невыпуклый четырёхугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(\sqrt{3}/2, -1/2)$, $(\sqrt{3}/2 - h, 0)$, $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, $h \in (0, \sqrt{3}/2)$. Тогда

$$\mathcal{R}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0, \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2) \end{cases}$$

[14], Н.С. Иванисенко, П.А. Машаров, 2014).

Также известны значения величины $\mathcal{R}(A)$ для случаев, когда A – параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ ([12] статья 1, В.В. Волчков, 1998-2000), эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ ([3], В.В. Волчков, 2001), плоский круговой сектор ([15], П.А. Машаров, 2000), половина кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ ([16], Л.В. Елец, П.А. Машаров, 2009), замыкание разности двух плоских квадратов ([17], П.А. Машаров, 2016), другие множества.

Рассмотрим теперь локальный вариант проблемы Помпейю для набора множеств. Пусть имеем некоторое фиксированное семейство компактных множеств $\{A_j\}_{j=1}^m$. Если для комплекснозначной локально суммируемой в шаре $\mathbb{B}_R^n$ функции f из выполнения условия (1) при всех $A = A_j (j = \overline{1,m})$ и $\lambda_j \in \mathbf{M}(n)$ таких, что $\lambda_j A_j \subset \mathbb{B}_R^n$ следует, что $f = 0$ п.в. в $\mathbb{B}_R^n$, будем говорить, что $\{A_j\}_{j=1}^m$ является семейством Помпейю на шаре $\mathbb{B}_R^n$ и обозначать $\{A_j\} \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$.

Аналогично проблеме 1 возникает (см., например, [18–20])

Проблема 2. Для данного семейства $\{A_j\}_{j=1}^m$ компактных множеств $A_j \subset \mathbb{R}^n$ найти значение

$$\mathcal{R}(\{A_j\}_{j=1}^m) = \inf\{R > 0 : A_j \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n), j = 1, ..., m\},$$

Отметим, что если по крайней мере для одного $k \in \{1, ..., m\}$ множество $A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$, то все семейство $\{A_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Отсюда следует

Лемма 1. *Для любой совокупности множеств* $\{A_j\}_{j=1}^m$ *верно неравенство*

$$\mathcal{R}(\{A_j\}_{j=1}^m) \leqslant \min\{\mathcal{R}(A_1), ..., \mathcal{R}(A_m)\}.$$

Возникает вопрос: существует ли набор множеств $\{A_j\}_{j=1}^{m}$, для которого неравентсво в лемме 1 было бы строгим? Примеры совокупностей таких множеств построены в [18, 19, 21].

Предметом данного исследования является значение величины $\mathcal{R}(\{K, D\})$ из формулировки проблемы 2 для ранее не рассмотренного семейства, состоящего из единичного полукруга D и единичного квадрата K в $\mathbb{R}^2$:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant \frac{1}{2}, |y| \leqslant \frac{1}{2}\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $R > \frac{\sqrt{65}}{8}$ и $f \in L_{loc}(\mathbb{B}_R)$. Пусть также f имеет нулевые интегралы по всем квадратам и полукругам в $\mathbb{B}_R$, конгруэнтным K и D соответственно. Тогда $f = 0$.*

Вспомогательные обозначения и утверждения

Всюду далее считаем размерность пространства $n = 2$, круг (как и выше) обозначаем $\mathbb{B}_R = \mathbb{B}^2_R$. Для $R > 0, r \in \mathbb{R}$ рассмотрим $\mathbb{B}(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : r < |x| < R\}$ — кольцо, если $r \geqslant 0$, или круг $\mathbb{B}_R$, если $r < 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого множества $B \subset \mathbb{R}^2$ под $C^k(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в B, $C(B)$ — класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \cap_{k=1}^{\infty} C^k(B)$.

Под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс локально суммируемых в B функций, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^k(B)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$.

Для обозначения частной производной функции $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ по переменным x и y будем использовать запись $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ соотвественно.

Если множество $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо по Лебегу, его меру Лебега будем обозначать как $\mathrm{mes}(A)$.

При исследовании локальных вариантов проблемы Помпейю важную роль играет величина $r^*(A) = \inf\{r > 0 : \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_r) \neq \varnothing\}$, поскольку для широкого класса множеств справедлива оценка $\mathcal{R}(A) \leqslant 2r^*(A)$ [3].

Нетрудно видеть, что для полукруга D значение $r^*(D) = 1$, а для квадрата K значение $r^*(K) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, то имеет смысл рассматривать только $R > 1$, поскольку при $R \leqslant 1$ множество $\mathrm{Mot}(D, \mathbb{B}_r) = \varnothing$. Учитывая лемму 1 и равенство $\mathcal{R}(K) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, получаем оценку $1 \leqslant \mathcal{R}(\{L, D\}) \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только значения

$$1 < R < \frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

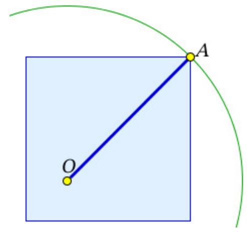

Рис. 1. Нахождение sup(A)

Обозначим вершины квадрата K: A_K, B_K, C_K, D_K, полукруга D: Q_D, W_D.

Пусть $O(0, 0)$, $\rho(e) = \rho(O, \lambda e) = \inf\{\| \overrightarrow{OX} \|: X \in e\}$ — расстояние от центра круга до элемента λe множества λE (полукруга λD

или квадрата λK) при условии $\lambda \in \mathrm{Mot}(E, \mathbb{B}_R)$. В зависимости от значения R, удовлетворяющего (2), рассмотрим интересующие нас максимальные и минимальные возможные расстояния до соотвествующих элементов:

$$\sup(A) = \sup\{\rho(A_K)\},\ \inf(A) = \inf\{\rho(A_K)\},$$
$$\sup(AB) = \sup\{\rho(A_K B_K)\},\ \inf(AB) = \inf\{\rho(A_K B_K)\},$$
$$\sup(QW) = \sup\{\rho(Q_D W_D)\},\ \inf(QW) = \inf\{\rho(Q_D W_D)\}.$$

Так как $r^*(K) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ и выполнено (2), то всегда можно будет так расположить квадрат K внутри круга $\overline{\mathbb{B}_R}$, что его вершина окажется на границе. Значит $\sup(A) = R$ (см. рис. 1).

Так как рассматриваем круг радиуса $1 < R < \frac{\sqrt{5}}{2}$, минимальное расстояние до одной вершины квадрата достигается в случае, если до противоположной вершины рассмотяние максимальное. Значит $\inf(A) = \sqrt{2} - R$ (см. рис. 2).

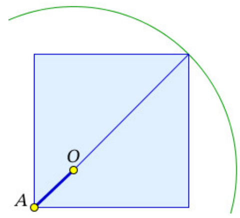

Рис. 2. Нахождение inf(A)

Найдём максимальное расстояние до стороны квадрата $\lambda K \subset \overline{\mathbb{B}_R}$. Для этого расположим квадрат так, чтобы концы одной стороны лежали на окружности (см. рис. 3). Проведём среднюю линию квадрата MN (она будет проходить через центр круга – т.O). Рассмотрим треугольник $\triangle OAN$: $\angle ONA = 90°$, $OA = R$, $NA = \frac{1}{2}$. Значит $ON = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$ и $\sup(AB) = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$.

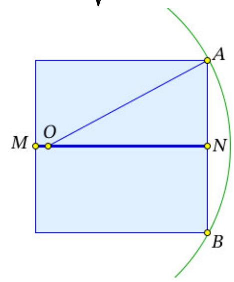

Рис. 3. Нахождение sup(AB) и inf(AB)

Минимальное расстояние до одной стороны квадрата достигается в случае, если до противоположной стороны расстояние максимальное. Значит $\inf(AB) = 1 - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$.

Осталось найти максимальное расстояние до стороны полукруга $\lambda D \subset \overline{\mathbb{B}_R}$. Для этого расположим полукруг так, чтобы концы стороны лежали на окружности. Проведём перпендикуляр на эту сторону: $OH \perp QW$. Тогда $QH = HW = 1, OW = R$. Из $\triangle WOH$ получаем $\sup(QW) = OH = \sqrt{R^2 - 1}$ (см. рис. 4).

Так как $R > 1$, то полукруг можно расположить так, что его прямолинейный участок границы сожержит точку O, поэтому $\inf(QW) = 0$.

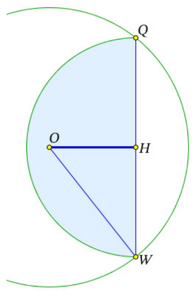

Рис. 4. Нахождение sup(QW)

Запишем вместе результаты геометрических рассуждений в виде леммы.

Лемма 2. *При выполнении (2) имеют места равенства:*

$$\sup(A) = R, \inf(A) = \sqrt{2} - R$$
$$\sup(AB) = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}, \inf(AB) = 1 - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$$
$$\sup(QW) = \sqrt{R^2 - 1}, \inf(QW) = 0$$

Лемма 3. *Неравенство* $\sup(QW) > \inf(AB)$ *или*

$$\sqrt{R^2 - 1} > 1 - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} \tag{3}$$

выполняется при всех $R > \frac{\sqrt{65}}{8}$.

Доказательство. Решим данное неравенство, с учётом, что $R > 0$ (так как это радиус). Область допустимых значений $R \geqslant 1$. Преобразуем (3) к виду $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} > \frac{5}{8}$, откуда $R^2 > \frac{65}{64}$. С учётом ОДЗ получим, что $R > \frac{\sqrt{65}}{8}$. □

Лемма 4. *Если $f \in C(\mathbb{B}_R)$ и для любого единичного квадрата $K \subset \mathbb{B}_R$*

$$\int_K f(x,y)dxdy = 0,$$

то смешанная разность от f по вершинам любого единичного квадрата из $\mathbb{B}_R$ равна 0.

Доказательство. Достаточно продифференцировать по x и по y равенство

$$\int_x^{x+1}\int_y^{y+1} f(u,v)dudv = 0.$$

$$\left(\int_x^{x+1}\int_y^{y+1} f(u,v)\,du\,dv\right)''_{yx} = \left(\int_x^{x+1}\big(f(u,y+1) - f(u,y)\big)\,du\right)'_x =$$
$$(f(x+1,y+1) - f(x+1,y)) - (f(x,y+1) - f(x,y)) = 0$$
$$f(x+1,y+1) + f(x,y) = f(x,y+1) + f(x+1,y)$$

□

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{d}$ — частная (в том числе и смешанная) производная $f \in \mathfrak{P}^\infty(A,B)$ любого порядка. Тогда $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^\infty(A,B)$.*

Доказательство. Учитывая определение класса $\mathfrak{P}^\infty(A,B)$, достаточно доказать, что если f имеет нулевые интегралы, то и $\mathfrak{d}f$ обладает этим же свойством.

Для произвольного $\lambda \in \mathrm{Mot}(A,B)$ и любого $\zeta = (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, норма которого меньше некоторого $\varepsilon > 0$, $\lambda A + \zeta \subset B$, значит

$$0 = \int_{\lambda A+\zeta} f(x,y)dxdy = \int_{\lambda A} f(x+\xi, y+\eta)dxdy.$$

Дифференцируя это равенство по ξ и η и полагая в полученных равенствах $\xi = \eta = 0$, приходим к $\int_{\lambda A}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dxdy = \int_{\lambda A}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dxdy = 0$, что означает $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^\infty(A,B)$ для первых двух частных производных.

Аналогично можем получить результат и для других частных производных (в том числе и смешанных). В частности получим, что $F(x,y) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} \in \mathfrak{P}^\infty(A,B)$. □

Лемма 6. *Пусть функция $f \in C^k(\mathbb{B}_R)$. Все производные от f k-го порядка равны нулю тогда и только тогда, когда f — многочлен степени не выше $k-1$.*

Доказательство необходимости. Необходимость очевидна в силу правил дифференцирования функции многих переменных, дифференцирования суммы и произведения с константой. □

Доказательство достаточности. Разобьём доказательство достаточности на два этапа. Сначала докажем аналогичное утверждение для функции одной переменной, т.е. докажем, что если функция $f(x) \in C^k[-R,R]$ и её производная k-го порядка равна 0, тогда $f(x)$ — многочлен степени $k-1$.

i. Рассмотрим условие теоремы как дифференциальное уравнение:

$$f^{(k)} = 0.$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение k-го порядка. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид: $\lambda^k = 0$. $\lambda = 0$ — его единственный корень кратности k. В таком случае решением данного дифференциального уравнения является функция

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{k-1} x^{k-1},$$

где $a_0, a_1, ...a_{k-1}$ — произвольные постоянные. Таким образом, утверждение для функции одной переменной доказано.

ii. Частные производные по x (или y) от функции $f(x, y)$ получаем при дифференцировании функции по x (или y) в предположении, что y (или x) считается постоянным.

Тогда для частной производной порядка k по x решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, y) = 0$$

является функция

$$f(x, y) = a_0(y) + a_1(y)x + a_2(y)x^2 + ... + a_{k-1}(y)x^{k-1},$$

где $a_0(y), a_1(y), ...a_{k-1}(y)$ — некоторые функции переменной y.

Применяя уже доказанное утверждение для случая одной переменной, из этого равенства получаем, что $a_0(y), a_1(y), ...a_{k-1}(y)$ — многочлены степеней не выше $k-1, ..., 0$ соответственно. Отсюда следует утверждение леммы 6. $\square$

Лемма 7. *Пусть $f(x, y)$ — многочлен, т.е. $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x^i y^j$. Пусть $\int_{\lambda A} f(x, y)dxdy = 0$ $\forall \lambda$ $\mathit{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \boldsymbol{M}(2) : \lambda A \subset B\}$, где A — компакт в $\mathbb{R}^2$ ненулевой меры, B — некоторое открытое множество. Тогда $f \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{d}$ — один из следующих дифференциальных операторов: $\frac{\partial}{\partial x}$ или $\frac{\partial}{\partial y}$. Из леммы 5 следует, что если f имеет указанные нулевые интегралы, то и $\mathfrak{d} f$ также удовлетворяет этому условию.

Отсюда при любых k и l получаем соотношение $\int_{\lambda A} a_{kl} dxdy = 0$. Поскольку $\mathrm{mes}(\lambda A) > 0$, приходим к заключению, что $f = 0$. $\square$

Лемма 8. *Предположим, что $\delta > 0$ и функция f непрерывна в области $\mathbb{B}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \delta, \frac{\sqrt{2}}{2} + \delta)$. Пусть также смешанная разность от f по вершинам любого единичного квадрата, все вершины которого лежат в $\mathbb{B}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \delta, \frac{\sqrt{2}}{2} + \delta)$, равна 0.*

Тогда

$$f(x, y) = c_0 x^2 + c_0 y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3, \tag{4}$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — фиксированные константы.

Доказательство леммы 8 содержится в [3].

Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, можно считать, что $f \in C^\infty(\mathbb{B}_R)$ (в противном случае можно применить стандартный приём сглаживания). Пусть R удовлетворяет условию (2) и $R > \frac{\sqrt{65}}{8}$. Тогда выполнено неравенство

$$1 > 2(\sqrt{2} - R). \tag{5}$$

Рассмотрим кольцо

$$\mathbb{B}(\sqrt{2} - R, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\sqrt{2} - R)^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$$

Применяя лемму 4, получаем, что f удовлетворяет условиям леммы 8. Тогда выполнена формула (5), т.е. $f(x,y) = c_0x^2 + c_0y^2 + c_1x + c_2y + c_3$.

Рассмотрим отдельно одну из частных производных третьего порядка данной функции: $F(x,y) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} = 0$. Заметим, что $F \equiv 0$ в $\mathbb{B}(\sqrt{2} - R, R)$ и удовлетворяет условию теоремы 1 в силу леммы 5.

Поскольку выполнено неравенство (4), функция $F = 0$ и в большем кольце

$$\mathbb{B}\Big(1 - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}, R\Big) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(1 - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}\Big)^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$$

(см. [22]).

Так как выполнено и неравенство (3) получаем, с учётом равенств из леммы 2, что $F = 0$ во всём $\mathbb{B}_R$ (см. [23]).

Таким образом, $F(x,y) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} = 0$ во всём $\mathbb{B}_R$. В силу произвольности выбора взятой производной от функции $f(x,y)$, можем утверждать, что все производные третьего порядка от функции f равны нулю в $\mathbb{B}_R$. Тогда, согласно лемме 6, f – многочлен степени не выше 2. Отсюда из леммы 7 следует, что $f = 0$. $\square$

Выводы

В силу леммы 1 для рассматриваемого семейства множеств из единичного квадрата K и единичного полукруга D имеет место верхняя оценка

$$\mathcal{R}(\{K, D\}) \leqslant \min\{\mathcal{R}(K), \mathcal{R}(D)\} = \sqrt{5}/2,$$

где

$$\mathcal{R}(\{K, D\}) = \inf\{R > 0 : \{K, D\} \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)\}.$$

В данной работе установлена нижняя оценка для значения радиуса круга, при выполнении которой семейство из единичного квадрата и единичного полукруга будет семейством Помпейю на этом круге. Этот результат может быть полезен в дальнейшем для полного решения проблемы 2 для рассматриваемого семейства множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berenstein, C. A. Le probleme de Pompeiu locale [Text] / C. A. Berenstein. – J. Anal. Math, 1989. – V.52. – P. 133-166.
2. Berenstein, C. A. A local version of the two-circles theorem [Text] / C. A. Berenstein. – Israel J. Math, 1986. – V.55. – P. 267-288.
3. Volchkov, V. V. Integral Geometry and Convolution Equations [Text] / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
4. Zalcman, L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations [Text] / L. Zalcman // ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185-194.
5. Zalcman, L. Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem'. In: Radon Transforms and Tomograhhy [Text] / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278 – P. 69-74.
6. Volchkov, V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces [Text] / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
7. Волчков, В. В. Экстримальные задачи интегральной геометрии [Текст] / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков //Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1 – С. 51-79.
8. Волчков, В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии [Текст] / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков //Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные гауки. – 2021. – № 2 – С. 9-52.
9. Машаров, П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам [Текст] / П. А. Машаров //Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2 – С. 110-120.

10. Волчков, В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры [Текст] / В. В. Волчков //Матем. заметки. – 1996. –Вып.60 № 6 – С. 804-809.
11. Машаров, П. А. Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело [Текст] / П. А. Машаров //Вiсник днiпропетровського унiверситету. Математика. – 2001. – Вип. 6 – С. 72-81.
12. Волчков, В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю [Текст] / В. В. Волчков //Матем. сборник. – 1998. – Вып. 189 № 7 – С. 3-22.
13. Машаров, П. А. Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар [Текст] / П. А. Машаров //Труды ИПММ. – 2011. – Вип. 23 – С. 163-171.
14. Иванисенко, Н. С. Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника [Текст] / Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров //Труды ИПММ. – 2014. – Вип. 28 – С. 76-83.
15. Машаров, П. А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю [Текст] / П. А. Машаров //Доп. НАН України. – 2001. – № 7 – С. 25-29.
16. Елец, Л. В. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю [Текст] / Л. В. Елец, П. А. Машаров //УМЖ – 2009. – Вип. 61 – С. 61-72.
17. Машаров, П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества [Текст] / П. А. Машаров //Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1 – С. 87-97.
18. Машаров, П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата [Текст] / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т.34 – С. 85-92.
19. Машаров, П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства круговых секторов [Текст] / П. А. Машаров //Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 166-171.
20. Masharov, P. A. Morera type theorem for a family of circular sectors [Text] / P. A. Masharov // Contemporary problems of nstural sciences. – 2014. – V. 1,№ 1. – P. 97-99.
21. Машаров, П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга [Текст] / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022. – № 2 – С. 77-88.
22. Волчков, В. В. О функциях с нулевыми интегралами по кубам [Текст] / В. В. Волчков // Укр.мат.журн. – 1991. – Т.43 – № 6 – С. 859-863.
23. Волчков, В. В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю [Текст] / В. В. Волчков // Математичские заметки. – 1996. – Т.59 – № 5 – С. 671-680.

Поступила в редакцию 14.08.2023 г.

EXTREMAL PROBLEMS RELATED TO POMPEIU SETS

V. V. Volchkov, I. S. Pilipenko

A local version of the Pompeiu problem is considered for a family of a unit square and a unit semidisk. A lower estimate has been set for the value of the radius of the disk on which this family will be the Pompeiu family.

Keywords: the Pompeiu problem, the local Pompeiu property, the Pompeiu set, the Pompeiu family.

Волчков Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, Россия
valeriyvolchkov@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Valeriy Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk State University, Donetsk, Russia

Пилипенко Ирина Сергеевна
магистрант ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, Россия
irinasergpilipenko@gmail.com

Pilipenko Irina Sergeevna
Graduate student, Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 517.988.28

КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ И ЛОКАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ПОМПЕЙЮ

© 2023. ***В. В. Волчков, К. В. Тимофеева***

Рассмотрена локальная проблема Помпейю для множества единичных квадратов, содержащихся в открытом круге. Получена точная характеристика максимальной гладкости ненулевых функций, заданных в открытом круге, и имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам в этом круге.

Ключевые слова: проблема Помпейю, свойство Помпейю, множества со свойством Помпейю, квазианалитические функции, локальная теорема о двух радиусах для квазианалитических функций.

Введение. В данной работе исследуются аналоги проблемы Помпейю и связанные с ней вопросы для функций с нулевыми интегралами по замкнутым единичным квадратам, лежащим в открытом круге. Проблема Помпейю в евклидовом случае может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$$

при всех $\lambda \in M(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A.

Ряд результатов в этой задаче был получен в первой половине XX века румынским математиком Помпейю (см. [1, 2]). Также, описанием класса $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ занимались и другие математики, такие как К.А. Беренстейн, Р. Гэй (см. [3]), Л. Зальцман и другие (см. [4–6]).

Постановка задачи.

На данный момент, для многих конкретных случаев есть ряд достаточных условий, с помощью которых можно определить имеет ли множество свойство Помпейю [2]. В работе будет рассмотрен локальный вариант проблемы Помпейю в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, а именно, когда функция f задана на открытом круге $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$, и имеет нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам, лежащим в B_R. При этом рассматриваются функции, которые удовлетворяют условию квазианалитичности в круге. Таким образом, исследуется следующая проблема.

Проблема 1. Исследовать функции f в круге B_R, имеющие нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам, лежащим в B_R, и удовлетворяющие условию квазианалитичности.

Ранее в литературе (см. [4, 7, 8]) аналогичная задача решалась для локально суммируемых функций. Некоторые результаты, связанные с проблемой 1, были получены в [9]

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

и [10]. Цель данной работы показать, что условие квазианалитичности, используемое в [9] и [10], является точным.

Пусть $\mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость, $B_R = x = (x_1, x_2) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R$. Для последовательности $\mu = \{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел обозначим через $C^{\mu}(B_R)$ множество функций $f \in C^{\infty}(B_R)$ таких, что

$$\sup_{x \in B_r} |(\partial^{\alpha} f)(x)| \leq M_{|\alpha|}$$

где ∂^{α} – оператор частного дифференцирования порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

Ранее вторым автором был получен результат (см. [9, 10]), который можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f \in C^{\mathscr{M}}(B_R), R > \frac{\sqrt{2}}{2}$ и имеет нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам, лежащим в круге B_R. Тогда, если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{1/q}} = +\infty, \tag{1}$$

то $f \equiv 0$ в B_R.

В случае, когда для последовательности $\mu = \{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ выполняется (1), функция f называется квазианалитической в круге B_R.

Возникает вопрос: насколько условие (1) окончательное? В данном работе мы покажем, что если (1) не выполнено, то при $\frac{\sqrt{2}}{2} < R < \frac{\sqrt{5}}{2}$ из равенства нулю интегралов по единичным квадратам не следует, что функция $f \in C^{\infty}(B_R)$ равна нулю в B_R.

Вспомогательные обозначения и утверждения.

В работе [11] была доказана локальная теорема о двух радиусах для квазианалитических классов функций, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, лежащим в B_R . Сформулируем соответствующий результат в виде теоремы.

Введём следующие обозначения: $\Lambda_n = \{\nu_1, \nu_2, ...\}$ — последовательность всех положительных корней функции Бесселя $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания; E_n — множество чисел вида α/β, где $\alpha, \beta \in \Lambda_n$.

Теорема 2. *Пусть $E = \{r_1, r_2\}, R > r_2 > r_1, r_1 + r_2 > R, f \in C^{\infty}(B_R)$ и выполнено условие $\int_{|y| \leq r} f(x + y) dy = 0$ при всех $r \in E, x \in B_{R-r}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

а)если $r_1/r_2 \notin E_n$ и существует последовательность положительных чисел $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{\frac{1}{q}}} = \infty, \tag{2}$$

и для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\sup_{x \in B_{r_1}} |(\partial^{\alpha} f)(x)| \leq M_{|\alpha|}, \tag{3}$$

то $f = 0$.

2) для любой последовательности положительных чисел $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q\geq j} M_q^{\frac{1}{q}}} < \infty \tag{4}$$

существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$ с указанными нулевыми интегралами, у которой

$$\sup_{x\in B_R} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|} \tag{5}$$

при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Доказательство теоремы можно посмотреть в работе [11].

Утверждения 1), 2) теоремы 2 позволяют сделать вывод о характере максимальной гладкости ненулевых функций с нулевыми интегралами по шарам, радиусы которых принадлежат данному двухэлементному множеству.

Докажем, что условие (2) является точным и для ненулевых функций с нулевыми интегралами по единичным квадратам.

Сформулируем и докажем второе утверждение из этого результата в виде леммы.

Для фиксированного $r > 0$ и $R > r$ обозначим $V_r(B_R)$ множество функций $f \in C^\infty(B_R)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, содержащимся в B_R.

Лемма 1. *Пусть $E = \{r_1, r_2\}, R > r_2 > r_1, r_1 + r_2 > R$. Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ такой, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q\geq j} M_q^{\frac{1}{q}}} < \infty, \tag{6}$$

существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$ такая, что $\int_{|y|\leq r} f(x+y)dy = 0$ при всех $r \in E, x \in B_{R-r}$ и

$$\sup_{x\in B_R} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|} \tag{7}$$

при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$.

Доказательство. Пусть $r_1 + r_2 - R = \varepsilon_1 > 0$ и выполнены условия (6), (7). Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{M_q^{1/q}\}_{q=1}^\infty$ не убывает (в противном случае M_q можно заменить на $m_q = (inf_{j\geq q} M_j^{1/j})^q \leq M_q$).

Из (7) следует, что существует последовательность положительных чисел $\{\zeta_q\}_{q=0}^\infty$ такая, что

$$\lim_{q\to\infty} \zeta_q^{1/q} = +\infty$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{inf_{q\geq j}(M_q/\zeta_q)^{1/q}} < \infty. \tag{8}$$

Поскольку $R + \varepsilon_1/2 < r_1 + r_2$, из [5, §9] получаем, что существует вещественнозначная функция $f_1 \in V_r(B_{R+\varepsilon_1/2}), r = r_1, r_2$ такая, что

$$\int_{B_{R+\varepsilon_1/2}} |f_1(x)|dx = 1. \tag{9}$$

Из (9) и [13, следствие 1 из теоремы 2, лемма 6] вытекает, что $\mathrm{supp} f_1 \cap B_{r_1} \neq \varnothing$. Тогда в некотором открытом шаре B с центром $x_0 \in B_{r_1}$ и радиусом $\delta < R - r_1$ функция f_1 не обращается в нуль, т.е. сохраняет знак.

Пусть $\varepsilon_2 = min(\delta, \varepsilon_1/2)$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$. Рассмотрим ненулевую неотрицательную функцию $u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с носителем в $[0, \varepsilon_2/(2\sqrt{n})]$, удовлетворяющую условию

$$|u_1^j(t)| \leq \frac{K_1^{j+1} M_j}{\zeta_j}, \quad t \in \mathbb{R}^1, j \in \mathbb{Z}_+,$$

где постоянная $K_1 > 0$ не зависит от j и t. Существование такой функции следует из (8) и [14, теоремы 1.3.5, 1.3.8]. Полагая

$$K = \max_{j \geq 1} \frac{K_1^{1+j}}{\zeta_j}, \quad u(t) = \frac{u_1(t)}{K},$$

имеем $|u^{(j)}(t)| \leq M_j$ на $\mathbb{R}^1$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\psi(x) = \prod_{j=1}^{n} u(x_j);$$

тогда $\psi \geq 0$ и

$$\mathrm{supp}\, \psi \subset B_{\varepsilon_2/2}. \tag{10}$$

Кроме того, для всех $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ получаем

$$|(\partial^\alpha \psi)(x)| = \prod_{j=1}^{n} |u^{(\alpha_j)}(x_j)| \leq \prod_{j=1}^{n} M_{\alpha_j} \leq M_{|\alpha|}. \tag{11}$$

Далее, свертка $f = f_1 * \psi$ определена в $B_{R+\varepsilon}$ и принадлежит $V_r(B_{R+\varepsilon}), r = r_1, r_2$. Из (9) и (11) следует, что $|(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|}$ для всех $x \in B_{R+\varepsilon}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Поскольку $\varepsilon_2/2 < \delta$, из (10) и определения f имеем $f(x_0) \neq 0$. Таким образом, f удовлетворяет всем требуемым условиям и лемма доказана.

$\square$

Докажем теперь, что условие квазианалитичности является точным и для ненулевых функций с нулевыми интегралами по единичным квадратам.

Основной результат и его доказательство.

Основным результатом данной работы является

Теорема 3. *Пусть* $\frac{\sqrt{2}}{2} < R < \frac{\sqrt{5}}{2}$ *, тогда для любой последовательности положительных чисел* $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ *, для которой выполняется условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{1/q}} < +\infty, \tag{12}$$

существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$ *с нулевыми интегралами по всем замкнутым единичным квадратам, лежащим в* B_R *, у которой*

$$\sup_{x \in B_R} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|} \tag{13}$$

при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$.

Доказательство.

Рассмотрим открытый круг B_R с радиусом $\frac{\sqrt{2}}{2} < R < \frac{\sqrt{5}}{2}$ и замкнутые единичные квадраты в нём. При движении таких квадратов внутри круга получаем некоторую область в центре, которую границы квадратов не затрагивают.

Нетрудно видеть, что область является открытым кругом некоторого радиуса $\varepsilon > 0$. Как и ранее, обозначим этот круг B_ε . Таким образом, B_ε содержится в каждом рассматриваемом замкнутом единичном квадрате.

При доказательстве леммы 1 была построена финитная функция $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющая условиям (12) и (13). Из построения следует, что такая функция может быть выбрана с нулевым интегралом по носителю. При этом носитель данной функции можно выбрать сколь угодно малого диаметра (см. [11]).

Выбирая в качестве f функцию, построенную в доказательстве леммы 1 с носителем в открытом круге B_ε, получим, что указанная функция удовлетворяет всем условиям леммы 1. Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Выводы. Получена точная характеристика максимальной гладкости ненулевых функций с нулевыми интегралами по замкнутым единичным квадратам, лежащим в открытом круге. Полученные результаты носят теоретический характер.

Таким образом, рассмотрена локальная проблема Помпейю для множества замкнутых единичных квадратов, содержащихся в круге. Проведённое исследование даёт основу для изучения свойства Помпейю на других множествах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur certains systems d'equation lineaires et sur une propriete integrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Accd. Sci. Paris. – 1929. - V. 188. - P. 1138–1139.
2. Pompeiu D. Sur une propriete de fonctions continues depended de deux variables realles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. -– 1929. — V. 15, № 5. – P. 265–269.
3. Ebenfalt P. Some results on the Pompeiu problem / P. Ebenfalt // Ann. Acad. Sci. Ser. A. J. Math. -– 1993. -– V. 24. – P. 16–31.
4. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations / V.V. Volchkov // Dordrecht: Kluwer. – 2003. – P. 454.
5. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Springer: Verlag London. – 2009. – P. 671
6. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Birkhauser. – 2013. – P. 591
7. Волчков В.В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю / В.В. Волчков // Матем. сб. – 1998. -– том 189, номер 7. - С. 3–22.
8. Berenstein C. A. Invertion of the local Pompeiu transform /C.A. Berenstein, R.Gay, A.Yger // J. Analyse Math. – 1990. — P. 259–287.
9. Тимофеева К.В. Квазианалитические функции с нулевыми интегралами по квадратам / К.В.Тимофеева, В.В. Волчков // Сборник научных трудов VIII Республиканской конференции молодых ученых, аспирантов, студентов «Научно-технические достижения студентов, аспирантов, молодых ученых строительно-архитектурной отрасли» (22 апреля 2022 г.): В 3-х т. Т. 1: Фундаментальные науки. // Макеевка: ГОУ ВПО «ДонНАСА». – 2022. – С. 257.
10. Тимофеева К.В. Квазианалитические функции с нулевыми интегралами по квадратам / К.В.Тимофеева // Тезисы докладов научной конференции студентов факультета математики и информационных технологий: Сб. науч. и науч. метод. работ //Донецк: ДонНУ. – 2021. – С. 48.
11. Волчков В. В. Локальная теорема о двух радиусах для квазианалитических классов функций / В.В.Волчков // Матем. заметки, 80:4. – 2006. - С. 490–500.
12. Волчков В.В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю. /В.В.Волчков // Матем. сб. – 1998. - том 189, номер 7. - С. 3–22.
13. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах. / В.В.Волчков // Матем. сб., 186:6. - 1995. - С. 15–34.

14. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 Т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / Л. Хёрмандер // пер. с англ. под ред. М. А. Шубина. – М. : МИР. – 1986. - С. 462.

Поступила в редакцию 17.08.2023 г.

QUASI-ANALYTICITY AND THE LOCAL POMPEIU PROPERTY

V. V. Volchkov, K. V. Timofeeva

A local Pompeiu problem is considered for the set of unit squares contained in an open disk. An exact characteristic of the maximum smoothness of nonzero functions given in an open disk and having zero integrals over all closed unit squares in this disk is obtained.

Keywords: Pompeiu problem, Pompeiu property, Pompeiu sets, quasi-analytic functions, a local two-radii theorem for quasianalytic classes of functions.

Волчков Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, Россия
valeriyvolchkov@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Valeriy Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor
Donetsk State University, Donetsk, Russia

Тимофеева Карина Витальевна
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, Россия
ktimofeeva75@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Timofeeva Karina Vitalievna
Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 517.444

ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЕГО ПОТОКУ ЧЕРЕЗ СФЕРЫ ФИКСИРОВАННЫХ РАДИУСОВ

© 2023. ***Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков***

Одним из элементарных свойств непостоянной непрерывной функции на вещественной оси является отсутствие у нее двух несоизмеримых периодов. Пример экспоненты $e^{i\lambda x}$ при подходящем параметре λ показывает, что условие несоизмеримости периодов является существенным. Этот факт допускает далеко идущие обобщения на скалярные и векторные поля в многомерных пространствах. В частности, если гладкое векторное поле $\overrightarrow{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет нулевой поток через все сферы фиксированных радиусов r_1 и r_2 в $\mathbb{R}^n$ и r_1/r_2 не является отношением положительных нулей функции Бесселя первого рода с индексом $n/2$, то поле $\overrightarrow{A}$ является соленоидальным (несжимаемым). В данной статье изучается задача о восстановлении векторного поля по его заданным потокам. Нашим основным результатом является теорема 2, которая дает формулу для нахождения $\overrightarrow{A}$ (с точностью до соленоидального слагаемого) по его известному потоку через все сферы с указанным выше условием. В работе используются методы гармонического анализа, а также теории целых и специальных функций. Ключевым шагом в доказательстве теоремы 2 является разложение дельта-функции Дирака по системе радиальных распределений с носителями в $\overline{B}_r$, биортогональной к некоторой системе сферических функций. Подобный подход можно использовать для обращения ряда операторов свертки с радиальными распределениями из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

***Ключевые слова*:** векторные поля, сферические средние, функции Бесселя, радиальные распределения.

1. Введение. Пусть r_1, r_2 — фиксированные положительные числа и отношение r_1/r_2 иррационально. Хорошо известно, что всякая функция $f \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям периодичности

$$f(x+r_1) - f(x-r_1) = 0, \quad f(x+r_2) - f(x-r_2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

является константой. Если рассматривать f как векторное поле в $\mathbb{R}$, то равенства (1) означают, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу радиуса r_1 и r_2. При этом поле f является постоянным. Этот факт допускает нетривиальные обобщения на скалярные и векторные поля в многомерных пространствах (см. статьи [1], [2], обзоры [3]–[6], а также монографии [7]– [9], содержащие обширную библиографию). В частности, с помощью следствия 2.1 из [1] нетрудно убедиться, что имеет место

Теорема 1. *Пусть r_1, $r_2 \in (0, +\infty)$, $\Lambda_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ — последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания, E_n — множество чисел вида α/β, где $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. Тогда:*

1) если $r_1/r_2 \notin E_n$ и гладкое векторное поле $\overrightarrow{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет нулевой поток через все сферы радиусов r_1 и r_2, то поле $\overrightarrow{A}$ является соленоидальным, т.е.

$$\operatorname{div} \overrightarrow{A} := \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0,$$

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

где $A_1, \ldots, A_n$ — компоненты поля $\overrightarrow{A}$;

2) если $r_1/r_2 \in E_n$, то существует не соленоидальное бесконечно дифференцируемое векторное поле $\overrightarrow{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с нулевым потоком через все сферы радиусов r_1 и r_2 в $\mathbb{R}^n$.

В связи с теоремой 1, для случая $r_1/r_2 \notin E_n$ возникает задача о восстановлении поля $\overrightarrow{A}$ (с точностью до соленоидального поля) по заданным функциям

$$\mathcal{P}_j(\overrightarrow{A})(x) = \int_{S_{r_j}(x)} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma, \quad j = 1, 2,$$

где $S_{r_j}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r_j\}$, $\overrightarrow{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $S_{r_j}(x)$, $d\sigma$ — элемент площади на $S_{r_j}(x)$. Целью данной работы является решение этой задачи. Отметим, что постановка подобной проблемы об обращении оператора

$$f \to \left(\int_{S_{r_1}(x)} f d\sigma, \int_{S_{r_2}(x)} f d\sigma \right), \quad f \in C(\mathbb{R}^n)$$

при естественных условиях на r_1/r_2 принадлежит Л. Зальцману [3, § 8] (см. также [10, раздел C]).

Формулировка основного результата работы и его обсуждение приводится в § 2 (см. теорему 2 ниже). В § 3 содержатся необходимые вспомогательные утверждения. Доказательство теоремы 2 получено в § 4. Наши конструкции основаны на развитии идей, предложенных в [8], [11]. Относительно других методов и результатов, связанных с восстановлением по сферическим средним, см. [9], [12] и имеющиеся там ссылки.

2. Формулировка основного результата. Далее, как обычно, $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство с эрмитовым скалярным произведением

$$(\zeta, \varsigma) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \overline{\varsigma}_j, \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \quad \varsigma = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n),$$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ — пространства распределений и распределений с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$ соответственно.

Преобразованием Фурье-Лапласа распределения $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ является целая функция

$$\widehat{f}(\zeta) = \langle f(x), e^{-i(\zeta,x)} \rangle, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

При этом $\widehat{f}$ растет на $\mathbb{R}^n$ не быстрее полинома и

$$\langle \widehat{f}, \psi \rangle = \langle f, \widehat{\psi} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

где $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. [13, гл. 7]).

Если $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и хотя бы одно из этих распределений имеет компактный носитель, то их свертка $f_1 * f_2$ является распределением в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующим по правилу

$$\langle f_1 * f_2, \varphi \rangle = \langle f_2(y), \langle f_1(x), \varphi(x + y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

где $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$. Для $f_1, f_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула Бореля

$$\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f}_1\, \widehat{f}_2. \tag{4}$$

Пусть $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ — пространство радиальных (инвариантных относительно вращений пространства $\mathbb{R}^n$) распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Простейшим примером распределения из класса $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ является дельта-функция Дирака δ с носителем в нуле. Положим

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)}{z^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{C}.$$

Сферическое преобразование распределения $f \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\widetilde{f}(z) = \langle f, \varphi_z \rangle, \quad z \in \mathbb{C},$$

где φ_z — сферическая функция в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\varphi_z(x) = 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(см. [14, гл. 4]). Функция φ_z однозначно определяется следующими условиями:

1) φ_z радиальная и $\varphi_z(0) = 1$;

2) φ_z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta(\varphi_z) + z^2\varphi_z = 0 \quad (\Delta - \text{оператор Лапласа}). \tag{5}$$

Отметим, что $\widetilde{f}$ — четная целая функция экспоненциального типа и преобразование Фурье $\widehat{f}$ выражается через $\widetilde{f}$ по формуле

$$\widehat{f}(\zeta) = \widetilde{f}\left(\sqrt{\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2}\right), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{6}$$

Множество всех нулей функции $\widetilde{f}$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и не принадлежащих отрицательной части мнимой оси, обозначим $\mathcal{N}_+(\widetilde{f})$.

Пусть χ_r — индикатор шара $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. Для $f = \chi_r$ имеем (см., например, [9, часть 2, гл. 3, формула (3.90)])

$$\widetilde{\chi}_r(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz). \tag{7}$$

Отсюда и из формулы

$$\mathbf{I}'_\nu(z) = -z\mathbf{I}_{\nu+1}(z) \tag{8}$$

(см. [15, гл. 7, п. 7.2.8, формула (51)]) находим

$$\widetilde{\chi}_r{}'(z) = -(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+2} z\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(rz). \tag{9}$$

Используя хорошо известные свойства нулей функций Бесселя (см. [15, гл. 7, п. 7.9]), можно получить соответствующую информацию о множестве $\mathcal{N}_+(\widetilde{\chi}_r)$. В частности, все нули $\widetilde{\chi}_r$ являются простыми, принадлежат $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и

$$\mathcal{N}_+(\widetilde{\chi}_r) = \left\{\frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \ldots\right\}. \tag{10}$$

Кроме того, поскольку функции $J_{\frac{n}{2}-1}$ и $J_{\frac{n}{2}}$ не имеют общих нулей на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, то корректно определена функция

$$h_r^\lambda(x) = \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|) - \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}{\lambda^2\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}\,\chi_r(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{\chi}_r).$$

Пусть

$$Q_r(z) = \prod_{j=1}^{[(n+7)/4]} \left(z - \left(\frac{\lambda_j}{r} \right)^2 \right), \quad H_r = Q_r(\Delta)\chi_r. \tag{11}$$

Тогда в силу формулы

$$\widetilde{q(\Delta)f}(z) = q(-z^2)\widetilde{f}(z) \quad (q \text{ — алгебраический многочлен}), \tag{12}$$

имеем

$$\widetilde{H}_r(z) = Q_r(-z^2)\widetilde{\chi}_r(z), \tag{13}$$

$$\mathcal{N}_+\big(\widetilde{H}_r\big) = \left\{ \frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \ldots \right\} \cup \left\{ \frac{i\lambda_1}{r}, \frac{i\lambda_2}{r}, \ldots, \frac{i\lambda_m}{r} \right\}, \tag{14}$$

причем все нули $\widetilde{H}_r$ являются простыми. Кроме того,

$$\mathcal{N}_+\big(\widetilde{H}_{r_1}\big) \cap \mathcal{N}_+\big(\widetilde{H}_{r_2}\big) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} \notin E_n. \tag{15}$$

Для $\lambda \in \mathcal{N}_+\big(\widetilde{H}_r\big)$ положим

$$H_r^\lambda = Q_r(\Delta)h_r^\lambda, \tag{16}$$

если $\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{\chi}_r)$, и

$$H_r^\lambda = q_{r,\lambda}(\Delta)\chi_r, \tag{17}$$

если $Q_r(-\lambda^2) = 0$, где

$$q_{r,\lambda}(z) = -\frac{Q_r(z)}{z + \lambda^2}. \tag{18}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Пусть* $\frac{r_1}{r_2} \notin E_n$, $\overrightarrow{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— гладкое векторное поле класса* C^2, $n \geq 2$. *Тогда*

$$\overrightarrow{A}(x) = \overrightarrow{\mathbf{A}}(x) + x \int_0^1 (\operatorname{div} \overrightarrow{A})(tx) t^{n-1} dt, \tag{19}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{A} = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 - \mu^2)\widetilde{H}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{H}_{r_2}{}'(\mu)} \Big(Q_{r_2}(\Delta)\big(\mathcal{P}_2\big(\overrightarrow{A}\big) * H_{r_1}^\lambda\big) - \\ - Q_{r_1}(\Delta)\big(\mathcal{P}_1\big(\overrightarrow{A}\big) * H_{r_2}^\mu\big) \Big), \tag{20}$$

где $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ *— соленоидальное векторное поле и ряд* (20) *сходится безусловно в пространстве* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Равенства (19), (20) восстанавливают поле $\overrightarrow{A}$ с точностью до соленоидального поля по известным потокам $\mathcal{P}_1\big(\overrightarrow{A}\big)$ и $\mathcal{P}_2\big(\overrightarrow{A}\big)$ (см. (11), (13), (14), (16)–(18)). Таким образом, теорема 2 дает решение сформулированной выше задачи. Ключевым шагом в доказательстве основного результата является разложение дельта-функции Дирака по системе радиальных распределений с носителями в $\overline{B}_r$, биортогональной к некоторой системе сферических функций (см. доказательство леммы 6 в § 3 ниже). Подобный подход можно использовать для обращения ряда операторов свертки с радиальными распределениями из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Применение методов работы [12] приводит к принципиально иной процедуре для восстановления $\overrightarrow{A}$. Однако, возникающие при этом конструкции являются более громоздкими и менее явными (см. [12, § 3]).

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A} \in C^1(B_R)$ и*

$$\mathcal{B}(x) = \int_0^1 \mathcal{A}(tx)t^{n-1}dt, \quad |x| < R.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\left(\mathcal{B}(x)x\right) = \mathcal{A}(x). \tag{21}$$

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{div}(\mathcal{B}(x)x) = n\mathcal{B}(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_j} =$$

$$= n\int_0^1 \mathcal{A}(tx)t^{n-1}dt + \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathcal{A}(tx)\right)t^{n-1}dt.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathcal{A}(tx)\right)t^{n-1}dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\mathcal{A}(tx)\right)t^{n}dt =$$

$$= t^n\mathcal{A}(tx)\Big|_0^1 - n\int_0^1 \mathcal{A}(tx)t^{n-1}dt.$$

Используя это соотношение и равенство выше, получаем (21). □

Лемма 2. *Пусть $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — четная целая функция и $g(\lambda) = 0$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\left|\frac{\lambda g(z)}{z^2 - \lambda^2}\right| \leq \max_{|\zeta - z| \leq 2} |g(\zeta)|, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{22}$$

где при $z = \pm\lambda$ левая часть в (22) доопределена по непрерывности.

Доказательство. Имеем

$$\left|\frac{2\lambda g(z)}{z^2 - \lambda^2}\right| = \left|\frac{g(z)}{z-\lambda} - \frac{g(z)}{z+\lambda}\right| \leq \left|\frac{g(z)}{z-\lambda}\right| + \left|\frac{g(z)}{z+\lambda}\right|. \tag{23}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (23).

Если $|z - \lambda| > 1$, то

$$\left|\frac{g(z)}{z-\lambda}\right| \leq |g(z)| \leq \max_{|\zeta - z| \leq 2} |g(\zeta)|. \tag{24}$$

Пусть $|z - \lambda| \leq 1$. Тогда применяя принцип максимума модуля к целой функции $\dfrac{g(\zeta)}{\zeta - \lambda}$, получаем

$$\left|\frac{g(z)}{z-\lambda}\right| \leq \max_{|\zeta - \lambda| \leq 1} \left|\frac{g(\zeta)}{\zeta - \lambda}\right| = \max_{|\zeta - \lambda| = 1} |g(\zeta)|.$$

Учитывая, что окружность $|\zeta - \lambda| = 1$ содержится в круге $|\zeta - z| \leq 2$, приходим к оценке

$$\left|\frac{g(z)}{z-\lambda}\right| \leq \max_{|\zeta - z|\leq 2} |g(\zeta)|, \tag{25}$$

которая справедлива для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. (24)).

Аналогично,

$$\left|\frac{g(z)}{z+\lambda}\right| \leq \max_{|\zeta - z|\leq 2} |g(\zeta)|, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{26}$$

поскольку $g(-\lambda) = 0$. Из (25), (26) и (23) следует требуемое утверждение. □

Лемма 3. *1) При $\nu > -1/2$, $z \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство*

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}. \tag{27}$$

2) Если $\nu \in \mathbb{R}$, то

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{\nu+\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{Im} z \to \infty. \tag{28}$$

3) Пусть $\nu > -1$, $\{\lambda_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty$ — последовательность всех положительных нулей функции $\mathbf{I}_\nu$, занумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$\lambda_{\nu,j} = \pi\left(j + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{j}\right), \quad j \to \infty. \tag{29}$$

Кроме того,

$$\lim_{j\to\infty} (\lambda_{\nu,j})^{\nu+\frac{3}{2}} |\mathbf{I}_{\nu+1}(\lambda_{\nu,j})| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{30}$$

Доказательство. 1) Из интегрального представления Пуассона [15, гл. 7, п. 7.12, формула (8)] имеем

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 \cos(uz)(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du.$$

Отсюда получаем

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \leq \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 e^{u|\operatorname{Im} z|}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du \leq$$

$$\leq \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}\right) e^{|\operatorname{Im} z|} = \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},$$

что и требовалось.

2) Из асимптотического разложения бесселевых функций [15, гл. 7, п. 7.13.1, формула (3)] следует равенство

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-\nu-\frac{1}{2}} \left(\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$+ O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|}\right)\Bigg), \quad z \to \infty, \quad -\pi < \arg\, z < \pi. \tag{31}$$

Учитывая, что

$$|\cos w| \sim \frac{e^{|\operatorname{Im} w|}}{2}, \quad \operatorname{Im} w \to \infty,$$

из (31) получаем (28).

3) Асимптотика (29) для нулей $\mathbf{I}_\nu$ хорошо известна (см., например, [8, гл. 7, формула (7.9)]). Тогда

$$\cos\left(\lambda_{\nu,j} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi j - \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{j}\right)\right) = O\left(\frac{1}{j}\right), \quad j \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\left|\sin\left(\lambda_{\nu,j} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1.$$

Используя это соотношение и равенство

$$\mathbf{I}_{\nu+1}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{-\nu-\frac{3}{2}}\Bigg(\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|}\right)\Bigg), \quad z \to \infty, \quad -\pi < \arg\, z < \pi$$

(см. (31)), приходим к (30). □

Следствие 1. *Для любого* $r > 0$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)} \frac{1}{|\widetilde{H}_r{}'(\lambda)|} < +\infty. \tag{32}$$

Доказательство. Используя (13) и (9), находим

$$\widetilde{H}_r{}'(\lambda) = Q_r(-\lambda^2)\widetilde{\chi}_r{}'(\lambda) - 2\lambda Q_r'(-\lambda^2)\widetilde{\chi}_r(\lambda) =$$

$$= -(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+2}\lambda Q_r(-\lambda^2)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(r\lambda) - 2\lambda Q_r'(-\lambda^2)\widetilde{\chi}_r(\lambda).$$

Теперь из (10) и (14) имеем

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)} \frac{1}{|\widetilde{H}_r{}'(\lambda)|} = \sum_{j=1}^{[(n+7)/4]} \frac{1}{|\widetilde{H}_r{}'(i\lambda_j/r)|} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+1}} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j |Q_r(-\lambda_j^2/r^2)||\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(\lambda_j)|}.$$

Этот ряд сравним со сходящимся рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2[(n+7)/4]-\frac{n+1}{2}}}$$

(см. (11), (29) и (30)). Отсюда получаем требуемое утверждение. □

Лемма 4. *Функция h_r^λ удовлетворяет уравнению*

$$\Delta(h_r^\lambda) + \lambda^2 h_r^\lambda = -\chi_r, \quad \lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{\chi}_r). \tag{33}$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\langle \Delta(h_r^\lambda) + \lambda^2 h_r^\lambda, \varphi\rangle = \langle h_r^\lambda, (\Delta + \lambda^2)\varphi\rangle =$$

$$= \int_{|x|\le r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|) - \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}{\lambda^2 \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \Delta\varphi(x)dx +$$

$$+ \int_{|x|\le r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|) - \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \varphi(x)dx.$$

Применим к первому интегралу формулу Грина

$$\int_G (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial G} \left(v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} \right) d\sigma.$$

Тогда

$$\langle \Delta(h_r^\lambda) + \lambda^2 h_r^\lambda, \varphi\rangle = \int_{|x|\le r} \Delta \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|) - \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}{\lambda^2 \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \right) \varphi(x)dx -$$

$$- \int_{|x|=r} \varphi(x)\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|) - \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}{\lambda^2 \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \right) d\sigma(x) +$$

$$+ \int_{|x|\le r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|) - \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \varphi(x)dx.$$

Отсюда и из (5) получаем

$$\langle \Delta(h_r^\lambda) + \lambda^2 h_r^\lambda, \varphi\rangle = -\frac{1}{\lambda^2} \int_{|x|=r} \varphi(x)\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \right) d\sigma(x) - \langle \chi_r, \varphi\rangle.$$

Теперь используя формулу

$$\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}}\big(f(|x|)\big) = f'(|x|), \quad \overrightarrow{n} = \frac{x}{|x|}$$

и равенство (8), находим

$$\langle \Delta(h_r^\lambda) + \lambda^2 h_r^\lambda, \varphi\rangle = \int_{|x|=r} \varphi(x)\,|x|\,\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} d\sigma(x) - \langle \chi_r, \varphi\rangle =$$

$$= r\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \int_{|x|=r} \varphi(x)d\sigma(x) - \langle \chi_r, \varphi\rangle.$$

Осталось заметить, что $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r) = 0$ в силу соотношения (7), поскольку $\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{\chi}_r)$. $\square$

Замечание 1. Из (12) и инъективности сферического преобразования следует, что для распределений $U,T\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{T})$

$$\Delta U+\lambda^2U=-T\quad\Leftrightarrow\quad\widetilde{U}(z)=\frac{\widetilde{T}(z)}{z^2-\lambda^2}.\tag{34}$$

Поэтому соотношение (33) влечет равенство

$$\widetilde{h_r^\lambda}(z)=\frac{\widetilde{\chi}_r(z)}{z^2-\lambda^2},\quad\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{\chi}_r).\tag{35}$$

Лемма 5. *Пусть* $\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)$. *Тогда*

$$\widetilde{H_r^\lambda}(z)=\frac{\widetilde{H}_r(z)}{z^2-\lambda^2}.\tag{36}$$

Доказательство. Формула (36) легко следует из (12) и замечания 1. Действительно, если $\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{\chi}_r)$, то в силу (16), (12), (35) и (13) имеем

$$\widetilde{H_r^\lambda}(z)=Q_r(-z^2)\widetilde{h_r^\lambda}(z)=\frac{Q_r(-z^2)\widetilde{\chi}_r(z)}{z^2-\lambda^2}=\frac{\widetilde{H}_r(z)}{z^2-\lambda^2}.$$

Аналогично, если $Q_r(-\lambda^2)=0$, то

$$\widetilde{H_r^\lambda}(z)=q_{r,\lambda}(-z^2)\widetilde{\chi}_r(z)=\frac{Q_r(-z^2)\widetilde{\chi}_r(z)}{z^2-\lambda^2}=\frac{\widetilde{H}_r(z)}{z^2-\lambda^2}$$

(см. (17), (18), (12) и (13)). □

Лемма 6. *Пусть*

$$\mathfrak{H}_r^\lambda=\frac{2\lambda}{\widetilde{H}_r{}'(\lambda)}\;H_r^\lambda,\quad\lambda\in\mathcal{N}_+\big(\widetilde{H}_r\big).\tag{37}$$

Тогда

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)}\mathfrak{H}_r^\lambda=\delta,\tag{38}$$

где ряд (38) *сходится безусловно в пространстве* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для произвольной функции $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ определим функцию $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$\psi(y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{i(x,y)}dx,\quad y\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда (см. (2), (6) и (36))

$$\big\langle\mathfrak{H}_r^\lambda,\varphi\big\rangle=\big\langle\mathfrak{H}_r^\lambda,\widehat{\psi}\big\rangle=\big\langle\widehat{\mathfrak{H}_r^\lambda},\psi\big\rangle=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\widetilde{\mathfrak{H}_r^\lambda}(|x|)dx=\frac{2}{\widetilde{H}_r{}'(\lambda)}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\frac{\lambda\widetilde{H}_r(|x|)}{|x|^2-\lambda^2}dx.$$

Используя это представление и лемму 2, получаем

$$\left|\langle \mathfrak{H}_r^{\lambda}, \varphi \rangle\right| \leq \frac{2}{\left|\widetilde{H}_r{}'(\lambda)\right|} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left|\widetilde{H}_r(\zeta)\right| dx.$$

Из (13), (7) и (27) имеем

$$\max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left|\widetilde{H}_r(\zeta)\right| = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left|Q_r(-\zeta^2)\right| \left|\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(r\zeta)\right| \leq$$

$$\leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left|Q_r(-\zeta^2)\right| \cdot e^{r|\mathrm{Im}\zeta|} \leq$$

$$\leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n e^{2r}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left|Q_r(-\zeta^2)\right|.$$

Поэтому

$$\left|\langle \mathfrak{H}_r^{\lambda}, \varphi \rangle\right| \leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n e^{2r}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \left|\widetilde{H}_r{}'(\lambda)\right|} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta - |x|| \leq 2} \left|Q_r(-\zeta^2)\right| dx. \tag{39}$$

Это неравенство и следствие 1 показывают, что ряд (38) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к некоторому распределению f с носителем в $\overline{B}_r$. По лемме 5 для сферического преобразования этого распределения справедливо равенство

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)} \widetilde{\mathfrak{H}_r^{\lambda}}(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)} \frac{2\lambda}{\widetilde{H}_r{}'(\lambda)} \frac{\widetilde{H}_r(z)}{z^2 - \lambda^2}. \tag{40}$$

При этом, если $\mu \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)$, то

$$\widetilde{f}(\mu) = \frac{2\mu}{\widetilde{H}_r{}'(\mu)} \lim_{z \to \mu} \frac{\widetilde{H}_r(z)}{z^2 - \mu^2} = 1. \tag{41}$$

Далее, поскольку $\widetilde{f}(z) - 1$ и $\widetilde{H}_r(z)$ являются четными целыми функциями экспоненциального типа, то в силу (41) и простоты нулей $\widetilde{H}_r$ их отношение

$$h(z) = \frac{\widetilde{f}(z) - 1}{\widetilde{H}_r(z)}$$

является целой функцией не выше первого порядка (см. [16, гл. 1, § 9, следствие из теоремы 12]). При $\mathrm{Im}\, z = \pm \mathrm{Re}\, z$, $z \neq 0$ она оценивается следующим образом:

$$|h(z)| \leq \frac{|\widetilde{f}(z)|}{|\widetilde{H}_r(z)|} + \frac{1}{|\widetilde{H}_r(z)|} =$$

$$= \left| \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)} \frac{1}{\widetilde{H}_r{}'(\lambda)} \left(\frac{1}{z-\lambda} - \frac{1}{z+\lambda}\right) \right| + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n |Q_r(-z^2) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|} \leq$$

$$\leq \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)} \frac{1}{\left|\widetilde{H}_r{}'(\lambda)\right|} \left(\frac{1}{|z-\lambda|} + \frac{1}{|z+\lambda|}\right) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n |Q_r(-z^2) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|} \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{2}}{|z|} \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_r)} \frac{1}{|\widetilde{H}_r{}'(\lambda)|} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n |Q_r(-z^2)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)|}.$$

Из этой оценки и соотношений (32), (28) видно, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z = \pm \mathrm{Re}\, z}} h(z) = 0. \tag{42}$$

Тогда по принципу Фрагмена-Линделёфа функция h ограничена на $\mathbb{C}$. Теперь из (42) и теоремы Лиувилля следует, что $h = 0$. Отсюда $\widetilde{f} = 1$, т.е. $f = \delta$. Таким образом, лемма 6 доказана. □

Лемма 7. *Пусть* $\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})$, $\mu \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})$. *Тогда*

$$(\lambda^2 - \mu^2)\mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} * \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2} = \frac{4\lambda\mu}{\widetilde{H}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{H}_{r_2}{}'(\mu)} \left(H_{r_2} * H^{\lambda}_{r_1} - H_{r_1} * H^{\mu}_{r_2}\right). \tag{43}$$

Доказательство. Из (36), (34) и (37) имеем

$$(\Delta + \lambda^2)\left(\mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1}\right) = -\frac{2\lambda}{\widetilde{H}_{r_1}{}'(\lambda)} H_{r_1}, \tag{44}$$

$$(\Delta + \mu^2)\left(\mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}\right) = -\frac{2\mu}{\widetilde{H}_{r_2}{}'(\mu)} H_{r_2}. \tag{45}$$

Из (44), (37) и перестановочности оператора дифференцирования со сверткой получаем

$$(\Delta + \lambda^2)\left(\mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} * \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}\right) = \frac{-4\lambda\mu}{\widetilde{H}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{H}_{r_2}{}'(\mu)} H_{r_1} * H^{\mu}_{r_2}.$$

Аналогично, из (45) следует, что

$$-(\Delta + \mu^2)\left(\mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} * \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}\right) = \frac{4\lambda\mu}{\widetilde{H}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{H}_{r_2}{}'(\mu)} H_{r_2} * H^{\lambda}_{r_1}.$$

Складывая два последних равенства, приходим к соотношению (43). □

4. Доказательство теоремы 2. В силу леммы 1 поле $\overrightarrow{A}$ можно представить в виде

$$\overrightarrow{A}(x) = \overrightarrow{\mathbf{A}}(x) + x\int_0^1 (\mathrm{div}\,\overrightarrow{A})(tx)t^{n-1}dt,$$

где $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ — соленоидальное векторное поле. Установим разложение (20) для $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}$.

Из леммы 6 получаем

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})} \mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} = \delta, \qquad \sum_{\mu \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})} \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2} = \delta. \tag{46}$$

Докажем, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})} \sum_{\mu \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})} \mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} * \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2} = \delta, \tag{47}$$

где ряд (47) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi = \widehat{\psi}$. Для $\lambda \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})$, $\mu \in \mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})$ имеем (см. (4) и доказательство оценки (39))

$$\left|\left\langle \mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} * \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}, \varphi\right\rangle\right| = \left|\left\langle \mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} * \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}, \widehat{\psi}\right\rangle\right| = \left|\left\langle \widehat{\mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1}}\, \widehat{\mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}}, \psi\right\rangle\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\widetilde{\mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1}}(|x|)\widetilde{\mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}}(|x|)dx\right| =$$

$$= \frac{4}{\left|\widetilde{H}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{H}_{r_2}{}'(\mu)\right|}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\lambda\widetilde{H}_{r_1}(|x|)}{|x|^2-\lambda^2}\,\frac{\mu\widetilde{H}_{r_2}(|x|)}{|x|^2-\mu^2}dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{4\pi^n(r_1r_2)^n e^{2(r_1+r_2)}}{\left|\widetilde{H}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{H}_{r_2}{}'(\mu)\right|\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)^2}\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n}|\psi(x)|\max_{|\zeta-|x||\leq 2}\left|Q_{r_1}(-\zeta^2)\right|\max_{|\zeta-|x||\leq 2}\left|Q_{r_2}(-\zeta^2)\right|dx.$$

Отсюда и из (32) следует, что

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})}\left(\sum_{\mu\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})}\left|\left\langle \mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} * \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}, \varphi\right\rangle\right|\right) < \infty.$$

Значит (см., например, [17, гл. 1, теорема 1.24]), ряд в (47) сходится безусловно в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. При этом (см. (3), (46))

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})}\sum_{\mu\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})}\langle \mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1} * \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}, \varphi\rangle =$$

$$= \sum_{\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})}\left(\sum_{\mu\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})}\langle \mathfrak{H}^{\mu}_{r_2}(y), \langle \mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1}(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle\right) =$$

$$= \sum_{\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})}\langle \mathfrak{H}^{\lambda}_{r_1}(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(0),$$

что доказывает (47).

Сворачивая обе части (47) с $\operatorname{div}\overrightarrow{A}$ и учитывая раздельную непрерывность свертывания $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, (43) и (15), находим

$$\operatorname{div}\overrightarrow{A} = \sum_{\lambda\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_1})}\sum_{\mu\in\mathcal{N}_+(\widetilde{H}_{r_2})}\frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2-\mu^2)\widetilde{H}_{r_1}{}'(\lambda)\widetilde{H}_{r_2}{}'(\mu)}\times$$

$$\times\left(\operatorname{div}\overrightarrow{A} * (H_{r_2} * H^{\lambda}_{r_1}) - \operatorname{div}\overrightarrow{A} * (H_{r_1} * H^{\mu}_{r_2})\right). \tag{48}$$

Но в силу формулы Гаусса-Остроградского

$$(\operatorname{div}\overrightarrow{A} * \chi_{r_j})(x) = \int_{|y-x|\leq r_j}\operatorname{div}\overrightarrow{A}\,(y)\,dy = \int_{S_{r_j}(x)}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{n}\,d\sigma = \mathcal{P}_j\big(\overrightarrow{A}\big)(x), \quad j = 1, 2.$$

Поэтому используя (48), (11) и коммутативность оператора свертки с оператором дифференцирования, приходим к формуле (20). Таким образом, теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith J. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J. Smith // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416.
2. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem / L. Zalcman // Arch. Rat. Anal. Mech. – 1972. – V. 47. – P. 237–254.
3. Zalcman L. Offbeat integral geometry / L. Zalcman // Amer. Math. Monthly. – 1980. – V. 87. – P. 161–175.
4. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / L. Zalcman // Approximation by solutions of partial differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185–194.
5. Zalcman L. Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem"/ L. Zalcman. – Contemp. Math. Radon Transform and Tomography. – 2001. – V. 278. – P. 69–74.
6. Беренстейн К. А. Комплексный анализ и уравнения в свёртках / К. А. Беренстейн, Д. Струппа. – Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. –ВИНИТИ. – 1989. – Т. 54. – С. 5–111.
7. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
8. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.
9. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
10. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten / J. Radon. – Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. – 1917. – V. 69. – P. 262–277.
11. Волчкова Н. П. Проблема деконволюции для индикаторов отрезков / Н. П. Волчкова, Вит. В. Волчков // Математические заметки СВФУ. – 2019. – Т. 26, вып. 3. – С. 1–14.
12. Berenstein C. A. Inversion of the local Pompeiu transform / C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger // J. Analyse Math. – 1990. – V. 54. – P. 259–287.
13. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1 / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 340 с.
14. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
15. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973, 1974. – Т.2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
16. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М.: URSS, 2022. – 632 с.
17. Ильин В. А. Математический анализ, Т. II / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М: МГУ, 1987. – 360 с.

Поступила в редакцию 12.07.2023 г.

CONSTRUCTION OF A VECTOR FIELD FROM ITS FLOW THROUGH SPHERES OF FIXED RADII

N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov

One of the elementary properties of a non-constant continuous function on the real axis is that it does not have two incommensurable periods. An example of the exponent $e^{i\lambda x}$ with a suitable parameter λ shows that the period incommensurability condition is essential. This fact allows far-reaching generalizations to scalar and vector fields in multidimensional spaces. In particular, if a smooth vector field $\overrightarrow{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ has a zero flow through all spheres of fixed radii r_1 and r_2 in $\mathbb{R}^n$ and r_1/r_2 is not the ratio of positive zeros of a Bessel function of the first kind with index $n/2$, then the field $\overrightarrow{A}$ is solenoidal (incompressible). In this article, we study the problem of reconstruction a vector field from its given flows. Our main result is Theorem 2 which provides a formula for finding $\overrightarrow{A}$ (up to a solenoidal term) from its known flow through all spheres with the above condition. The paper uses the methods of harmonic analysis, as well as the theory of entire and special functions. The paper uses the methods of harmonic analysis, as well as the theory of entire and special functions. The key step in the proof of Theorem 2 is the expansion of the Dirac delta function in terms of a system of radial distributions supported in $\overline{B}_r$ biorthogonal to some system of spherical functions. A similar approach can be used to invert a number of convolution operators with radial distributions in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Keywords: vector fields, spherical means, Bessel functions, radial distributions.

Волчкова Наталья Петровна
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, Россия
volna936@gmail.com
283000, Донецк, ул. Артема 58

Volchkova Natalia Petrovna
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National Technical University, Donetsk, Russia

Волчков Виталий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
volna936@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Vitaliy Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 519.21, 51–7, 311, 303.732

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ НА БИНОМИАЛЬНОМ ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА, В СЛУЧАЕ НЕИЗВЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ СТРАХОВЫХ ИСКОВ

© 2023. ***Т. В. Жмыхова, Е. Ю. Чудина***

В статье изучается проблема оценки вероятности разорения страховых компаний, оперирующих на неполном биномиальном финансовом рынке. Для исследований применялся способ разложения плотностей распределения по ортогональным полиномам. Рассмотрен случай неизвестного распределения величины страховых исков.

Ключевые слова: пнеизвестное распределение величины исков, неполный биномиальный финансовый рынок, страховая компания, вероятность разорения, полиномы Лагерра.

Введение. Разработка моделей работы страховой компании является одним из основных направлений актуарной математики на современном этапе. Часть таких моделей не предусматривает собственных инвестиций страховой компании, однако такие модели неактуальны для современного финансового рынка [1, 2]. Как правило, крупные страховые компании осуществляют собственные инвестиции средств страхователей с целью обеспечения дополнительной доходности, ликвидности собственных фондов и безопасности финансовой деятельности. Большинство работ исследования вероятности разорения страховой компании посвящено на данном этапе исследованию модели работы страховой компании, осуществляющей инвестирование средств страхователей в финансовый рынок [3–7].

Согласно требованиям законодательства, страховые компании имеют возможность инвестирования в полный финансовый рынок, то есть в два вида активов – безрисковый (банковские депозиты) и рисковый (ценные бумаги) [8].

Постановка задачи. Рассмотрим модель работы страховой компании, осуществляющей инвестирование в неполный финансовый биномиальный рынок в случае дискретного времени. Задача данной работы состоит в определении вероятности разорения страховой компании при неизвестном распределении величины страховых исков.

Основная часть. Рассмотрим модель работы страховой компании (СК), осуществляющей инвестирование в неполный финансовый биномиальный рынок, а именно случай инвестиций в безрисковые финансовые активы с постоянной доходностью. Тогда динамика капитала СК будет описываться рекуррентным уравнением

$$X_{n+1} = X_n(1+r) + c - \eta_{n+1}, \tag{1}$$

где X_n — капитал СК на момент времени n, r — процентная ставка банка $(r > 0)$, c — скорость поступления страховых премий в СК $(c > 0)$, η_{n+1} — выплаты по страховым искам на момент времени $n+1$.

Пусть $\psi(x;k)$ — вероятность разорения на конечном интервале $[0,k]$, где $x = X_n(0)$:

$$\psi(x;k) = P\big\{X_n \le 0 \ \forall\, n, \ \ 1 \le n \le k\big\}.$$

Функция $\psi(x;k)$ является монотонно возрастающей по x и k. Пусть $\psi(x)$ — вероятность разорения СК на бесконечном промежутке времени $[0;+\infty)$. Вероятность разорения СК на бесконечном промежутке времени $[0;+\infty)$ с эволюцией капитала, заданного уравнением (1), определяется уравнением:

$$\psi_\infty(x) = \psi_1(x) + \int_0^{x(1+r)+c} \psi\big(x(1+r)+c-y\big)dG(y), \tag{2}$$

где $G(z) = P(\eta_i < z)$ — функция распределения величин страховых исков, $G(dz) = G(z+dz) - G(z)$, $\psi_1(x) = 1 - G\big(x(1+r)+c\big)$.

Замечание 1. Уравнение (2) выводится из рекуррентного соотношения из [9, с. 67], а именно

$$\psi(x;k+1) = \psi(x;1) + \int_0^{x(1+r)+c} \psi\big(x(1+r)+c-y;k\big)dG(y), \tag{3}$$

где $\psi(x;1) = 1 - G\big(x(1+r)+c\big)$.

Ранее нами была рассмотрена модель работы страховой компании в случае известного распределения величины страховых исков, сформулирована и доказана следующая теорема [13].

Теорема 1. *Пусть $\psi(x)$ — вероятность разорения СК на бесконечном промежутке времени $[0;+\infty)$:*

$$\psi(x) = P\big\{X_x(t) \le 0,\ t \in R_+\big\}.$$

Если динамика капитала СК описывается уравнением (1), то $\psi(x)$ является решением уравнения (2) и в случае известной функции распределения величин страховых исков имеет вид:

$$\psi_\infty(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\overline{f}_p + \frac{(\overline{f},\overline{d})}{1-D}\Big) e^{-\frac{x}{2}} L_p(x), \tag{4}$$

где $L_p(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} \dfrac{(-1)^l \Gamma(p+1) x^l}{l!(p-l)!\Gamma(l+1)}$,

$$D = e^{-\frac{c}{2}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{k} (-1)^k C_k^l \sum_{m=0}^{n} (-1)^n C_n^m \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^p C_p^s}{s!} \Big(\frac{2}{2+r}\Big)^{s+1} \sum_{i=0}^{l+m} c^{l+m-i} \frac{(i+s)!}{i!(l+m-i)!} \Big(\frac{2(1+r)}{2+r}\Big)^i.$$

Рассмотрим случай неизвестной функции распределения величины страховых исков.

Теорема 2. *Пусть $\psi(x)$ — вероятность разорения СК на бесконечном промежутке времени $[0;+\infty)$:*

$$\psi(x) = P\big\{X_x(t) \le 0,\ t \in R_+\big\}.$$

Если динамика капитала СК описывается уравнением (1), то $\psi(x)$ является решением уравнения (2) и в случае известной функции распределения величин страховых исков имеет вид:

$$\psi_\infty(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\overline{f}_p + \frac{(\overline{f},\overline{d})}{1-D}\Big) e^{-\frac{x}{2}} L_p(x), \tag{5}$$

где $L_p(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} \dfrac{(-1)^l \Gamma(p+1) x^l}{l!(p-l)!\Gamma(l+1)}$,

$$D = e^{-\frac{c}{2}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{k}(-1)^k C_k^l \sum_{m=0}^{n}(-1)^n C_n^m \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^p C_p^s}{s!}\left(\frac{2}{2+r}\right)^{s+1} \sum_{i=0}^{l+m} c^{l+m-i} e^{-\frac{c}{2}} \frac{(i+s)!}{i!(l+m-i)!}\left(\frac{2(1+r)}{2+r}\right)^i -$$

$$-\frac{e^{-\frac{c}{2}}}{2} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{k}(-1)^k C_k^l \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n C_n^m}{(m+l+1)!} \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^p C_p^s}{s!}\left(\frac{2}{2+r}\right)^{s+1} \sum_{i=0}^{l+m} c^{l+m+1-i} e^{-\frac{c}{2}} \frac{(i+s)!}{i!(l+m+1-i)!}\left(\frac{2(1+r)}{2+r}\right)^i$$

Доказательство. Используя способ разложения плотностей по ортогональным полиномам и их аппроксимацию линейными комбинациями заданных функций, разложение плотности $\psi_\infty(x)$ (2) будем искать в виде ряда:

$$\psi_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x). \tag{6}$$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x) + \int\limits_0^{x(1+r)+c} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x)\big(x(1+r)+c-y\big) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n'(y) dy. \tag{7}$$

Для определения коэффициентов c_p умножим (7) на $\psi_p(x)$ и проинтегрируем полученное выражение от 0 до ∞. Получим:

$$\int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) dx = \int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) \int\limits_0^{x(1+r)+c} \psi_k\big(x(1+r)+c-y\big) \psi_n'(y) dx dy.$$

Коэффициенты c_p будем искать в следующем виде:

$$c_p = \overline{f}_p + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) \int\limits_0^{x(1+r)+c} \psi_p\big(x(1+r)+c-y\big) \psi_n'(y) dx dy. \tag{8}$$

Предположим далее, что $\psi_k(x)$ — это система полиномов Лагерра, а также используем тот факт, что в этом случае функция $x(t)$ на $[0; +\infty)$ может быть представлена в виде ряда [10]:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{t}{2}} L_k^{\nu}(t), \tag{9}$$

где $L_k^{\nu}(t) = \sum\limits_{l=0}^{k} \dfrac{(-1)^l \Gamma(k+\nu+1) t^l}{l!(k-l)!\Gamma(l+\nu+1)}$.

Получим:

$$c_p = \overline{f}_p + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) \int\limits_0^{x(1+r)+c} e^{-\frac{x(1+r)+c-y}{2}} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l \Gamma(k+1)\big(x(1+r)+c-y\big)^l}{l!(k-l)!\Gamma(l+1)} \cdot \\ \cdot \Big(e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{m!(n-m)!\Gamma(m+1)} y^m\Big)' dxdy. \tag{10}$$

Дифференцируем по y:

$$\Big(e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{m!(n-m)!\Gamma(m+1)} y^m\Big)' = -\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{m!(n-m)!\Gamma(m+1)} y^m + \\ + e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{n} \frac{m(-1)^n \Gamma(n+1)}{m!(n-m)!\Gamma(m+1)} y^{m-1}.$$

Таким образом, получим:

$$c_p = \overline{f}_p + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) \int\limits_0^{x(1+r)+c} e^{-\frac{x(1+r)+c-y}{2}} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l \Gamma(k+1)\big(x(1+r)+c-y\big)^l}{l!(k-l)!\Gamma(l+1)} \cdot \\ \cdot \Big(e^{-\frac{y}{2}} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{m!(n-m)!\Gamma(m+1)} y^m\Big)' dxdy. \tag{11}$$

Найдем второе слагаемое из (11). Разделив и умножив его на величину $\big(x(1+r)+c\big)^{l+m}$, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) e^{-\frac{x(1+r)+c}{2}} dx \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l \Gamma(k+1)}{l!(k-l)!\Gamma(l+1)} \\ \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)\big(x(1+r)+c\big)^{l+m}}{m!(n-m)!\Gamma(m+1)} \cdot \int\limits_0^{x(1+r)+c} \frac{e^{-\frac{y}{2}}\big(x(1+r)+c-y\big)^l y^m}{\big(x(1+r)+c\big)^{l+m}} dy. \tag{12}$$

Сделав замену $\dfrac{y}{x(1+r)+c} = z$, а также воспользовавшись тем, что из [10] имеет место $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{\alpha_1} t^{\alpha_2-1} dt = B(\alpha_1, \alpha_2)$, (12) может быть представлено в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) e^{-\frac{x(1+r)+c}{2}} \big(x(1+r)+c\big)^{l+m+1} dx \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l \Gamma(k+1)}{l!(k-l)!\Gamma(l+1)} \\ \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1) B(l+1, m+1)}{m!(n-m)!\Gamma(m+1)}. \tag{13}$$

Используя представление бета-функции в (13), а именно $B(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l\Gamma(k+1)}{l!(k-l)!} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n\Gamma(n+1)}{m!(n-m)!\Gamma(l+m+2)} \int\limits_0^{\infty} \psi_p(x) e^{-\frac{x(1+r)+c}{2}} \big(x(1+r)+c\big)^{l+m+1} dx.$$

Используя разложение (9) для функции $\psi_p(x)$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l\Gamma(k+1)}{l!(k-l)!} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n\Gamma(n+1)}{m!(n-m)!\Gamma(l+m+2)} \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^p\Gamma(p+1)}{s!(p-s)!\Gamma(s+1)} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x(1+r)+c}{2}} x^s \big(x(1+r)+c\big)^{l+m+1} dx.$$

Выполнив элементарные преобразования степени экспоненты, используя формулу бинома Ньютона и представление гамма-функции в виде $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, последнее выражение может быть переписано в виде:

$$e^{-\frac{c}{2}} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \sum_{l=0}^{k} (-1)^k C_k^l \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n C_n^m}{(m+l)!} \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^p C_p^s}{s!} \Big(\frac{2}{2+r}\Big)^{s+1} \sum_{i=0}^{l+m} C_{l+m}^i c^{l+m-i} (i+s)! \Big(\frac{2(1+r)}{2+r}\Big)^i.$$

Подставив последнее в (11), получим равенство для нахождения неизвестных коэффициентов разложения:

$$c_p = \overline{f}_p + e^{-\frac{c}{2}} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_k f_n \sum_{l=0}^{k} (-1)^k C_k^l \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n C_n^m}{(m+l)!} \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^p C_p^s}{s!} \Big(\frac{2}{2+r}\Big)^{s+1} \sum_{i=0}^{l+m} C_{l+m}^i c^{l+m-i} (i+s)! \Big(\frac{2(1+r)}{2+r}\Big)^i.$$

Полагая теперь

$$d_k = e^{-\frac{c}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{k} (-1)^k C_k^l \sum_{m=0}^{n} (-1)^n C_n^m \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^p C_p^s}{s!} \Big(\frac{2}{2+r}\Big)^{s+1} \sum_{i=0}^{l+m} c^{l+m-i} \frac{(i+s)!}{i!(l+m-i)!} \Big(\frac{2(1+r)}{2+r}\Big)^i,$$

последнее равенство можно переписать в виде:

$$c_p = \overline{f}_p + \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k, \tag{14}$$

если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k = D < 1$.

Или в скалярном виде

$$c_p = \overline{f}_p + (\overline{c}, \overline{d}). \tag{15}$$

Умножив данное равенство на d_p, просуммировав на $[0; +\infty)$ и используя вид скалярного произведения, нетрудно убедиться в том, что

$$(\overline{c}, \overline{d}) = \frac{(\overline{f}, \overline{d})}{1 - D}. \tag{16}$$

Подставив (16) в (15), окончательно получим:

$$c_p = \overline{f}_p + \frac{(\overline{f}, \overline{d})}{1 - D}. \tag{17}$$

Таким образом, решение уравнения (9) будет иметь вид:

$$\psi_\infty(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\overline{f}_p + \frac{(\overline{f}, \overline{d})}{1 - D} \right) e^{-\frac{x}{2}} L_p(x), \tag{18}$$

где $L_p(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} \dfrac{(-1)^l \Gamma(p+1) x^l}{l!(p-l)!\Gamma(l+1)}$.

$\square$

Заключение. В данной работе была сформулирована и доказана теорема о вероятности разорения страховой компании, инвестирующей на неполный биномиальный финансовый (B, S)–рынок, в случае стохастически недетерминированной функции распределения величин страховых исков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boikov A. V. Cramer – Lundberg model with stochastic premiums / A.V. Boikov // Theory of probabilities and its applications. – 2003. – V. 47, № 3. – P. 549–553.
2. Gilina L. S. The estimation of the probability of ruin of insurance company for some model of insurance/ L.S. Gilina // Applied statistics. Actuarial and financial mathematics. – 2000. – № 1. – P. 67–78.
3. Bondarev B. V. The asymptotic behavior of the ruin probability of insurance companies operating in the financial (B, S) – market / B. V. Bondarev, T. V. Zhmykhova // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2008. – № 2. – P. 573–581.
4. Aleksandrova O. V. Finding insurance companies capital operating in the financial market by the methods of the group analysis / O. V. Aleksandrova, T. V. Zhmykhova // Vestnik of Voronezh state university. Physics. Mathematics. – 2015. – № 3. – P. 65–72.
5. Александрова О.В. Капитал инвестиционной компании с описываемой моделью Орнштейна-Уленбека ценой рискового актива как решение стохастического дифференциального уравнения // О.В. Александрова, Т.В. Жмыхова // Вестник Пермского университета, Серия: Математика, механика, информатика. – 2020. – № 3 (50). – С. 24–28.
6. Жмыхова Т. В. Оптимальное управление потребительским фондом с функциями страховой компании при условии его работы на финансовом рынке и проводящим рекламную кампанию / Т. В. Жмыхова, В. О. Болдырева // Random operators and stochastic equation, 2020. – Issue 1, V. 28. – P. 27–35.
7. Александрова О. В. Использование методов группового анализа для оценки капитала страховой компании на финансовом (B, S) – рынке с описываемой моделью Хестона ценой рискового актива / О.В. Александрова, Т.В. Жмыхова // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 1. – С. 3–7.

8. Приказ Министерства финансов Российской Федерации от 08.08.2005 No 100н «Об утверждении Правил размещения страховщиками средств страховых резервов» [Электронный ресурс]. – URL: https://minfin.gov.ru/ru/document/?id_4=3879-prikaz_minfina_rossii_ot_08_avgusta_2005_g.__100n (дата обращения 22.04.2023).
9. Мельников А.В. Риск-менеджмент: Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования / А.В. Мельников. – М.: Анкил, 2001. – 112 с.
10. Ильин В.А. Математический анализ/ В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. – Под редакцией А.Н. Тихонова. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 720 с.
11. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
12. Александрова О.В. Использование опыта организации избирательных кампаний при выборе рекламных стратегий страховых компаний / О.В. Александрова, Б.В. Бондарев, Т.В. Жмыхова. – Проблемы искусственного интеллекта. – No 1 (12). – Донецк, 2019. – С. 4–16.
13. Жмыхова Т.В. Вероятность разорения страховой компании, оперирующей на биномиальном финансовом рынке, определяемая на основе полиномов Лагерра / Т.В. Жмыхова, Е.Ю. Чудина. – Проблемы искусственного интеллекта. – No 4 (27). – Донецк, 2022. – С. 16–23.

Поступила в редакцию 29.07.2023 г.

THE PROBABILITY OF BANKRUPTCY OF AN INSURANCE COMPANY IN THE BINOMIAL FINANCIAL MARKET, DETERMINED ON THE BASIS OF LAGUERRE POLYNOMIALS, IN THE CASE OF AN UNKNOWN DISTRIBUTION OF THE VALUE OF INSURANCE CLAIMS

T. V. Zhmykhova, E. Yu. Chudina

The article studies the problem of assessing the probability of bankruptcy of insurance companies operating in an incomplete binomial financial market. The method of decomposition of distribution densities by orthogonal polynomials was used for research. The case of an unknown distribution of the value of insurance claims is considered.

Keywords: unknown distribution of claims, incomplete binomial financial market, insurance company, probability of ruin, Laguerre polynomials.

Жмыхова Татьяна Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО "Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
г. Макеевка, ДНР
zhmykhovatanya@mail.ru
286123, г. Макеевка, ул. Державина, 2

Tetiana Vladimirovna Zhmykhova
Candidate of sciences in physics and mathematics, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, DPR

Чудина Екатерина Юрьевна
кандидат педагогических наук
ФГБОУ ВО "Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
г. Макеевка, ДНР
eka-chudina@yandex.ru
286123, г. Макеевка, ул. Державина, 2

Ekaterina Yuryevna Chudina
Candidate of pedagogical Science,
Associate Professor of Higher mathematics department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, DPR

УДК 517.5

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БЕЗИКОВИЧА О ПОКРЫТИИ

© 2023. *Д. А. Зарайский*

В данной работе предлагается новое доказательство теоремы Безиковича о покрытии, которая существенно используется при доказательстве многих фактов вещественного анализа.

Ключевые слова: теорема Безиковича о покрытии, теорема Витали о покрытии, теорема Уитни о покрытии.

Введение.

Теорема о покрытии шарами, полученная Безиковичем в 1945 году (см. [1]), является одним из классических результатов комбинаторной геометрии, который имеет важные приложения в теории меры и теории функций. Она существенно используется при доказательстве многих фактов вещественного анализа. Это касается, например, известных теорем Витали и Уитни о покры-тиях, варианта Гусмана теоремы Сарда о критических точках, теоремы Лебега о дифференцировании интеграла, теорем о свойствах максимального оператора Харди – Литтлвуда (см.[2], [3]). Отметим, что спустя 20 лет теорема Безиковича была переоткрыта Н. С. Ландкофом [4], [5, лемма 3.2, глава 3, §4]. В работе [5] Н. С. Ландкоф использовал доказанный им результат для оценок потенциалов. По поводу других результатов, связанных с теоремой Безиковича см. также [6]. В данной работе предлагается новое доказательство теоремы Безиковича.

Формулировка и доказательство основного результата

Теорема 1. *(Безиковича о покрытии) Пусть $\mathscr{F}$ — множество замкнутых шаров в $\mathbb{R}^n$ с равномерно ограниченными положительными радиусами, и A — множество центров шаров из $\mathscr{F}$. Тогда можно найти $\mathscr{F}_1, ..., \mathscr{F}_N \subset \mathscr{F}$, такие что шары в каждом из них попарно не пересекаются и $\mathscr{F}_1 \cup ... \cup \mathscr{F}_N$ покрывает A, где $N = N(n)$ — константа, зависящая только от размерности пространства (фактически, можно взять $N = 4 \cdot 12^n$).*

Доказательство. Если утверждение теоремы доказано для случая ограниченных множеств A, то, рассматривая пересечения A со слоями $\{2kR \leq ||x|| < 2(k+1)R\}$, где R — верхняя грань радиусов элементов $\mathscr{F}$ и объединяя полученные подпокрытия для чётных и нечётных m, получаем утверждение теоремы в общем случае (с в два раза большим N). Поэтому A можно считать ограниченным.

Определим по индукции конечную или бесконечную последовательность шаров $B_k = \overline{B}_{r_k}(a_k)$ из $\mathscr{F}$ таким образом, чтобы центр a_k шара B_k принадлежал $A_k = A \backslash (B_1 \cup ... \cup B_{k-1}$ (последовательность обрывается, если $A_k = \emptyset$), а радиус r_k, был больше $\frac{3}{4} R_k$, где R_k — точная верхняя грань радиусов шаров из $\mathscr{F}$, имеющих центры в точках из A_k.

Покажем, что последовательность $\{B_k\}_{k=1}^K$ покрывает A. Если она конечна, то это следует из построения (т. к. $A_{K+1} = \emptyset$), поэтому будем считать её бесконечной. Последовательность R_k (нестрого) убывает и поэтому должна стремиться к нулю $k \to \infty$, так как если $R_k \geq \epsilon > 0$, то шары $B_{3\epsilon/8}(a_k)$ попарно не пересекаются, что противоречит ограниченности множества A. Предположим, что $a_0 \in A$ не лежит в объединении $\cup_{k=1}^{\infty} B_k$; тогда, рассматривая некоторый шар $\overline{B}_{r_0}(a_0)$ из $\mathscr{F}$, заключаем, что для любого k (поскольку, по предположению, $a_0 \in A_k$) имеет место неравенство $R_k \geq r_0$ — приходим к противоречию.

Осталось разбить шары B_k на N групп, в каждой из которых шары попарно дизъюнктны. Это можно сделать по индукции, добавляя шар B_l к тому из $\mathscr{F}_i$, с уже имеющимися элементами которого он не пересекается, достаточно установить только, что число шаров $B_k, 1 \leq k < l$, пересекающихся с B_l, меньше некоторой константы $N = N(n)$. Именно в этой части доказательство теоремы Безиковича существенно отличается от теоремы Витали и использует геометрические рассуждения. Между центрами и радиусами шаров B_k, по построению, имеются следующие два соотношения:

$$||a_k - a_j|| > r_k \text{ и } r_k > \tfrac{3}{4} r_j, \text{ если } k < j.$$

(Первое неравенство — просто запись соотношения $a_j \notin B_k$, второе следует из того, что $a_j \in A_j \subset A_k$, и, следовательно, $R_k \geq r_j$). Зафиксируем теперь некоторое l и будем обозначать далее $B_l = \overline{B}_r(a)$, т. е. $a = a_l$ и $r = r_l$.

Оценим сначала число тех $k < l$, для которых $B_k \cap B_l \neq \emptyset$ и $r_k \geq 3r$, обозначим множество таких k через I_l. Для $k \in I_l$ положим $s_k = (a_k - a)/||a_k - a||, \rho_k = ||a_k - a||$, тогда $||s_k|| = 1$ и $a_k = a + \rho_k s_k$.

Пусть $1 \leq k < j < l$ и $k, j \in I_l$. Тогда имеем оценку

$$3r \leq r_j < ||a_j - a|| \leq r + r_j < r + 4r_k/3 \leq 5r_k/3.$$

То есть $3r < \rho_j < 5r_k/3$. Покажем, что при $\rho \in [3r, 5r_k/3]$ шар $\overline{B}_{\rho/5}(a + \rho s_k)$ содержится в $B_k = \overline{B}_{r_k}(a_k)$. Действительно, если $\rho \geq \rho_k$, то

$$|\rho - \rho_k| = \rho - ||a_k - a|| < 5r_k/3 - r_k = 2r_k/3 \leq r_k - \rho/5$$

если же $\rho < \rho_k$, то

$$|\rho - \rho_k| = ||a_k - a|| - \rho \leq r + r_k - \rho \leq \rho/3 + r_k - \rho \leq r_k - \rho/5$$

поэтому в любом случае $||a + \rho s_k - a_k|| = |\rho - \rho_k| \leq r_k - \rho/5$ и, значит, $\overline{B}_{\rho/5}(a + \rho s_k) \subset \overline{B}_{r_k}(a_k) \notin a_j = a + \rho_j s_j$. Полагая здесь $\rho = \rho_j$, получаем: $||\rho_j s_j - \rho_j s_k|| > \rho_j/5$. Поэтому шары $B_{1/10}(s_k), k \in I_l$, попарно не пересекаются и (т. к. они содержатся в $B_{11/10}(0)$) существует не более 11^n таких k.

Оценим теперь число элементов множества $\widetilde{I}_l$ таких $k < l$, для которых $B_k \cap B_l \neq \emptyset$ и $r_k < 3r$. При $k, j \in \widetilde{I}_l, k < j$, имеем: и $||a_k - a_j|| > r_k > 3r/4$ и $||a_k - a|| \leq r + r_k < 4r$. Поэтому шары $B_{3r/8}(a_k), k \in \widetilde{I}_l$, дизъюнктны и содержатся в $B_{35r/8}(a)$, значит их общее число не превосходит $(35/3)^n < 12^n$.

Итак, для случая ограниченных A можно положить $N = 11^n + 12^n$. □

Выводы.

Получено новое доказательство теоремы Безиковича о покрытии шарами. Из этого доказательства видно, что константа в теореме Безиковича не превосходит $4 \cdot 12^n$, а в случае ограниченного множества центров - $11^n + 12^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Besicovich A.S. A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions. // Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 41 – 1945. – P. 103–110.
2. Гусман М. Дифференцирование интегралов в Rn. //М.: Мир. – 1978.

3. Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функций.// Пер. с англ. – Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), Университетская серия. Т.9 – 2002. – С. 216
4. Ландкоф Н.С. Ёмкости и меры Хаусдорфа. Оценки потенциалов // Успехи математических наук. Т. 20. – 1965. С. 189–195.
5. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала.// М.: Наука, ФМЛ. – 1966.
6. Гришин А.Ф., Крижановский О.Ф. Экстремальная задача для матриц и теорема Безиковича о покрытии.//Математическое просвещение. Третья серия, вып.14. М.: МЦНМО. - С. 288

Поступила в редакцию 17.08.2023 г.

A NEW PROOF OF BEZIKOVICH'S COVERING THEOREM

D. A. Zaraisky

In this paper, a new proof of Bezikovich's covering theorem is proposed, which is significantly used in proving many facts of real analysis.

Keywords: Bezikovich's covering theorem, a theorem Vitali on covering, Whitney's theorem on covering.

Зарайский Даниил Анатольевич
ГУ «Институт прикладной математики и механики»,
Отдел теории функций
г. Донецк, Россия
d.zaraisky@gmail.com
283114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74,

Zaraisky Daniel Anatolievich
State Institution "Institute of Applied Mathematics and Mechanics"
Donetsk, Russia

УДК 517.5+519.213

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И КРИТЕРИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ЭТИХ НЕРАВЕНСТВАХ

© 2023. ***В. П. Заставный***

Пусть φ - положительно определенная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, а μ - соответствующая мера Бохнера. Для фиксированных $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$, и μ-измеримой вещественнозначной функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, рассматривается линейный оператор H_ε порожденный функцией φ:

$$H_\varepsilon(f)(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ih(u)} f(t + \varepsilon u) d\mu(u),\ t \in \mathbb{R},\ f \in C(\mathbb{T}).$$

Пусть функция J выпукла вниз и не убывает на $[0, +\infty)$. Аналогично случаю $h(u) = \tau u$, который автором был рассмотрен ранее, доказаны неравенства

$$\int_{\mathbb{T}} J\left(|H_\varepsilon(f)(t)|\right) dt \le \int_{\mathbb{T}} J\left(\varphi(0)|f(t)|\right) dt,\ \|H_\varepsilon(f)\|_p \leqslant \varphi(0)\|f\|_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ f \in C(\mathbb{T}),$$

и получены критерии экстремальной функции. В качестве примера применения критерия разобран случай оператора $H(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k f\left(t - \tau + \frac{k\pi}{n}\right)$, где $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ – фиксированный набор комплексных чисел.

***Ключевые слова*:** положительно определенная функция, интегральные неравенства, критерий экстремальной функции.

1. Интегральные неравенства и критерий экстремальной функции. Символом $C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$, обозначим класс 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, которые непрерывны на $\mathbb{R}$. Для $f \in C(\mathbb{T})$ полагаем

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| :\ t \in \mathbb{T}\} \text{ и } \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty.$$

Комплекснозначная функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($\varphi \in \Phi(\mathbb{R})$), если при любом $m \in \mathbb{N}$, для любого набора точек $\{x_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}$ и любых комплексных чисел $\{c_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,j=1}^m c_k \overline{c_j} \varphi(x_k - x_j) \geqslant 0.$$

Известная теорема Бохнера-Хинчина утверждает, что *функция $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mu(t),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

Отсюда получается следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье: *Если* $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, *то* $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \iff \widehat{\varphi}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, *где*

$$\widehat{\varphi}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(x)dx,\ t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и μ - соответствующая конечная неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}$, для которой выполняется (1). Для фиксированных $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$, и μ-измеримой вещественнозначной функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассмотрим оператор H_ε порождённый функцией φ:

$$H_\varepsilon(f)(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ih(u)} f(t + \varepsilon u)d\mu(u),\ t \in \mathbb{R},\ f \in C(\mathbb{T}). \tag{2}$$

Функция $H_\varepsilon(f)(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, является 2π-периодической и её ряд Фурье имеет вид:

$$H_\varepsilon(f)(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(k\varepsilon, h)c_k(f)e^{ikt},\ \lambda(k\varepsilon, h) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(uk\varepsilon - h(u))}\, d\mu(u),$$

где $c_k(f)$ - коэффициенты Фурье функции f:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Следующее неравенство очевидно:

$$|H_\varepsilon(f)(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t + \varepsilon u)|d\mu(u),\ f \in C(\mathbb{T}),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Из (3) сразу получается неравенство

$$\|H_\varepsilon(f)\|_p \leqslant \varphi(0)\|f\|_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ f \in C(\mathbb{T}), \tag{4}$$

которое при $p = \infty$ очевидно, а при $1 \leqslant p < \infty$ надо использовать ещё неравенство Минковского [1, теорема 2.4].

Пусть дополнительно $\varphi(0) > 0$ (это эквивалентно условию $\varphi(x) \not\equiv 0$). Предположим, что функция J выпукла вниз и не убывает на $[0, +\infty)$. Из неравенства (3) для $f \in C(\mathbb{T})$, используя монотонность J, неравенство Йенсена (см., например, [1, § 2.2], применяя теорему Фубини и учитывая периодичность f, получаем:

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{T}} J\left(|H_\varepsilon(f)(t)|\right)\, dt \leq \int_{\mathbb{T}} J\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t + \varepsilon u)|d\mu(u)\right)\, dt \leq \\ \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{R}} J\left(\varphi(0)|f(t + \varepsilon u)|\right)\frac{d\mu(u)}{\varphi(0)}\, dt = \int_{\mathbb{T}} J\left(\varphi(0)|f(t)|\right)\, dt.\end{gathered} \tag{5}$$

Таким образом

$$\int_{\mathbb{T}} J\left(|H_\varepsilon(f)(t)|\right)\, dt \leq \int_{\mathbb{T}} J\left(\varphi(0)|f(t)|\right)\, dt,\ f \in C(\mathbb{T}). \tag{6}$$

Неравенство (4) при $1 \leq p < \infty$ получается также и из неравенства (6), когда $J(t) = t^p$.

Замечание 1. Если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0,+\infty)$, а неравенство (6) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$, то из (5) следует, что неравенство (3) для f обращается в равенство при любом $t \in \mathbb{R}$ и, значит, неравенство (4) при $p = 1$ для f обращается в равенство. В частности, любая экстремальная функция $f \in C(\mathbb{T})$ в неравенстве (4) при $1 < p < \infty$ является экстремальной в этом неравенстве и при $p = 1$.

Для функции $h(u) = \tau u$, $\tau \in \mathbb{R}$, операторы H_ε рассмотрены в работе автора [2], где они обозначаются символом $A_{\varepsilon,\tau} := H_\varepsilon$. В этом случае $\lambda(k\varepsilon, h) = \varphi(k\varepsilon - \tau)$, $k \in \mathbb{Z}$. Для операторов $A_{\varepsilon,\tau}$ в [2, Замечание 2] приведены критерии экстремальной функции $f \in C(\mathbb{T})$ в неравенстве (4) для случаев $p = \infty$, $p = 1$ и $1 < p < \infty$. В [2, Теорема 4] получен также критерий экстремальной функции $f \in C(\mathbb{T})$ в неравенстве (6) в случае, когда функция J не убывает на $[0,+\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0,+\infty)$. Аналогично доказываются следующие критерии и для произвольной вещественнозначной функции h, где учтено и замечание 1.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $\varphi(0) > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$, и h является μ-измеримой вещественнозначной функцией на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1) *При $p = \infty$ неравенство (4) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$ $\iff$ для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ и для μ-почти всех $u \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $e^{-ih(u)} f(\eta + \varepsilon u) = e^{i\delta} \|f\|_\infty$.*

2) **i.** *При $p = 1$ неравенство (4) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$ $\iff$ для любого $t \in \mathbb{R}$ найдётся число $\delta(t) \in \mathbb{R}$ такое, что для μ-почти всех $u \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $e^{-ih(u)} f(t + \varepsilon u) = e^{i\delta(t)} |f(t + \varepsilon u)|$.*

ii. *Если неравенство (4) при $p = 1$ обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$, то неравенство (4) при $p = 1$ обращается в равенство для любой функции вида $cf(t)g(t)$, где $c \in \mathbb{C}$, $g \in C(\mathbb{T})$ и $g(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$.*

3) *Если функция J не убывает на $[0,+\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0,+\infty)$, то неравенство (6) (или неравенство (4) при $1 < p < \infty$) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$ $\iff$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и для μ-почти всех $u \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $e^{-ih(u)} f(t + \varepsilon u) = c(t)$, где $c(t) = H_\varepsilon(f)(t)/\varphi(0) \in C(\mathbb{T})$.*

4) *Если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0,+\infty)$, а неравенство (6) (или неравенство (4) при $1 < p < \infty$) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$, то и неравенство (4) при $p = 1$ также обращается в равенство для этой функции f.*

Оператором вида (2) является следующий оператор

$$\begin{gathered} H(f)(t) := \sum_{k=0}^{m} e^{-ih_k} \mu_k f(t + t_k),\ m \in \mathbb{Z}_+,\ f \in C(\mathbb{T}), \\ \mu_k \geq 0,\ h_k, t_k \in \mathbb{R},\ t_k \neq t_j \text{ при } k \neq j,\ \mu_0 + \ldots + \mu_m > 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Действительно, если в (2) мера μ дискретная и сосредоточена в точках $\{t_k\}_{k=0}^m$, $\mu(\{t_k\}) = \mu_k \geq 0$, а $h(t)$ – произвольная вещественнозначная функция с условием $h(t_k) = h_k$, $k = 0, \ldots, m$, то $H = H_1$. В этом случае $\varphi(x) \equiv \mu_0 e^{it_0 x} + \ldots + \mu_m e^{it_m x}$ и $\varphi(0) = \mu_0 + \ldots + \mu_m > 0$. Из теоремы 1 для оператора H получается следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть функция J выпукла вниз и не убывает на $[0,+\infty)$. Тогда для* *оператора H вида (7) справедливы неравенства, в которых $\varkappa = \mu_0 + \ldots + \mu_m > 0$:*

$$\int_{\mathbb{T}} J\left(|H(f)(t)|\right)\,dt \le \int_{\mathbb{T}} J\left(\varkappa|f(t)|\right)\,dt, \quad f \in C(\mathbb{T})\,, \tag{8}$$

$$\|H(f)\|_p \leqslant \varkappa\|f\|_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ f \in C(\mathbb{T}). \tag{9}$$

Пусть $U(H)$ – множество всех $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, для которых $\mu_k \neq 0$. Тогда справедливы утверждения:

1) *При $p = \infty$ неравенство (9) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$ $\iff$ для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ равенство $e^{-ih_k} f(\eta + t_k) = e^{i\delta}\|f\|_\infty$ выполняется для всех целых $k \in U(H)$.*

2) **i.** *При $p = 1$ неравенство (9) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$ $\iff$ для любого $t \in \mathbb{R}$ найдётся число $\delta(t) \in \mathbb{R}$ такое, что тождество $e^{-ih_k} f(t + t_k) \equiv e^{i\delta(t)}|f(t + t_k)|$ выполняется для всех целых $k \in U(H)$.*

ii. *Если неравенство (9) при $p = 1$ обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$, то неравенство (9) при $p = 1$ обращается в равенство для любой функции вида $cf(t)g(t)$, где $c \in \mathbb{C}$, $g \in C(\mathbb{T})$ и $g(t) \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$.*

3) *Если функция J не убывает на $[0, +\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0, +\infty)$, то неравенство (8) (или неравенство (9) при $1 < p < \infty$) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$ $\iff$ функции $e^{-ih_k} f(t + t_k)$ тождественно равны между собой на $\mathbb{R}$ для всех целых $k \in U(H)$.*

4) *Если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0, +\infty)$, а неравенство (8) (или неравенство (9) при $1 < p < \infty$) обращается в равенство для некоторой функции $f \in C(\mathbb{T})$, то и неравенство (9) при $p = 1$ также обращается в равенство для этой функции f.*

2. Интерполяционные операторы. Рассмотрим оператор $H : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$, заданный по формуле

$$H(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k f\left(t - \tau + \frac{k\pi}{n}\right),\ f \in C(\mathbb{T}), \tag{10}$$

где $n \in \mathbb{N}$, τ – фиксированное действительное число, а $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ – фиксированный набор комплексных чисел с условием $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$. Для удобства считаем, что наборы чисел $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ и $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{2n-1}$, где $\varepsilon_k \in \mathbb{C}$ определяется из условия $|\varepsilon_k| = 1$, $\Lambda_k = \varepsilon_k|\Lambda_k|$, продолжены на множество всех целочисленных индексов $k \in \mathbb{Z}$ с периодом $2n$, т.е. $\Lambda_{k+2n} = \Lambda_k$ и $\varepsilon_{k+2n} = \varepsilon_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Оператор H имеет вид (7) для $m = 2n-1$, $\mu_k = |\Lambda_k|$, $e^{-ih_k} = \varepsilon_k$ и $t_k = -\tau + k\pi/n$. Поэтому для него выполняются неравенства (8) и (9) и применимо следствие 1.

Функция $f \in C(\mathbb{T})$ является экстремальной для неравенства (9) при $p = \infty$ $\iff$ для некоторых $\eta, \delta \in \mathbb{R}$ равенство $\varepsilon_k f(\eta + k\pi/n) = e^{i\delta}\|f\|_\infty$ выполняется для всех целых $k \in U(H)$. Среди таких функций всегда есть ненулевая, например кусочно-линейная:

$$f(t) = \overline{\varepsilon_{k+1}}(nt/\pi - k) + \overline{\varepsilon_k}(k + 1 - nt/\pi),\ k\pi/n \le t \le (k+1)\pi/n,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно $f \in C(\mathbb{T})$, $\varepsilon_k f(k\pi/n) = 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, $|f(t)| \le 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и, значит $||f||_\infty = 1$. Поэтому неравенство (9) при $p = \infty$ всегда является точным.

Если выполнено условие (11):

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| = 1\ :\ \varepsilon\Lambda_k(-1)^k \ge 0,\ k = 0, \ldots, 2n-1, \tag{11}$$

то неравенства (8) и (9) являются точными и экстремальной является, например, любая функция $f \in C(\mathbb{T})$, ряд Фурье которой имеет вид

$$f(t) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m e^{in(2m+1)t} . \tag{12}$$

Это следует из того, что для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$, ряд Фурье которых имеет вид (12), выполняется тождество $H(f)(t) \equiv \varkappa_1 f(t-\tau)$, где

$$\varkappa_1 = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k (-1)^k. \tag{13}$$

Но при выполнении условия (11) выполняется равенство $\varkappa_1 = \overline{\varepsilon}\varkappa$.

Для неравенства (9) при $p = 1$ экстремальными являются также функции вида $f(t)g(t)$, где $g \in C(\mathbb{T})$ и $g(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, а ряд Фурье функции $f \in C(\mathbb{T})$ имеет вид (12) (см. в следствии 1 утверждение **ii**).

В следующей теореме 2 приведено достаточное условие, когда неравенства (8) и (9) при $1 < p < \infty$ являются точными и множество экстремальных функций в этих неравенствах совпадает со всеми функциями $f \in C(\mathbb{T})$, ряд Фурье которых имеет вид (12). В частном случае эта теорема доказана в [2, Theorem 5] и без эквивалентности двух условий.

Теорема 2. *Пусть оператор $H : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ задан по формуле (10), где τ – фиксированное действительное число, а $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ – фиксированный набор комплексных чисел с условием $\varkappa = |\Lambda_0| + \ldots + |\Lambda_{2n-1}| > 0$, а функция J не убывает на $[0, +\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0, +\infty)$. Пусть выполняется условие*

$$\exists s \in \mathbb{Z} : \overline{\Lambda_s}\Lambda_{s+1} < 0. \tag{14}$$

Тогда следующие два условия эквивалентны:
(1) для одного из неравенств (8) или (9) при $1 < p < \infty$ существует ненулевая экстремальная функция;
(2) выполняется условие (11).
Если выполняется одно из этих двух условий, то неравенства (8) и (9) при $1 < p < \infty$ являются точными и множество экстремальных функций в этих неравенствах совпадает со всеми функциями $f \in C(\mathbb{T})$, ряд Фурье которых имеет вид (12).

Доказательство. Пусть для некоторого целого $s \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $\overline{\Lambda_s}\Lambda_{s+1} < 0$, а целые числа $k_1, k_2 \in [0, 2n-1)$ такие, что числа $m_1 = (s-k_1)/(2n)$ и $m_2 = (s+1-k_2)/(2n)$ являются целыми. Тогда $k_2 - k_1 = 2(m_1 - m_2)n + 1$ и $\Lambda_s = \Lambda_{k_1} = \varepsilon_{k_1}|\Lambda_{k_1}| \neq 0$ и $\Lambda_{s+1} = \Lambda_{k_2} = \varepsilon_{k_2}|\Lambda_{k_2}| \neq 0$. Поэтому $\overline{\varepsilon_{k_1}}\,\varepsilon_{k_2} < 0$ и, следовательно, $\overline{\varepsilon_{k_1}}\,\varepsilon_{k_2} = -1$.

Если функция $f \in C(\mathbb{T})$ является экстремальной для одного из неравенств (8) или (9) при $1 < p < \infty$, то по следствию 1 выполняется тождество $\varepsilon_{k_1} f(t+t_{k_1}) \equiv \varepsilon_{k_2} f(t+t_{k_2})$, где $t_k = -\tau + k\pi/n$. Учитывая, что $\overline{\varepsilon_{k_1}}\,\varepsilon_{k_2} = -1$ и $t_{k_2} - t_{k_1} = 2m\pi + \pi/n$ для некоторого целого m, получаем тождество $f(t+\pi/n) \equiv -f(t)$. Тогда для коэффициентов Фурье функции f справедливы равенства $c_k(f) = -e^{ik\pi/n}c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $c_k(f) \neq 0$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то $k = n(2m+1)$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Это значит, что ряд Фурье функции f имеет вид (12).

Докажем импликацию $(1) \Rightarrow (2)$. Если для одного из неравенств (8) или (9) при $1 < p < \infty$ существует ненулевая экстремальная функция $f \in C(\mathbb{T})$, то по доказанному выше ряд Фурье функции f имеет вид (12). Тогда для такой функции выполняется тождество $H(f)(t) \equiv \varkappa_1 f(t-\tau)$, где число $\varkappa_1$ определено по формуле (13). Так как функция J строго возрастает на $[0,+\infty)$ и $|\varkappa_1| \le \varkappa$, то справедливы неравенства (неравенство (9) это неравенство (8) для $J(t) = t^p$):

$$\int_{\mathbb{T}} J\left(\varkappa|f(t)|\right)\,dt = \int_{\mathbb{T}} J\left(|H(f)(t)|\right)\,dt = \int_{\mathbb{T}} J\left(|\varkappa_1 f(t-\tau)|\right)\,dt =$$
$$\int_{\mathbb{T}} J\left(|\varkappa_1|\,|f(t)|\right)\,dt \le \int_{\mathbb{T}} J\left(\varkappa|f(t)|\right)\,dt.$$

Из этого неравенства, учитывая что функция f ненулевая, вытекает равенство $|\varkappa_1| = \varkappa$, которое эквивалентно условию (11). Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ доказана.

Импликация $(2) \Rightarrow (1)$ доказана в замечании перед теоремой 2 и без предположения выполнения условия (14). Таким образом, эквивалентность условий (1) и (2) в теореме доказана.

Если выполняется одно из условий (1) или (2), то из условия (11) вытекает, что неравенства (8) и (9) при $1 < p < \infty$ являются точными и экстремальной функцией в этих неравенствах является любая функция $f \in C(\mathbb{T})$, ряд Фурье которой имеет вид (12), а других экстремальных функций нет (доказано перед доказательством импликации $(1) \Rightarrow (2)$). $\square$.

В заключении отметим, что интерполяционные операторы вида (10), рассматриваемые на подпространстве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов степени не выше n, изучаются давно. Такими операторами, например, являются операторы обычной и дробной производной $H(f)(t) = f^{(r,\beta)}(t)$, $f \in \mathscr{T}_n$, $r \ge 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, а представления (10) при $\tau = -\beta/n$ для этих производных получили в частных случаях в 1914 М. Рисс [3, 4] и в 1928 Сегё [5], а в общем случае в 1998 А.И. Козко [6]. Для этих операторов при указанных параметрах выполняются условие (11) и поэтому неравенства (8) и (9) с $\varkappa = n^r$ точны и неравенства обращаются в равенства для полиномов вида $f(t) = \mu e^{int} + \nu e^{-int}$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Неравенства (8) и (9) для этих операторов принято называть неравенствами Бернштейна-Сегё (более подробно см., например, [2, 7]). Автором [2, § 6] доказано, что выполняется условие (14) и поэтому (см. теорему 2) других экстремальных полиномов нет по крайней мере, если функция J не убывает на $[0,+\infty)$ и строго выпукла вниз в каждой точке интервала $(0,+\infty)$ и $1 < p < \infty$. Недавно автором доказано, что такой же ответ, если функция J выпукла вниз и строго возрастает на $[0,+\infty)$ и $p = \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lieb E. Analysis / E. Lieb, M. Loss. – Graduete Studies in Math., vol. 14, AMS, Providence, Rhode Island, 1997.
2. Zastavnyi V.P. Positive definite functions and sharp inequalities for periodic functions / V.P. Zastavnyi // Ural Math. J. – 2017. – Vol. 3, № 2. – P. 82–99. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.011
3. Riesz M. Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique / M. Riesz // C. R. Acad. Sci. – 1914. – Vol. 158. – P. 1152–1154.
4. Riesz M. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome / M. Riesz // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – 1914. – Vol. 23. – P. 354–368.
5. Szegö G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein / G. Szegö // Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft. – 1928. – Vol. 5, № 4. – P. 59–70.

6. Kozko A.I. The exact constants in the Bernstein-Zygmund-Szegö inequalities with fractional derivatives and the Jackson-Nikolskii inequality for trigonometric polynomials / A.I. Kozko // East J. Approx. – 1998. – Vol. 4, № 3. – P. 391–416.
7. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Неравенство Бернштейна–Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов / В.В. Арестов, П.Ю. Глазырина // Тр. ИММ УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 17–31.

Поступила в редакцию 26.06.2023 г.

INTEGRAL INEQUALITIES FOR PERIODIC FUNCTIONS AND A CRITERION FOR AN EXTREMAL FUNCTION IN THESE INEQUALITIES

V. P. Zastavnyi

Let φ be a positive definite and continuous function on $\mathbb{R}$, and let μ be the corresponding Bochner measure. For fixed $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$, and μ-measurable real-valued function $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, we consider a linear operator H_ε generated by the function φ:

$$H_\varepsilon(f)(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ih(u)} f(t+\varepsilon u)d\mu(u),\ t \in \mathbb{R},\ f \in C(\mathbb{T}).$$

Let J be a convex and nondecreasing function on $[0, +\infty)$. Similarly to the case $h(u) = \tau u$, to which the author was considered earlier, we prove the inequalities

$$\int_{\mathbb{T}} J\left(|H_\varepsilon(f)(t)|\right)\, dt \le \int_{\mathbb{T}} J\left(\varphi(0)|f(t)|\right)\, dt,\ \|H_\varepsilon(f)\|_p \leqslant \varphi(0)\|f\|_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ f \in C(\mathbb{T}),$$

and obtain criteria of extremal function. As an example of the application of the criterion, the case of an operator $H(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_k f\left(t - \tau + \frac{k\pi}{n}\right)$ is considered, where $\{\Lambda_k\}_{k=0}^{2n-1}$ is a fixed set of complex numbers.

Keywords: positive definite function, integral inequalities, criterion of extremal function.

Заставный Виктор Петрович
доктор физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
zastavn@rambler.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Zastavnyi Viktor Petrovych
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 517.1,51.8,519.66

НОВЫЙ МЕТОД КОНСТРУИРОВАНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ПРИ ПОМОЩИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ

© 2023. *А. Ю. Иванов, А.-В. В. Мельник*

В статье распространяется авторский метод построения магических квадратов нечетного порядка на случай матриц, порядок которых удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

***Ключевые слова*:** Магический квадрат, полумагический квадрат, латинский квадрат, перестановка, трансверсаль.

Введение. Матрицу $n \times n$, заполненную целыми числами от 1 до n^2 так, что их суммы в каждой строке и столбце равны $\Sigma(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$, называют полумагическим квадратом, а если к тому же суммы элементов, находящихся на главной и побочной диагоналях, также равны $\Sigma(n)$, то такую матрицу называют магическим квадратом [1].

Исследование матриц, обладающих данными свойствами, интересовало человечество еще с древних времен [2]. Постепенно сформировалась математическая теория магических квадратов в рамках которой изучаются два основных направления исследований: вычисление количества различных магических квадратов заданного порядка и построение алгоритмов конструирования магических квадратов заданного порядка.

С историей становления и развития математической теории магических квадратов можно познакомиться в труде К. Оллереншоу и Г. Бонди [3], а также в [2]. Широкий набор методов конструирования магических квадратов представлен в книгах М. М. Постникова "Магические квадраты- [1] и Ю. В. Чебракова "Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ- [4].

В данной статье авторы распространяют алгоритм построения магических квадратов, введенный и обоснованный для квадратов нечетных порядков в [5], на случай матриц, порядок которых удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Вспомогательные обозначения и утверждения. Для построения и обоснования алгоритма конструирования магических квадратов потребуется ряд вспомогательных определений и утверждений. Продолжая серию работ авторов будем использовать терминологию введенную в статьях [2], [5].

Совокупность матриц $n \times n$, элементами которых являются числа от 1 до n^2 без повторений будем обозначать $\mathbf{M}(n)$.

Определение 1. Матрицу $B_n = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbf{M}(n)$ такую, что $b_{i,j} = n(i-1)+j$, $i, j = \overline{1, n}$, будем называть базовой.

Определение 2. Множество $\alpha = \{b_{1,j_1},\ b_{2,j_2},\ \ldots,\ b_{n,j_n}\}$ из n элементов базовой матрицы B_n, где $(j_1\, j_2 \ldots j_n)$ является перестановкой $(1\, 2 \ldots n)$, будем называть подходящим набором.

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

Определение 3. Совокупность Ω из n подходящих наборов $\alpha_1 = \{b_{1,j_1^1},\ b_{2,j_2^1},\ \ldots,\ b_{n,j_n^1}\}$, $\alpha_2 = \{b_{1,j_1^2},\ b_{2,j_2^2},\ \ldots,\ b_{n,j_n^2}\}$,..., $\alpha_n = \{b_{1,j_1^n},\ b_{2,j_2^n},\ \ldots,\ b_{n,j_n^n}\}$ называется покрывающей, если не существует элемента $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n, принадлежащего сразу двум различным подходящим наборам данной совокупности.

Определение 4. Две покрывающие совокупности Ω и Π называются совместимыми, если для каждой пары подходящих наборов $\alpha \in \Omega, \beta \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n такой, что $\alpha \cap \beta = b_{i,j}$.

Следующее утверждение обосновано авторами в [2].

Лемма 1. *Матрица $A \in \mathbf{M}(n)$, каждая строка и каждый столбец которой состоит из элементов подходящих наборов базовой матрицы B_n, является полумагическим квадратом.*

Для проведения дальнейших рассуждений потребуется набор сведений из математической теории латинских квадратов [6].

Определение 5. Латинским квадратом порядка n называется квадратная матрица $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$, элементами $t_{i,j}$ которой являются элементы некоторого множества U мощности n, при этом в каждой строке и каждом столбце латинского квадрата T каждый элемент множества U встречается ровно один раз.

Для определенности далее будем полагать, что множество $U = \{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$.

Определение 6. Два латинских квадрата $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ порядка n называются ортогональными латинскими квадратами, если все возможные упорядоченные пары $(l_{i,j}, t_{i,j})$ $i, j = \overline{1,n}$, образованные данными латинскими квадратами, различны.

Лемма 2. *Для каждого натурального $n(\neq 6) \geq 3$ существует пара ортогональных латинских квадратов порядка n.*

Следующий набор утверждений доказан авторами в работе [5].

Рассмотрим произвольный латинский квадрат $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ порядка n. Будем говорить, что совокупность наборов элементов базовой матрицы $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *соответствует* латинскому квадрату L, если каждый набор α_k состоит из таких элементов $b_{i,j} \in B_n$, что $l_{i,j} = k - 1$.

Лемма 3. *Каждый из наборов $\alpha_k, k = \overline{1,n}$ соответствующей латинскому квадрату $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ совокупности $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ является подходящим набором, а сама совокупность Ω является покрывающей совокупностью.*

Лемма 4. *Пусть $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ образуют пару ортогональных латинских квадратов, а $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ являются покрывающими совокупностями, которые соответствуют латинским квадратам L и T соответственно. Тогда Ω и Π являются совместимыми покрывающими совокупностями.*

Определение 7. Трансверсалью τ^T латинского квадрата T называется множество элементов $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2},\ \ldots,\ t_{n,j_n}\}$, где $t_{i,j_i} \in T$, $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$ является перестановкой $(1\ 2\ \ldots\ n)$ и $t_{i,j_i} \neq t_{k,j_k}$, $i, k = \overline{1,n}(i \neq k)$.

Лемма 5. *Пусть $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2},\ \ldots,\ t_{n,j_n}\}$ трансверсаль латинского квадрата $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$, тогда множество $\alpha = \{b_{1,j_1},\ b_{2,j_2},\ \ldots,\ b_{n,j_n}\}$, где $b_{i,j_i} \in B_n$ является подходящим набором базовой матрицы B_n.*

Доказательство. Так как $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2},\ \ldots,\ t_{n,j_n}\}$ является трансверсалью латинского квадрата T, то $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$ является перестановкой $(1\ 2\ \ldots\ n)$, но согласно определению 2 это и означает, что множество $\alpha = \{b_{1,j_1},\ b_{2,j_2},\ \ldots,\ b_{n,j_n}\}$ является подходящим набором базовой матрицы B_n. □

Замечание 1. Введенное понятие трансверсали в совокупности с утверждением леммы 5 наталкивает на мысль о том, что при построении алгоритмов конструирования полумагических квадратов, аналогичных введенным авторами в работах [2], [5] в пункте (iii) должны быть выбраны такие перестановки $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$ и $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_n)$ набора $(1\ 2\ \ldots\ n)$, что на диагоналях конструируемой матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbf{M}(n)$ будут находится элементы базовой матрицы B_n, соответствующие трансверсалям латинских квадратов, порождающих покрывающие совокупности Ω и Π.

Определение 8. Трансверсаль $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2},\ \ldots,\ t_{n,j_n}\}$ латинского квадрата $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ будем называть совпадающей с трансверсалью $\kappa^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2},\ \ldots,\ l_{n,i_n}\}$ латинского квадрата $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$, если перестановки $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$ и $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_n)$ набора $(1\ 2\ \ldots\ n)$ совпадают между собой.

Определение 9. Трансверсали $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2},\ \ldots,\ t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2},\ \ldots,\ t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ называются ортогональными, если соответствующие им перестановки $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$ и $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_n)$ набора $(1\ 2\ \ldots\ n)$ удовлетворяют условию $j_k \neq i_k, k = \overline{1,n}$.

Определение 10. Пусть $n-$ нечетное, тогда трансверсали $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2},\ \ldots,\ t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2},\ \ldots,\ t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ будем называть почти ортогональными, если соответствующие им перестановки $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$ и $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_n)$ набора $(1\ 2\ \ldots\ n)$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) существует p такое, что $i_p = j_p$;

(ii) $j_k \neq i_k, k = \overline{1,n}(k \neq p)$.

Основной результат. В данном пункте строится алгоритм конструирования магических квадратов, являющийся обобщением алгоритма, предложенного авторами в работе [5], на случай матриц различных порядков, допускающих расположение подходящих наборов на главной и побочной диагоналях согласно замечанию из предыдущего пункта.

Будем рассматривать пару совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π базовой матрицы B_n, соответствующих ортогональным латинским квадратам $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$. Пусть существуют две пары совпадающих и ортогональных для четного n (почти ортогональных для нечетного n) трансверсалей $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2},\ \ldots,\ t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2},\ \ldots,\ t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата T и $\kappa_1^L = \{l_{1,j_1}, l_{2,j_2},\ \ldots,\ l_{n,j_n}\}$, $\kappa_2^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2},\ \ldots,\ l_{n,i_n}\}$ латинского квадрата L соответственно, причем трансверсали τ_1^T, τ_2^T, κ_1^L, κ_2^L удовлетворяют следующим условиям:

(i) при четном n для всякого натурального $s \leq n$ существуют натуральные p, p', s' такие, что $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$;

(ii) при нечетном n существуют натуральные $r, r' \leq n$ такие, что $t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$ и $l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$, а кроме того, для всякого натурального $s(\neq r) \leq n$ существуют натуральные $p(\neq r), p'(\neq r'), s'(\neq r')$ такие, что $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$.

В этом случае будем говорить, что совместимые покрывающие совокупности Ω и Π удовлетворяют условию **B**.

Фактически условие **B** означает, что соответствующие совместимым покрывающим совокупностям Ω и Π латинские квадраты L и T содержат совпадающую пару ортогональных (почти ортогональных для нечетного порядка матриц) трансверсалей, которые можно разбить на непересекающиеся подмножества по четыре элемента, так что элементы базовой матрицы, соответствующие данным трансверсалям, можно будет расположить по главной и побочной диагоналям без противоречий. К сожалению, на текущий момент развитие математической теории латинских квадратов не может ответить на вопрос о том для матриц какого порядка существуют пары совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π, удовлетворяющих условию **B**.

Определение 11. Множество, состоящее из натуральных чисел n, для которых существует пара удовлетворяющих условию **B**, совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π базовой матрицы B_n, будем обозначать $\mathbf{MAVV}$.

Пусть $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ образуют пару ортогональных латинских квадратов, а $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^{n}$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^{n}$ являются совместимыми покрывающими совокупностями, которые соответствуют латинским квадратам L и T соответственно, причем Ω и Π удовлетворяют условию **B**. Пусть также существуют две пары совпадающих и ортогональных для четного n (почти оргональных для нечетного n) трансверсалей $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2},\ \ldots,\ t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2},\ \ldots,\ t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата T и $\kappa_1^L = \{l_{1,j_1}, l_{2,j_2},\ \ldots,\ l_{n,j_n}\}$, $\kappa_2^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2},\ \ldots,\ l_{n,i_n}\}$ латинского квадрата L. Пару перестановок $(u_1\ u_2\ \ldots\ u_n)$ и $(v_1\ v_2\ \ldots\ v_n)$ набора $(1\ 2\ \ldots\ n)$ будем называть **B**-*ассоциированной* парой перестановок к Ω и Π, если выполняются следующие условия:

(i) при четном $n = 2k$ для каждого натурального $m \le n$ существуют натуральные p, p', s, s' такие, что $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$;

(ii) при нечетном $n = 2k+1$ существуют натуральные $r, r' \le n$ такие, что $v_{k+1} - 1 = t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$ и $u_{k+1} - 1 = l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$, а кроме того, для всякого натурального $s(\ne r) \le n$ существуют натуральные $p(\ne r), p'(\ne r'), s'(\ne r')$ такие, что $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$.

Заметим, что для каждой пары совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π, удовлетворяющих условию **B**, существует $k!2^{2k}$ (где $k = [\frac{n}{2}]$) различных **B**-ассоциированных упорядоченных пар перестановок.

Сформулируем алгоритм, позволяющий конструировать магические квадраты порядка $n \in \mathbf{MAVV}$.

Алгоритм. *Пусть $n \in \mathbf{MAVV}$, тогда для построения матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbf{M}(n)$, являющейся магическим квадратом порядка n, достаточно выполнить следующую последовательность действий:*

*(i) Построить две совместимые покрывающие совокупности Ω и Π, удовлетворяющие условию **B**.*

(ii) Пронумеровать подходящие наборы каждой из покрывающих совокупностей от 1 до n: $\alpha_i \in \Omega, i = \overline{1,n}$, $\beta_j \in \Pi, j = \overline{1,n}$.

*(iii) Взять пару **B**-*ассоциированных *перестановок $(u_1\ u_2\ \ldots\ u_n)$ и $(v_1\ v_2\ \ldots\ v_n)$ к Ω и Π (для удобства их можно записать напротив строк и столбцов конструируемой матрицы).*

(iv) Заполнить ячейки конструируемой матрицы так, что каждый ее элемент $a_{t,p}$ определяется следующим соотношением: $a_{t,p} = \alpha_{u_t} \cap \beta_{v_p}$.

Доказательство. Покажем возможность выполнения каждого из пунктов алгоритма, а также то, что построенная в результате его выполнения матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ удовлетворяет определению магического квадрата.

1) Так как $n \in \mathbf{MAVV}$, то по определению 11 существует пара совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π, удовлетворяющих условию **B**.

2) Данный пункт алгоритма выполним всегда.

3) Так как $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ удовлетворяют условию **B**, то латинские квадраты $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$, которым соответствуют Ω и Π, являются ортогональной парой латинских квадратов, кроме того, существуют две пары совпадающих и ортогональных для четного n (почти оргональных для нечетного n) трансверсалей $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата T и $\kappa_1^L = \{l_{1,j_1}, l_{2,j_2}, \dots, l_{n,j_n}\}$, $\kappa_2^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2}, \dots, l_{n,i_n}\}$ латинского квадрата L, соответственно, причем трансверсали $\tau_1^T, \tau_2^T, \kappa_1^L, \kappa_2^L$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) при четном n для всякого натурального $s \le n$ существуют натуральные p, p', s' такие, что $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$;

(ii) при нечетном n существуют натуральные $r, r' \le n$ такие, что $t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$ и $l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$, а кроме того, для всякого натурального $s(\ne r) \le n$ существуют натуральные $p(\ne r), p'(\ne r'), s'(\ne r')$ такие, что $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$.

Рассмотрим пару перестановок $(u_1\, u_2 \dots u_n)$ и $(v_1\, v_2 \dots v_n)$ набора $(1\, 2 \dots n)$, определенных следующим образом:

(i) при четном $n = 2k$: $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$;

(ii) при нечетном $n = 2k+1$: $v_{k+1} - 1 = t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$ и $u_{k+1} - 1 = l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$, а кроме того $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$.

Таким образом, введенные выше перестановки являются **B**-ассоциированными перестановками к Ω и Π.

4) Так как совокупности Ω и Π являются совместимыми покрывающими, то, согласно определению 4, для любых подходящих наборов $\alpha_{u_t} \in \Omega$, $\beta_{v_p} \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{u,v} = \alpha_{u_t} \cap \beta_{v_p}$. Присвоим его значение элементу $a_{t,p}$ искомой матрицы A. Выполнив данную процедуру для каждой пары подходящих наборов совокупностей Ω и Π, получим n^2 различных элементов базовой матрицы B_n, полностью заполняющих матрицу A. Таким образом, $A \in \mathbf{M}(n)$.

Рассмотрим произвольную строку t полученной выше матрицы A. Все элементы данной строки находятся из соотношений $\alpha_{u_t} \cap \beta_{v_p}$. Отсюда следует, что каждый элемент строки t матрицы A принадлежит подходящему набору α_{u_t}, при этом все они различны и всего их n. Значит, элементы строки t матрицы A образуют подходящий набор α_{u_t}. Отсюда следует, что строки матрицы A состоят из элементов подходящих наборов совокупности Ω. Аналогично получаем, что столбцы матрицы A состоят из элементов подходящих наборов совокупности Π. Тогда из леммы 1 непосредственно следует, что построенная выше матрица A является полумагическим квадратом.

Рассмотрим диагонали построенной матрицы A, а именно элементы $a_{m,m}$. Согласно пункту *(iv)* условий построения получаем, что $a_{m,m} = \alpha_{u_m} \cap \beta_{v_m}$, тогда $a_{m,m} = b_{u,v}$

такому, что $l_{u,v} = u_m - 1, t_{u,v} = v_m - 1$. Но так как $(u_1\ u_2 \dots u_n)$ и $(v_1\ v_2 \dots v_n)$ являются **B**-ассоциированной парой перестановок к Ω и Π, то если $n-$ четно получаем, что $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}}$ — элемент трансверсали τ_2^T, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}}$ — элемент трансверсали κ_2^T, т. е. искомый элемент базовой матрицы $b_{i,j} = b_{p',i_{p'}}$. Таким образом, согласно лемме 5 элементы, находящиеся на главной диагонали матрицы A, образуют подходящий набор, а значит их сумма равна $\Sigma(n)$. Аналогичный результат получаем при нечетном n.

Произведя подобные рассуждения получаем, что элементы, находящиеся на побочной диагонали матрицы A, соответствуют по расположению в базовой матрице трансверсалям τ_1^T и κ_1^T, а значит также образуют подходящий набор с общей суммой $\Sigma(n)$.

Таким образом показали, что матрица A, построенная согласно введенному выше алгоритму, является магическим квадратом. □

Замечание 2. Одним из наиболее важных вопросов в плане применимости построенного выше алгоритма является изучение множества порядков $\mathbf{MAVV}$. На данный момент можно однозначно сказать, что согласно лемме 2 $n \neq 6$ и не меньше 3, так как для данных порядков отсутствуют пары ортогональных латинских квадратов. Что же касается определения порядков, при которых существуют такие пары ортогональных (или почти ортогональных для нечетных n) трансверсалей таких, что выполняется условие **B**, то окончательного ответа на данный вопрос математическая теория латинских квадратов на данный момент не имеет, хотя очевидно, что, например, порядки, для которых существуют диагональные латинские квадраты(см., например, [6]) имеют пары ортогональных (или почти ортогональных, в зависимости от четности порядка n) совпадающих трансверсалей.

Замечание 3. Говоря о количестве конструируемых магических квадратов при помощи построенного выше алгоритма следует отметить следующее:

(i) Каждый магический квадрат, построенный при помощи данного алгоритма, не может быть построен при помощи двух различных пар совместимых покрывающих совокупностей. Таким образом, каждая пара совместимых покрывающих совокупностей порождает уникальный набор магических квадратов.

(ii) Не все пары совместимых покрывающих совокупностей удовлетворяют условию **B**, так как не всегда существуют подходящие пары трансверсалей. С другой стороны, для некоторых пар совместимых покрывающих совокупностей существует несколько комбинаций подходящих трансверсалей, каждая из которых порождает уникальный набор магических квадратов.

(iii) Каждой паре совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π, удовлетворяющих условию **B**, для каждой конкретной пары подходящих трансверсалей построенный алгоритм дает $k!2^{2k-2}$ (где $k = [\frac{n}{2}]$)различных магических квадратов (учитывая произвольность перестановок из третьего пункта алгоритма, а также повороты и отражения).

Пример применения алгоритма к построению магического квадрата. В данном параграфе продемонстрируем в действии разработанный в статье алгоритм конструирования магических квадратов порядка $n \in \mathbf{MAVV}$.

Будем рассматривать матрицы порядка 8. Для начала необходимо выбрать пару совместимых покрывающих совокупностей, удовлетворяющих условию **B**. Для этой цели рассмотрим пару диагональных ортогональных латинских квадрата L_8 и T_8 порядка 8.

На рисунке 1 приведена базовая матрица B_8, а на рисунке 2 — пара диагональных ортогональных латинских квадрата L_8 и T_8.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Рис. 1. базовая матрица B_8

0	1	2	3	4	5	6	7
2	3	0	1	6	7	4	5
4	5	6	7	0	1	2	3
6	7	4	5	2	3	0	1
5	4	7	6	1	0	3	2
7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	3	2	5	4	7	6
3	2	1	0	7	6	5	4

0	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	0	7	6	5	4
6	7	4	5	2	3	0	1
5	4	7	6	1	0	3	2
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
7	6	5	4	3	2	1	0
4	5	6	7	0	1	2	3

Рис. 2. Пара диагональных ортогональных латинских квадратов L_8 и T_8

По приведенным латинским квадратам построим подходящие наборы покрывающих совокупностей Ω_8 и Π_8:

Ω_8: $\alpha_1 = \{1,\ 11,\ 21,\ 31,\ 38,\ 48, 50, 60\}$, $\alpha_2 = \{2, 12, 22, 32, 37, 47, 49, 59\}$, $\alpha_3 = \{3, 9, 23, 29, 40, 46, 52, 58\}$, $\alpha_4 = \{4, 10, 24, 30, 39, 45, 51, 57\}$, $\alpha_5 = \{5, 15, 17, 27, 34, 44, 54, 64\}$, $\alpha_6 = \{6,\ 16,\ 18,\ 28,\ 33,\ 43,\ 53,\ 63\}$, $\alpha_7 = \{7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 36,\ 42,\ 56,\ 62\}$ и $\alpha_8 = \{8,\ 14,\ 20,\ 26,\ 35,\ 41,\ 55,\ 61\}$.

Π_8: $\beta_1 = \{1,\ 12,\ 23,\ 30,\ 34,\ 43, 56, 61\}$, $\beta_2 = \{2, 11, 24, 29, 33, 44, 55, 62\}$, $\beta_3 = \{3, 10, 21, 32, 36, 41, 54, 63\}$, $\beta_4 = \{4, 9, 22, 31, 35, 42, 53, 64\}$, $\beta_5 = \{5, 16, 19, 26, 38, 47, 52, 57\}$, $\beta_6 = \{6,\ 15,\ 20,\ 25,\ 37,\ 48,\ 51,\ 58\}$ и $\beta_7 = \{7,\ 14,\ 17,\ 28,\ 40,\ 45,\ 50,\ 59\}$, $\beta_8 = \{8,\ 13,\ 18,\ 27,\ 39,\ 46,\ 49,\ 60\}$.

Рассмотрим пару трансверсалей латинского квадрата T, находящихся на диагоналях данной матрицы: $\tau_1^T = \{0,\ 3,\ 6,\ 5,\ 1,\ 2,\ 7,\ 4\}$ (главная диагональ), $\tau_2^T = \{7,\ 4,\ 1,\ 2,\ 6,\ 5,\ 0,\ 3\}$ (побочная диагональ). Так как τ_1^T, τ_2^T не пересекаются, то данные трансверсали являются ортогональными. Нетрудно заметить, что элементы, расположенные на главной и побочной диагонали латинского квадрата L, также образуют трансверсали κ_1^L, κ_2^L, значит найдены две пары совпадающих трансверсалей. Заметим теперь, что элементы данных трансверсалей можно разбить на непересекающиеся четверки. Таким образом, совместимые покрывающие совокупности Ω_8 и Π_8 удовлетворяют условию **B**, а значит $8 \in \mathbf{MAVV}$.

	2	1	3	4	7	8	6	5
6	37	48	58	51	25	20	6	15
1	12	1	23	30	56	61	43	34
8	49	60	46	39	13	8	18	27
3	32	21	3	10	36	41	63	54
5	47	38	52	57	19	26	16	5
2	2	11	29	24	62	55	33	44
7	59	50	40	45	7	14	28	17
4	22	31	9	4	42	35	53	64

Рис. 3. Магический квадрат

Для построения **B**-*ассоциированных* перестановок $(u_1\, u_2 \ldots u_8)$ и $(v_1\, v_2 \ldots v_8)$ отметим следующие четверки связанных латинскими квадратами L_8 и T_8 элементов главной и побочной диагоналей базовой матрицы:

$\{1, 28, 43, 50\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_1, \alpha_6, \beta_1, \beta_7$;
$\{15, 22, 37, 64\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_2, \alpha_5, \beta_4, \beta_6$;
$\{8, 29, 41, 46\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_3, \alpha_8, \beta_2, \beta_8$;

$\{10, 25, 36, 57\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_4, \alpha_7, \beta_3, \beta_5$.

Учитывая полученные сведения составим пару **B**-*ассоциированных* перестановок $(u_1\ u_2\ ...\ u_8) = (2\ 1\ 3\ 4\ 7\ 8\ 6\ 5)$ и $(v_1\ v_2\ ...\ v_8) = (6\ 1\ 8\ 3\ 5\ 2\ 7\ 4)$.

Магический квадрат, полученный в результате действий построенного нами алгоритма, представлен на рисунке 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников М. М. Магические квадраты/ М. М. Постников. – Москва: издательство "Наука математическая библиотечка, 1964 – 84 с.
2. Иванов А. Ю. О построении магических квадратов / А. Ю. Иванов, А. -В. В. Мельник // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020 – № 2. – С. 61–67.
3. Ollerenshaw K. Magic Squares of Order Four/ K. Ollerenshaw, H. Bondi// Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Mathematical and Physical Sciences. Royal Society – 1982 – V. 306 № 1495 – pp. 443–532
4. Чебраков Ю. В. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ/ Ю. В. Чебраков// СПб: СПбГТУ, 1995 – 388 с.
5. Иванов А. Ю. Особенности построения магических квадратов при помощи латинских квадратов / А. Ю. Иванов, А. -В. В. Мельник // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022 – № 2. – С. 52–63.
6. Keedwell A. D. Latin squares and their applications / A. D. Keedwell, J. Dénes// Elsevier, Second edition – 2015 – 424 p.

Поступила в редакцию 28.08.2023 г.

A NEW METHOD OF CONSTRUCTING MAGIC SQUARES USING ORTHOGONAL TRANSVERSALS

A. Yu. Ivanov, A.-V. V. Melnik

The article applies the author's method of constructing magic squares of odd order to the case of matrices whose order satisfies some additional conditions.

Keywords: Magic square, semi-magic square, latin square, permutation, transversal.

Иванов Александр Юрьевич
кандидат физико-математических наук
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
o.ivanov@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Ivanov Alexandr Jurievich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Donetsk State University, Donetsk, Russia

Мельник Анна-Валентина Валентиновна
кандидат технических наук
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
Anna-Valentina@yandex.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра прикладной механики и компьютерных технологий

Melnik Anna-Valentina Valentinovna
Candidate of Technical Sciences, Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 517.983.36

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ШКАЛЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

© 2023. ***Д. В. Лиманский***

Получен критерий ε-слабой коэрцитивности в шкале анизотропных пространств Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, для системы минимальных дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ с l-квазиоднородными главными частями, коэффициенты которых постоянны, $P^l_j(x,D) = P^l_j(D)$.

***Ключевые слова*:** априорная оценка, дифференциальный оператор, ε-слабая коэрцитивность, пространство Соболева, формула Лейбница.

§ 1. Введение.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $l := (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$, $p \in [1,\infty]$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x,D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1,\dots,N\}, \tag{1}$$

с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Здесь и в дальнейшем используются обозначения: $x := (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$, $\xi := (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$; $D := (D_1,\dots,D_n)$, $D_j := -i(\partial/\partial x^j)$, $j \in \{1,\dots,N\}$; $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$, $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$.

Пусть также

$$P^l_j(x,D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha \qquad \text{и} \qquad P^l_j(x,\xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\,\xi^\alpha$$

— соответственно главная часть и главный символ оператора $P_j(x,D)$, $j \in \{1,\dots,N\}$.

Напомним следующие определения.

Определение 1. [1–3] Система дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) называется **l-квазиэллиптической**, если

$$(P^l_1(x,\xi),\dots,P^l_N(x,\xi)) \neq 0, \qquad (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

В частности, в изотропном случае, т. е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ называется **эллиптической порядка** l.

Определение 2. [1, 3] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) называют **коэрцитивной** в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W^l_p(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2}$$

в которой положительные константы C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

Хорошо известно [1, 2, 4, 5], что критерием коэрцитивности системы операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) в анизотропных пространствах Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$ при $p \in (1,\infty)$ и некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω является ее l-квазиэллиптичность. При $p = 1$ и $p = \infty$ оценка (2) для l-квазиэллиптической системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ утрачивает силу, т. е. l-квазиэллиптическая система (1) является коэрцитивной в $W^l_{1,0}(\Omega)$ и $W^l_{\infty,0}(\Omega)$ в исключительных случаях (см. [3, 6, 7]). Тем не менее для нее справедлива более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3}$$

при $p \in (1,\infty)$ вытекающая из доказанной в [1, 4] (см. также [2]) оценки (2), а при $p = \infty$ доказанная в [7].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [3] определение.

Определение 3. [3] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) называют **слабо коэрцитивной** в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если для нее справедлива априорная оценка (3), в которой положительные константы C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

В случае изотропного пространства Соболева $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, т. е. при $l_1 = \cdots = l_n = l$, неравенство $|\alpha : l| < 1$ в (3) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Для случая $N = 1$ де Лю и Миркил [8] показали, что при $n \geqslant 3$ оператор $P(D) := P_1(D)$ с постоянными коэффициентами эллиптичен в точности тогда, когда он слабо коэрцитивен в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

В «анизотропном» случае в связи с критерием де Лю и Миркила ставится вопрос о возможности охарактеризовать l-квазиэллиптические системы при помощи априорных оценок вида (3) в $W^l_{p,0}(\Omega)$ при всех $p \in [1,\infty]$. В работе автора [9] рассматривался случай одного оператора $P(D_1, D_2)$ с постоянными коэффициентами от двух переменных с l-квазиоднородной главной частью, $l = (l_1, l_2)$, $l_1 > l_2$, для которого был доказан аналог теоремы де Лю и Миркила в случае, когда l_1 не делится на l_2. Далее, в работах [10, 11] результаты де Лю и Миркила были распространены на случай системы операторов $\{P_j(D)\}_1^N$ с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ при некоторых дополнительных ограничениях на компоненты вектора $l = (l_1, \ldots, l_n)$ и операторы $P_j(D)$.

Введем следующее определение.

Определение 4. Систему операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) будем называть ε**-слабо коэрцитивной** в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C_\varepsilon > 0$ такая, что справедлива априорная оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon\|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4}$$

М.М. Маламудом в [7] (см. также [1,3]) показано, что l-квазиэллиптическая система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1), для которой $a_{j\alpha}(\cdot) \in C(\Omega)$ при $|\alpha : l| = 1$ и $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha : l| < 1$, является ε-слабо коэрцитивной в $W^l_{p,0}(\Omega)$ для всех $p \in [1,\infty]$.

В следующей теореме — основном результате данной работы — мы показываем, что при каждом $p \in [1,\infty]$ неравенство (4) характеризует l-квазиэллиптические системы в классе всех ε-слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\Omega)$ систем с постоянными коэффициентами в их главных частях.

Теорема 1. *Пусть* $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, Ω *— область в* $\mathbb{R}^n$ *и* $\{P_j(x, D)\}_1^N$ *— система операторов вида* (1)*, главные части которых имеют постоянные коэффициенты, т. е.* $P^l_j(x, D) = P^l_j(D)$*, и* $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ *при* $|\alpha : l| < 1$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

Тогда система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ l*-квазиэллиптична в точности тогда, когда она* ε*-слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева* $W^l_{p,0}(\Omega)$ *при* $p \in [1, \infty]$.

Отметим, что аналог теоремы 1 для «изотропного» случая (при $l_1 = \dots = l_n = l$) был доказан в [3].

§ 2. Обозначения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^n_+ := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ положим $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Кроме того, пусть $\langle x, y \rangle := \sum_1^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Далее, для чисел $l_k \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через d их наименьшее общее кратное; $m_k := d/l_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$; $m := (m_1, \dots, m_n)$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ положим $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Если для мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ выполнено $\alpha_k \leqslant \beta_k$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$, то будем писать $\alpha \leqslant \beta$ и полагать $\beta - \alpha := (\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$, $C^\alpha_\beta := \dfrac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\,\alpha!} = \prod_{k=1}^n \dbinom{\beta_k}{\alpha_k}$, где $\dbinom{\beta_k}{\alpha_k} := \dfrac{\beta_k!}{(\beta_k - \alpha_k)!\,\alpha_k!}$, $k \in \{1, \dots, n\}$ — классические биномиальные коэффициенты. Пусть также $\xi^t := (t^{m_1}\xi_1, \dots, t^{m_n}\xi_n)$ для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$.

Для дифференциального оператора $P(x, D) = \sum_{|\alpha:l| \leqslant 1} a_\alpha(x) D^\alpha$ обозначим через $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha:l| \leqslant 1} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ его символ, через $P^l(x, \xi) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ — его главный l-квазиоднородный символ, а через $P^{(\alpha)}(x, D)$ — оператор с символом $D^\alpha_\xi P(x, \xi)$.

Через $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ обозначим пространство функций, локально ограниченных п. в. в области Ω. Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных в Ω бесконечно дифференцируемых функций в норме $\|f\|_{W^l_p(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l| \leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ пространства Соболева $W^l_p(\Omega)$ обозначается через $W^l_{p,0}(\Omega)$.

§ 3. Формула Лейбница. Докажем, что для произвольного дифференциального полинома $P(D)$ справедливо следующее обобщение формулы дифференцирования произведения двух функций:

$$P(D)[uv] = \sum_\alpha P^{(\alpha)}(D)u \cdot \frac{D^\alpha v}{\alpha!}, \qquad u, v \in C^\infty(\Omega). \tag{5}$$

Формула (5), так же, как и ее аналог для случая функций одной переменной, называется **формулой Лейбница** (см. [5]).

Так как оператор $P(D)$ — линейная комбинация дифференциальных мономов, то достаточно доказать формулу (5) для случая $P(D) = D^\beta$. Замечая, что при $\alpha \leqslant \beta$

$$D^\alpha \xi^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}\,\xi^{\beta-\alpha} = \alpha!\,C^\alpha_\beta\,\xi^{\beta-\alpha},$$

получим, что при $P(\xi) = \xi^\beta$ формула (5) примет вид:

$$D^\beta[uv] = \sum_{\alpha\leqslant\beta} C_\beta^\alpha\, D^{\beta-\alpha}u \cdot D^\alpha v = \sum_{\alpha+\alpha'=\beta} C_\beta^\alpha\, D^{\alpha'}u \cdot D^\alpha v. \tag{6}$$

Докажем формулу (6) индукцией по порядку $|\beta|$. При $|\beta| = 1$ она принимает привычный вид $D_k[uv] = uD_kv + vD_ku$ при некотором $k \in \{1,\ldots,n\}$. Пусть она справедлива для всех мультииндексов β и γ порядков, меньших некоторого числа. Тогда для мультииндекса $\beta + \gamma$ требуется показать, что

$$D^{\beta+\gamma}[uv] = \sum_{\varkappa+\varkappa'=\beta+\gamma} C_{\beta+\gamma}^\varkappa\, D^{\varkappa'}u \cdot D^\varkappa v. \tag{7}$$

Согласно предположению индукции и формуле (6), имеем:

$$D^{\beta+\gamma}[uv] = \sum_{\alpha+\alpha'=\beta} C_\beta^\alpha D^\gamma \left[D^{\alpha'}u \cdot D^\alpha v\right] = \sum_{\alpha+\alpha'=\beta}\ \sum_{\delta+\delta'=\gamma} C_\beta^\alpha C_\gamma^\delta\, D^{\alpha'+\delta'}u \cdot D^{\alpha+\delta}v. \tag{8}$$

Сравнивая формулы (7) и (8), приходим к выводу, что они совпадут, если выполнено тождество

$$\sum_{\alpha+\delta=\varkappa} C_\beta^\alpha C_\gamma^\delta = C_{\beta+\gamma}^\varkappa. \tag{9}$$

Но тождество (9) вытекает из соответствующего хорошо известного скалярного тождества (для классических биномиальных коэффициентов), см. [12]. В самом деле,

$$\sum_{\alpha+\delta=\varkappa} C_\beta^\alpha C_\gamma^\delta = \sum_{\substack{\alpha_k+\delta_k=\varkappa_k \\ k\in\{1,\ldots,n\}}} \prod_{k=1}^n \binom{\beta_k}{\alpha_k}\binom{\gamma_k}{\delta_k} = \prod_{k=1}^n \sum_{\substack{\alpha_k+\delta_k=\varkappa_k \\ k\in\{1,\ldots,n\}}} \binom{\beta_k}{\alpha_k}\binom{\gamma_k}{\delta_k} = \prod_{k=1}^n \binom{\beta_k+\gamma_k}{\varkappa_k} = C_{\beta+\gamma}^\varkappa,$$

что завершает доказательство формулы (6) и, значит, формулы Лейбница (5).

§ 4. Доказательство основной теоремы 1.

Ввиду изложенного в § 1, требуется доказать только достаточность. Пусть выполнена оценка (4). Так как

$$P_j(x,D) = P_j^l(D) + \sum_{|\alpha:l|<1} a_{j\alpha}(x)D^\alpha, \qquad j \in \{1,\ldots,N\},$$

из неравенства треугольника получим, что

$$\varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j^l(D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p \geqslant \varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_p - \varepsilon' \sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha:l|<1} \|a_{j\alpha}(x)D^\alpha f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p, \tag{10}$$

где $\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \in (0;1)$. Кроме того, в силу неравенства (4),

$$\sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha:l|<1} \|a_{j\alpha}(x)D^\alpha f\|_p \leqslant \varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) с учетом (4) имеем:

$$\varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j^l(D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p \geqslant \varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_p - \varepsilon' \left[\varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p\right]$$
$$+C_{\varepsilon'}\|f\|_p = (1-\varepsilon') \left[\varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p\right] \geqslant (1-\varepsilon') \sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_p. \qquad (12)$$

Разделив обе части неравенства (12) на $1-\varepsilon' > 0$, приходим к оценке

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_p \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \|P_j^l(D)f\|_p + C_\varepsilon \|f\|_p\,, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (13)$$

в которой $\dfrac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'} = \varepsilon$ и $C_\varepsilon := \dfrac{C_{\varepsilon'}}{1-\varepsilon'}$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\varphi \not\equiv 0$ п. в. Положим в (13) $f(x) := \varphi(x)e^{i\langle\xi^t,x\rangle}$, $x \in \Omega$. Так как для l-квазиоднородного оператора $P(D)$ по формуле Лейбница (5):

$$P(D)f = \sum_\alpha P^{(\alpha)}(D)\, e^{i\langle\xi^t,x\rangle} \cdot \frac{D^\alpha\varphi}{\alpha!} = e^{i\langle\xi^t,x\rangle}\left[t^d P(\xi)\,\varphi + \sum_{|\alpha|>0} t^{d-\langle\alpha,m\rangle} P^{(\alpha)}(\xi) \cdot \frac{D^\alpha\varphi}{\alpha!}\right],$$

то из оценки (13) вытекает неравенство

$$\sum_{\langle\alpha,m\rangle<d} \|D^\alpha f\|_p \leqslant \varepsilon\, t^d \left[\|\varphi\|_p \sum_{j=1}^{N} |P_j^l(\xi)| + \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\alpha|>0} \frac{|(D^\alpha P_j^l)(\xi)|}{t^{\langle\alpha,m\rangle}} \cdot \frac{\|D^\alpha\varphi\|_p}{\alpha!}\right] + C_\varepsilon\|\varphi\|_p. \qquad (14)$$

Предположим противное, т. е. что система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ не l-квазиэллиптична. Тогда $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, при некотором $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Выберем мультииндекс α с наименьшим значением $s := \langle\alpha,m\rangle$, $0 < s < d$ таким, что $(D^\alpha P_{j_0}^l)(\xi^0) \neq 0$ при некотором $j_0 \in \{1,\ldots,N\}$. Покажем, что это можно сделать. В самом деле, в противном случае, записывая разложение каждого из l-главных символов $P_j^l(\xi)$ по формуле Тейлора в точке $\xi = \xi^0$, имеем

$$P_j^l(\xi) = \sum_\alpha \frac{(D^\alpha P_j^l)(\xi^0)}{\alpha!}(\xi-\xi^0)^\alpha = \sum_{\langle\alpha,m\rangle=d} a_{j\alpha}(\xi-\xi^0)^\alpha \equiv P_j^l(\xi-\xi^0), \qquad j \in \{1,\ldots,N\}. \qquad (15)$$

Пусть, например, $\xi_1^0 \neq 0$. Тогда из тождеств (15) вытекает, что символы $P_j^l(\xi)$, $j \in \{1,\ldots,N\}$ не зависят от переменной ξ_1, что, очевидно, противоречит оценке (13).

Тогда, полагая $\xi = \xi^0$ и рассматривая в левой части (14) норму функции $(D^\alpha P_{j_0}^l)(D)f$, получим, что

$$t^{d-s}|(D^\alpha P_{j_0}^l)(\xi^0)| \cdot \|\varphi\|_p + o(t^{d-s}) \leqslant \varepsilon C t^{d-s} + o(t^{d-s}), \qquad t \to +\infty. \qquad (16)$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, деля обе части (16) на t^{d-s} и переходя к пределу при $t \to \infty$, придем к противоречию. Значит, система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ l-квазиэллиптична.

Теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 480 с.
2. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. - 2008. - Т. 199, № 11. - С. 75-112.
4. Бесов О. В. О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева / О. В. Бесов // Матем. сборник. - 1967. - Т. 73 (115), № 4. - С. 585-599.
5. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
6. Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm / D. Ornstein // Arch. Rational Mech. Anal. - 1962. - V. 11, № 1. - P. 40-49.
7. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ / М.М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т.56. – С. 206–261.
8. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. - 1964. - V. 8, № 1. - P. 112-124.
9. Лиманский Д. В. О минимальных дифференциальных полиномах от двух переменных, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. - 2016. - Т. 30. - С. 109-119.
10. Лиманский Д. В. Критерий слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. - 2019. - № 2. - С. 68-76.
11. Лиманский Д. В. Априорные оценки для слабо коэрцитивной системы минимальных дифференциальных полиномов в анизотропном пространстве Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. - 2019. - Т. 33. - С. 61-70.
12. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

Поступила в редакцию 15.08.2023 г.

ON A PRIORI ESTIMATES FOR A SYSTEM OF MINIMAL DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE SCALE OF ANISOTROPIC SOBOLEV SPACES

D. V. Limanskii

We obtain a criterion of ε-weak coercivity in the scale of anisotropic Sobolev spaces $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, for a system of minimal differential operators $\{P_j(x,D)\}_1^N$ with l-homogeneous principal parts having constant coefficients, $P^l_j(x,D) = P^l_j(D)$.

Keywords: a priori estimate, differential operator, ε-weak coercivity, Sobolev space, Leibniz formula.

Лиманский Дмитрий Владимирович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
d.limanskiy@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Limanskii Dmitrii Vladimirovich
PhD (Ph.D), Assoc. Prof.
Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 517.988.28

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

© 2023. *П. А. Машаров, И. С. Власенко*

В явном виде найдено значение наименьшего радиуса круга, в котором данное множество является множеством Помпейю. В качестве множества рассмотрен равобедренный треугольник с углом $\pi/6$.

***Ключевые слова*:** множество Помпейю, экстремальный вариант проблемы Помпейю, локальный вариант проблемы Помпейю, равнобедренный треугольник.

Введение

В работе рассматриваются вещественное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, группа $\mathbf{M}(n)$ движений $\mathbb{R}^n$. Для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ часть этой группы $\mathrm{Mot}(K, D) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda K \subset D\}$, шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R $\mathbb{B}^n_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$.

Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda K} f(x)\, dx = 0 \tag{1}$$

при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств K. Данная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получены в прошлом веке (см. обзор литературы в [1]).

Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [2], описывающую довольно широкий набор множеств Помпейю.

Пусть K — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\overline{K} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница K является вещественно–аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Из этого результата следует, что многие множества K с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Примерами множеств $K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ с вещественно-аналитической границей для любого $n \geqslant 2$ являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [3].

Есть также примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева. Одним из таких множеств является «снежинка Кох» [4].

Интересное обобщение проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю. Одному из таких вариантов посвящена данная работа.

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

Постановка задачи

Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}^n_R$, и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}^n_R)$. Если из этого следует, что $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{B}^n_R$, будем говорить, что K является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}^n_R$ и обозначать $K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)$. Если $K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (относительно размеров множества K) выполняется $K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)$ [5–7].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(K) = \inf\big\{R > 0\colon K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)\big\},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю для множества K.

В [7] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $K \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(K)$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(K)$, получены К. А. Беренстейном и Р. Гэем [5, 6], а также В. В. Волчковым [7, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [7–15].

В данной работе проблема 1 решена для равнобедренного треугольника $T = \triangle ABC$ в $\mathbb{R}^2$ боковыми сторонами $AB = AC = 1$ и углом между ними $\angle BAC = \pi/6$. Всюду далее $\alpha_0 = \pi/12$. Таким образом (см. рис. 1),

$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leqslant x \leqslant \cos\alpha_0, -x\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 \leqslant y \leqslant x\,\mathrm{tg}\,\alpha_0\big\}.$$

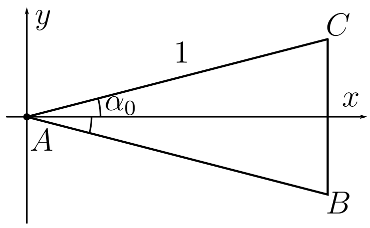

Рис. 1. Треугольник T

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}(T) = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Вспомогательные обозначения и утверждения

Далее будем рассматривать пространство размерности $n = 2$, круг в нем будем обозначать $\mathbb{B}_R = \mathbb{B}^2_R$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим $\mathbb{B}(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^2\colon r < |x| < R\}$ — кольцо при $r \geqslant 0$, или круг $\mathbb{B}_R$, если $r < 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества $D \subset \mathbb{R}^2$ под $C^k(D)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в D, $C(D)$ — класс непрерывных на D функций, $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D)$.

Под $\mathfrak{P}(K, D)$ будем понимать класс локально суммируемых в D функций, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{K}, D)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(K, D) = \mathfrak{P}(K, D) \cap C^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(K, D) = \mathfrak{P}(K, D) \cap C^\infty(D)$; $\mathfrak{P}^\infty_0(K, \mathbb{B}^n_R)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(K, \mathbb{B}^n_R)$, то есть таких, что для всех $x, y \in \mathbb{B}^n_R$, для которых $|x| = |y|$ выполняется $f(x) = f(y)$.

Для обозначения частных производных функции $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ по переменным x и y будем использовать выражения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Для множества T найдем значение величины $r^*(K) = \inf\{r > 0\colon \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}_r) \neq \varnothing\}$. Заметим, что указанная величина играет важную роль в локальном варианте проблемы Помпейю, поскольку для широкого класса множеств, включающего треугольники, имеет место оценка $\mathcal{R}(K) \leqslant 2r^*(K)$ [7].

На рис. 2 изображен замкнутый круг минимального радиуса, содержащий $\triangle ABC$. Радиус этого круга $r^*(T)$ является радиусом описанной около треугольника окружности. Пусть O — центр окружности. В равнобедренном $\triangle AOC$ проведем высоту OJ, являющуюся медианой. Тогда из прямоугольного $\triangle AOJ$ найдем $r^*(T) = AO = AJ/\cos\angle OAJ = (1/2)/\cos\alpha_0 = 1/(2\cos\alpha_0)$.

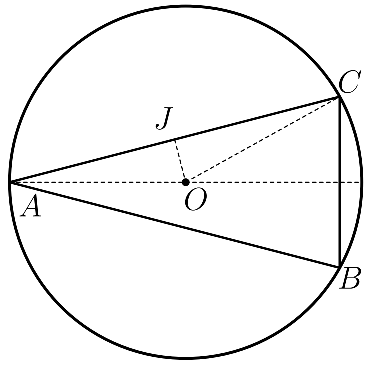

Рис. 2. Минимальный круг, содержащий T

Методами, которые далее будут использованы для доказательства основного результата, несложно установить, что $T \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)$ для $R > 1$. Поэтому далее имеет смысл рассматривать T в круге $\mathbb{B}_R$ радиуса $R < 1$.

Заметим, что если радиус круга $\mathbb{B}_R$ мал настолько, что существует $r > 0$, что для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$ имеет место включение $\mathbb{B}_r \subset \lambda T$, то несложно построить пример ненулевой функции из класса $\mathfrak{V}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$.

Наибольшим из таких радиусов будет тот минимальный, при котором два треугольника $\lambda_1 T, \lambda_2 T \subset \mathbb{B}_R$ и не имеют общих внутренних точек (см. рис. 3). Если O — центр такого круга, J — середина AC, то его радиус $R = AO = AJ/\cos\angle OAJ = 1/(2\cos 2\alpha_0) = \sqrt{3}/3$. Поэтому нижнюю границу диапазона рассматриваемых значений R можно установить равной $\sqrt{3}/3$. Таким образом, в дальнейших геометрических конструкциях будем рассматривать

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < R < 1. \tag{2}$$

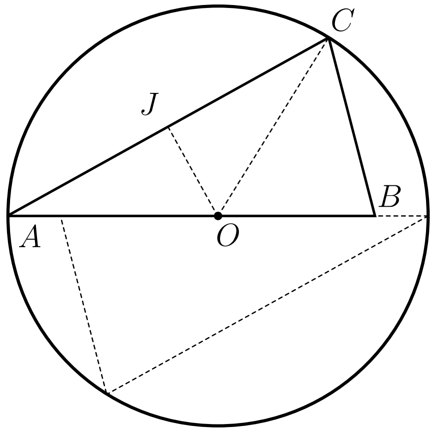

Рис. 3. Минимальный круг, половина котрого содержит T

Рассмотрим дифференциальные операторы $\nu_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_4 = \operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_5 = \operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_6 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nu_7 = \nu_1\nu_2\nu_3$, $\nu_8 = \nu_1\nu_3\nu_6$, $\nu_9 = \nu_1\nu_2\nu_4$. Заметим, что вершины треугольника T (см. рис. 1) имеют координаты $A(0,0)$, $B(\cos\alpha_0, -\sin\alpha_0)$, $C(\cos\alpha_0, \sin\alpha_0)$, а для дифференциальных операторов выполняются равенства: $df(t, -t\operatorname{tg}\alpha_0) = (\frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial f}{\partial y})\,dt = \nu_1 f\,dt$, $df(\cos\alpha_0, t) = \frac{\partial f}{\partial y}\,dt = \nu_2 f\,dt$, $df(t, t\operatorname{tg}\alpha_0) = (\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial f}{\partial y})\,dt = \nu_3 f\,dt$.

Лемма 1. *Пусть $f \in C^3(T)$. Тогда имеют место равенства*

$$\int_T \nu_8 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} \Delta f(\cos\alpha_0, t)\,dt + 2\operatorname{tg}\alpha_0\nu_6 f(A) - \nu_5 f(C) - \nu_4 f(B); \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\int_T \nu_9 f(x,y)\,dx\,dy = 2\operatorname{tg}\alpha_0\nu_6 f(A) - \nu_5 f(C) - \nu_4 f(B) +\\ + 2\operatorname{tg}\alpha_0 \int_0^{\cos\alpha_0} \Delta f(t, t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt.\end{aligned} \tag{4}$$

$$\int_T \nu f(x,y)\,dx\,dy = 2\operatorname{tg}\alpha_0(\nu_2 f)(A) - (\nu_3 f)(B) + (\nu_1 f)(C). \tag{5}$$

Доказательство. Сведем двойной интеграл по T к повторному и расставим пределы интегрирования в обоих порядках:

$$\int_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\cos\alpha_0} dx \int_{-x\operatorname{tg}\alpha_0}^{x\operatorname{tg}\alpha_0} f(x,y)\,dy = \\ = \int_{-\sin\alpha_0}^{0} dy \int_{-y\operatorname{ctg}\alpha_0}^{\cos\alpha_0} f(x,y)\,dx + \int_0^{\sin\alpha_0} dy \int_{y\operatorname{ctg}\alpha_0}^{\cos\alpha_0} f(x,y)\,dx.$$

Применив оператор ν_1 к функции f, получим

$$\int_T \nu_1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} \big(f(\cos\alpha_0,y) - f(|y|\operatorname{ctg}\alpha_0,y)\big)\,dy - \\ - \operatorname{tg}\alpha_0 \int_0^{\cos\alpha_0} \big(f(x,x\operatorname{tg}\alpha_0) - f(x,-\operatorname{tg}\alpha_0)\big)\,dx.$$

Один из интегралов разобьем по свойству аддитивности и выполним в нем замены $t = \mp y\operatorname{ctg}\alpha_0$. Таким образом придем к равенству $-\int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} f(|y|\operatorname{ctg}\alpha_0,y)\,dy = = \operatorname{tg}\alpha_0 \int_{\cos\alpha_0}^{0} f(t,-t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt - \operatorname{tg}\alpha_0 \int_0^{\cos\alpha_0} f(t,t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt$.

В остальных случаях переменную интегрирования заменим на t. Значит

$$\int_T \nu_1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} f(\cos\alpha_0,t)\,dt - 2\operatorname{tg}\alpha_0 \int_0^{\cos\alpha_0} f(t,t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt. \tag{6}$$

Учитывая теперь формулу вычисления интеграла от полного дифференциала, получаем

$$\int_T \nu_1\nu_3 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} \nu_3 f(\cos\alpha_0,t)\,dt - 2\operatorname{tg}\alpha_0 f(C) + 2\operatorname{tg}\alpha_0 f(A). \tag{7}$$

Так как $\int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} \nu_2 f(\cos\alpha_0,t)\,dt = f(C) - f(B)$, то (7) можно переписать в виде

$$\int_T \nu_1\nu_3 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} \nu_6 f(\cos\alpha_0,t)\,dt - \operatorname{tg}\alpha_0 f(C) - \operatorname{tg}\alpha_0 f(B) + 2\operatorname{tg}\alpha_0 f(A).$$

Отсюда

$$\int_T \nu_1\nu_3\nu_6 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} \nu_6^2 f(\cos\alpha_0,t)\,dt - \\ - \operatorname{tg}\alpha_0\Big(\nu_6 f(C) + \nu_6 f(B)\Big) + 2\operatorname{tg}\alpha_0\nu_6 f(A).$$

Прибавляя к этому

$$0 = \int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} \nu_2^2 f(\cos\alpha_0,t)\,dt - \nu_2 f(C) + \nu_2 f(B),$$

получаем

$$\int_T \nu_1\nu_3\nu_6 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\alpha_0}^{\sin\alpha_0} \Delta f(\cos\alpha_0,t)\,dt - \operatorname{tg}\alpha_0\big(\nu_6 f(C) + \nu_6 f(B)\big) + \\ + 2\operatorname{tg}\alpha_0\nu_6 f(A) - \nu_2 f(C) + \nu_2 f(B),$$

что означает (3).

Подставим в (7) $\nu_2 f$ вместо f и поменяем местами дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Получим

$$\int_T \nu_7 f(x,y)\,dx\,dy = \nu_3 f(C) - \nu_3 f(B) - 2\operatorname{tg}\alpha_0 \nu_2 f(C) + 2\operatorname{tg}\alpha_0 \nu_2 f(A),$$

что, с учетом $\nu_3 - 2\operatorname{tg}\alpha_0\nu_2 = \nu_1$, дает (5).

Заменив теперь в (6) f на $\nu_2 f$, получим

$$\int_T \nu_1\nu_2 f(x,y)\,dx\,dy = f(C) - f(B) - 2\operatorname{tg}\alpha_0 \int_0^{\cos\alpha_0} \nu_2 f(t, t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt. \tag{8}$$

Из $\int_0^{\cos\alpha_0} \nu_3 f(t, t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt = f(C) - f(A)$ с учетом определения ν_3 получаем $\operatorname{tg}\alpha_0 \int_0^{\cos\alpha_0} \nu_2 f(t, t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt = f(C) - f(A) - \int_0^{\cos\alpha_0} \nu_6 f(t, t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt$. Значит (8) можно записать в виде

$$\int_T \nu_1\nu_2 f(x,y)\,dx\,dy = 2f(A) - f(C) - f(B) + 2\int_0^{\cos\alpha_0} \nu_6 f(t, t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt. \tag{9}$$

Заменим теперь в (8) f на $\nu_2 f$, в (8) f на $\nu_6 f$ и домножим на $\operatorname{tg}\alpha_0$. После этого вычтем из полученных второго первое равенство. Получим

$$\int_T \nu_1\nu_2\Big(\operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\Big) f(x,y)\,dx\,dy = 2\operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial f}{\partial x}(A) - \Big(\operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)(C) -$$
$$- \Big(\operatorname{tg}\alpha_0\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)(B) + 2\operatorname{tg}\alpha_0 \int_0^{\cos\alpha_0} \Delta f(t, t\operatorname{tg}\alpha_0)\,dt,$$

что означает (4) □

Доказательство следующей леммы можно найти в [1].

Лемма 2. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{d}$ — один из дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, и для некоторого открытого множества D, для которого $\mathrm{Mot}(K,D) \neq \varnothing$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(K,D)$. Тогда $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^\infty(K,D)$.*

Учитывая, что все ν_j $(j = \overline{1,9})$ являются линейными комбинациями операторов дифференцирования по x и y или произведениями других из них, получаем

Следствие 1. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^2$, и для некоторого открытого множества D, для которого $\mathrm{Mot}(K,D) \neq \varnothing$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(K,D)$. Тогда для любого $j = \overline{1,9}$ имеет место $\nu_j f \in \mathfrak{P}^\infty(K,D)$.*

Пусть $\rho(e) = \rho(O,\lambda e) = \inf\{\|\overrightarrow{OX}\|\colon X \in e\}$ — расстояние от центра круга, точки $O(0,0)$, до элемента λe треугольника λT (вершины или стороны) при фиксированном $\lambda \in \mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}_R)$. В зависимости от значения R, удовлетворяющего (2), рассмотрим интересующие нас максимальные и минимальные возможные расстояния до соответствующих элементов по всем $\lambda \in \mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}_R)$:

$$\max(A) = \sup\{\rho(A)\}, \qquad \max(C) = \sup\{\rho(C)\}, \qquad \max(AB) = \sup\{\rho(AB)\},$$
$$\max(BC) = \sup\{\rho(BC)\}, \qquad \min(A) = \inf\{\rho(A)\}, \qquad \min(C) = \inf\{\rho(C)\},$$
$$\min(AB) = \inf\{\rho(AB)\}, \qquad \min(BC) = \inf\{\rho(BC)\}.$$

Заметим, что исходя из соображений симметрии, вместо вершины C можно рассматривать B, а вместо боковой стороны AB — сторону AC.

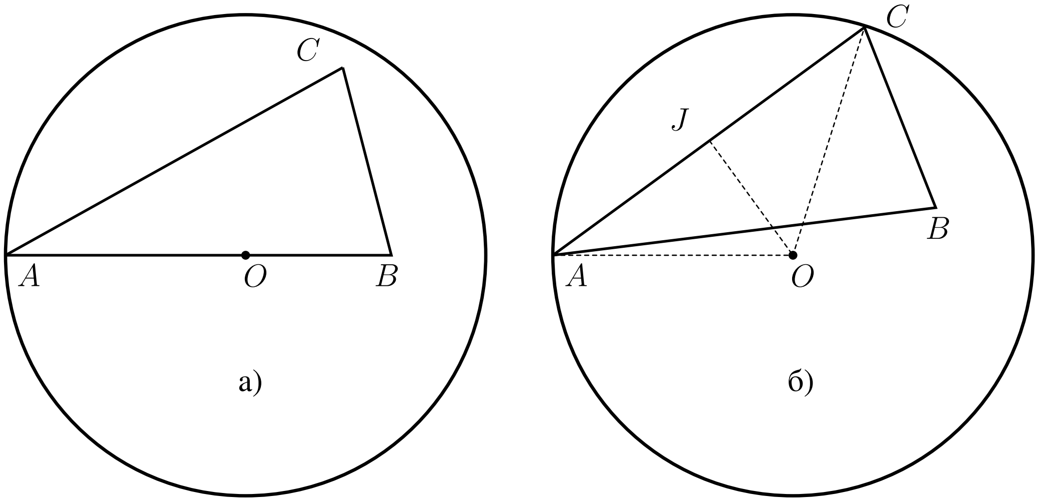

Рис. 4. Расположения λT в $\mathbb{B}_R$

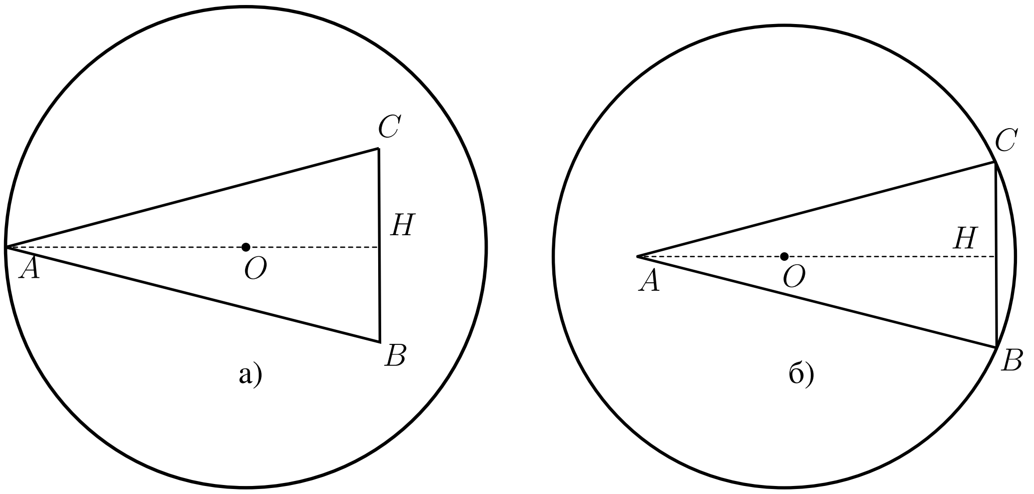

Рис. 5. Расположения λT в $\mathbb{B}_R$

Рассмотрим крайние расположения λT в $\mathbb{B}_R$ при условии (2): на рис. 4, 5, вершины треугольника лежат на границе круга, на рис. а) центр круга $O(0;0)$ лежит на стороне AB или высоте треугольника AH соответственно. Из рис. 4 б) видно, что $\max(A) = \max(C) = R$. Из рис. 4 а) получаем $\min(C) = OB = 1 - OA = 1 - R$ и $\min(AB) = 0$. Из рис. 5 а) находим $\min(BC) = OH = AH - AO = \cos\alpha_0 - R$, если $R < \cos\alpha_0$. Если $R \geqslant \cos\alpha_0$, то можно сдвинуть T так, чтобы центр окружности оказался на стороне BC. Значит $\min(BC) = \begin{cases} \cos\alpha_0 - R, & \text{если } R < \cos\alpha_0; \\ 0, & \text{если } R \geqslant \cos\alpha_0. \end{cases}$

Если OJ — высота равнобедренного $\triangle AOC$ на рис. 4 б), то $\max(AB) = OJ = \sqrt{AO^2 - AJ^2} = \sqrt{R^2 - (1/4)}$.

Из рис. 5 б) находим $\max(BC) = OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{R^2 - \sin^2\alpha_0}$ и $\min(A) = OA = AH - OH = \cos\alpha_0 - \sqrt{R^2 - \sin^2\alpha_0}$.

Собрав вместе результаты геометрических рассуждений, получаем

Лемма 3. *При выполнении* (2) *имеют место равенства*

$$\max(A) = \max(C) = R, \quad \max(AB) = \sqrt{R^2 - (1/4)},$$
$$\max(BC) = \sqrt{R^2 - \sin^2\alpha_0}, \quad \min(A) = \cos\alpha_0 - \sqrt{R^2 - \sin^2\alpha_0},$$
$$\min(C) = 1 - R, \quad \min(AB) = 0, \quad \min(BC) = \max\{\cos\alpha_0 - R; 0\}.$$

Лемма 4 $(\min(C) < \min(A))$**.** *Если R удовлетворяет* (2)*, то*

$$1 - R < \cos\alpha_0 - \sqrt{R^2 - \sin^2\alpha_0}.$$

Доказательство. Выполним эквивалентные преобразования необходимого неравенства: $\sqrt{R^2 - \sin^2\alpha_0} < \cos\alpha_0 + R - 1$. Так как $\cos\alpha_0 \approx 0{,}966$, $\sqrt{3}/3 \approx 0{,}577$, то обе части неотрицательны. Возведем их в квадрат и преобразуем:

$$R^2 - \sin^2\alpha_0 < \cos^2\alpha_0 + R^2 + 1 + 2R\cos\alpha_0 - 2\cos\alpha_0 - 2R;$$

$2 + 2R\cos\alpha_0 - 2\cos\alpha_0 - 2R > 0$. Разложим на множители и получим верное неравенство $(1 - \cos\alpha_0)(1 - R) > 0$, что доказывает лемму. □

Лемма 5 $(\min(C) < \max(BC))$**.** *Если R удовлетворяет* (2)*, то*

$$1 - R < \sqrt{R^2 - \sin^2\alpha_0}.$$

Доказательство. Так как обе части неотрицательны, возведем их в квадрат и преобразуем: $1 - 2R + R^2 < R^2 - \sin^2\alpha_0$; $R > (1 + \sin^2\alpha_0)/2$. Так как

$$\frac{1 + \sin^2\alpha_0}{2} = \frac{1 + \frac{1-(\sqrt{3}/2)}{2}}{2} = \frac{6 - \sqrt{3}}{8} < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

то из (2) следует необходимое неравенство. □

Лемма 6 $(\min(BC) < \max(AB))$**.** *Если R удовлетворяет* (2)*, то решением неравенства*

$$\max\{\cos\alpha_0 - R; 0\} < \sqrt{R^2 - (1/4)}.$$

является $\sqrt{6}/4 < R < 1$.

Доказательство. Если $R > \cos\alpha_0$, то, учитывая $\sqrt{R^2 - (1/4)} > 0$, необходимое неравенство тривиально.

Для $R \leqslant \cos\alpha_0$ возведем обе части в квадрат. Они неотрицательны, поэтому это преобразование является эквивалентным. Получим $\cos^2\alpha_0 - 2R\cos\alpha_0 + R^2 < R^2 - \frac{1}{4}$; $2R\cos\alpha_0 > (1/4) + \cos^2\alpha_0$; $R > \big((1/4) + \cos^2\alpha_0\big)/(2\cos\alpha_0)$. Преобразуем правую часть полученного решения. Так как $\alpha_0 = \pi/12$, то $\cos\alpha_0 = \sqrt{\big(1 + (\sqrt{3}/2)\big)/2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}/2$. Отсюда

$$\frac{(1/4) + \cos^2\alpha_0}{2\cos\alpha_0} = \frac{1 + 4\cos^2\alpha_0}{8\cos\alpha_0} = \frac{1 + 2 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3(1 + 2\sqrt{3} + 3)}}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6(2 + \sqrt{3})}}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

что с учетом (2) означает требуемое утверждение. □

Перед формулировкой необходимого в дальнейшем утверждения, доказательство которого можно найти в [7], введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^{k} \subset \mathbb{R}^n$, где $v_i \neq v_j$ для $1 \leqslant i,j \leqslant k$, $i \neq j$, числа $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_{\nu,\varepsilon} = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\big\}$, $\nu = 1,\dots,k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в $\mathcal{U}$ распределений, $\vec{\partial} = \big(\partial/\partial x_1,\dots,\partial/\partial x_n\big)$.

Утверждение 1. *(Теорема 3.2 из [7]) Пусть $F_\nu \in \mathfrak{H}_0\big(\Omega_{\nu,\varepsilon}\big)$ для $\nu = 1,\dots,k$ и существуют многочлены $P_\nu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$ выполняется $\sum_{\nu=1}^{k}\big(P_\nu(\vec{\partial})F_\nu\big)(x+v_\nu) = 0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta)F_\nu = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$.*

Лемма 7. *Пусть (2), и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T,\mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(1-R,R)$.*

Доказательство. Применяя утверждение 1 к функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T,\mathbb{B}_R) \subset \mathfrak{H}_0\big(\Omega_{\nu,\varepsilon}\big)$ для вершин A,B,C треугольника T, учитывая (5) из леммы 1 (по следствию 1 его левая часть в данном случае обращается в нуль), приходим к существованию нетривиального многочлена $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которого $q(\Delta)f = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$. Последнее множество представляет из себя набор точек из $\mathbb{B}_R$, в которых могут оказаться вершины λC и λA при $\lambda \in \mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}_R)$. Применяя леммы 4 и 3, приходим к утверждению леммы. □

Лемма 8. *Пусть $R > \sqrt{6}/4$, и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T,\mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $\tilde{q} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $\tilde{q}(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.*

Доказательство. Учитывая леммы 5 и 6, для указанных в условии леммы значений R выполняются оба неравенства: $\min(C) < \max(BC)$, $\min(BC) < \max(AB)$.

Рассмотрим многочлен q из леммы 7 и функцию $F = q(\Delta)f$. По следствию 1, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, получаем $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(T,\mathbb{B}_R)$. При этом $F = 0$ в $\mathbb{B}(1-R,R)$. Доопределим F нулём вне $\mathbb{B}_R$.

Заменив в (3) f на F, а T на λT для различных $\lambda \in \mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}_R)$, учитывая равенство нулю интегралов по треугольникам и равенство нулю функции F вне замыкания $\overline{\mathbb{B}}_{1-R}$, получаем, что интегралы от ΔF по сторонам λBC, а значит и по всем прямым, их содержащим, равны нулю. То есть преобразование Радона по всем прямым, расстояние до которых от начала координат больше $\min(BC)$, равно нулю. Отсюда (см., например, лемму 1.8.3 из [7]) следует $\Delta F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(BC),R)$. Аналогичными рассуждениями на основе формулы (4) получаем $\Delta^2 F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(AB),R)$. По лемме 3, $\min(AB) = 0$. Произведение $\tilde{q} = \Delta^2 q(\Delta)$ также является многочленом от Δ. Таким образом, утверждение леммы получено. □

Приведем также два утверждения, доказательства которых полностью аналогичны леммам 7 и 8 из [16].

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{P}_0^\infty(T,\mathbb{B}_R) = \{0\}$ для некоторого $R > \sqrt{6}/4$. Тогда $\mathcal{R}(T) \leqslant R$.*

Лемма 10. *Пусть $R > \sqrt{6}/4$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T,\mathbb{B}_R)$ и для некоторого многочлена $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.*

Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. Если $0 < R \leqslant r^*(T)$, то $\mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}_R) = \varnothing$ и тогда выполнение (1) для $K = T$ при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}_R)$ не накладывает никаких условий на функцию f.

Если $1/(2\cos\alpha_0) < R \leqslant \sqrt{3}/3$, то для

$$r = R\sin\Big(\frac{\pi}{6} - \arccos\frac{1}{2R}\Big)$$

выполняется условие $\mathbb{B}_r \subset \lambda T$ для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$ (на рис. 6 O — центр круга радиуса R, $OJ \perp AC$, $OH \perp AB$; $AJ/OA = 1/(2R) = \cos\angle OAJ$; $r = OH = OA\sin\angle OAH$).

В этом случае для $j \in \{1; 2\}$ рассмотрим функции

$$g_j(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho = 0 \text{ или } \rho \geqslant r; \\ \exp\big(\frac{j}{\rho(\rho - r)}\big), & \text{если } 0 < \rho < r, \end{cases}$$

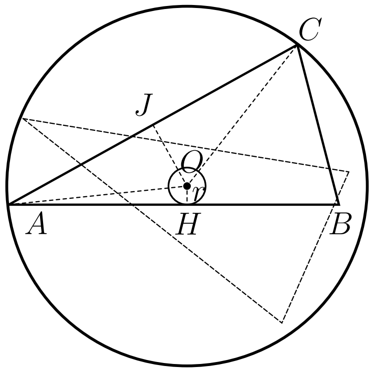

Рис. 6. Круг, содержащийся во всех λT

и величины $C_j = \int_{\mathbb{B}_r} g_j\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)\,dx\,dy$. Так как функции $g_j \in C^\infty(0; +\infty)$ и линейно независимы, то их линейная комбинация $f(\rho) = C_2 g_1(\rho) - C_1 g_2(\rho) \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, и не равна нулю тождественно.

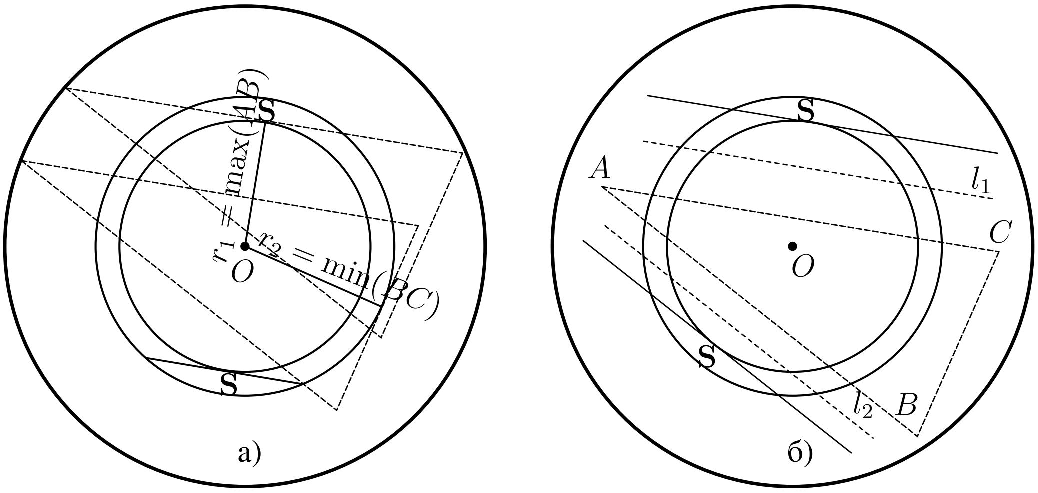

Рис. 7. Расположения λT в $\mathbb{B}_R$

Рассмотрим теперь $\sqrt{3}/3 \geqslant R < \sqrt{6}/4$. Для таких значений R выполняется неравенство $r_1 = \max(AB) < r_2 = \min(BC)$ (см. рис. 7 а)). Для $j \in \{1, 2\}$ рассмотрим функции

$$g_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant d \leqslant r_1 \text{ или } d \geqslant r_2; \\ \exp\big(\frac{j}{(d - r_1)(d - r_2)}\big), & \text{если } r_1 < d < r_2. \end{cases}$$

Тогда существуют такие радиальные функции $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что их преобразования Радона по прямым $\mathbf{R} f_j(\omega, d)$ совпадают с $g_j(d)$ для всех $|\omega| = 1$ и $d \geqslant 0$ (см., например, [7, Глава 1]). Эти функции линейно независимы, поэтому существует такой ненулевой набор чисел $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, что линейная комбинация $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ радиальная, не равна нулю тождественно и обладает следующими свойствами. Она имеет нулевые интегралы по всем прямым, расстояние до начала координат от которых лежит в пределах от 0 до r_1, интеграл равный нулю по любому сегменту $\mathbf{S}$ круга радиуса r_2 с расстоянием до хорды равном r_1 (см. рис. 7), равна нулю во внешности $\mathbb{B}_{r_2}$. Круг $\mathbb{B}_{r_2}$ состоит из двух сегментов $\mathbf{S}$ и пучка отрезков указанных прямых, значит по свойству аддитивности функция f имеет нулевой интеграл по $\mathbb{B}_{r_2}$. Кроме того, функция f вне этого круга равна нулю.

Рассмотрим произвольный $\lambda T \subset \mathbb{B}_R$ (см. рис. 7 б)). Круг $\mathbb{B}_{r_2}$ можно представить в виде объединения множеств, не имеющих общих внутренних точек: двух сегментов **S**, кругового слоя, не содержащего O, из отрезков прямых типа $l_1 \parallel AC$ от AC до **S**, аналогичного слоя из отрезков $l_2 \parallel AB$, части $\lambda T \cap \mathbb{B}_{r_2}$. Исходя из свойств функции f интеграл по пересечению равен нулю. А весь треугольник λT состоит из пересечения и остатка $\lambda T \setminus \mathbb{B}_{r_2}$, находящегося в области нулей f.

Построенная ненулевая функция с нулевыми интегралами по $\lambda T \subset \mathbb{B}_R$ доказывает оценку $\mathcal{R}(T) \geqslant \sqrt{6}/4$.

Если $R > \sqrt{6}/4$, то, используя леммы 8, 10, 9, получаем оценку $\mathcal{R}(T) \leqslant \sqrt{6}/4$, откуда следует утверждение теоремы. □

Выводы

В работе в явном виде получено точное значение величины $\mathcal{R}(T) = \sqrt{6}/4$. Известная ранее оценка давала $\mathcal{R}(T) \leqslant 1/\cos(\pi/12)$. Учитывая приближенные значения $\sqrt{6}/4 \approx 0{,}612$ и $1/\cos(\pi/12) \approx 1{,}035$, видим, что в работе получено существенное уточнение этой величины.

Решение локального варианта проблемы Помпейю применяется в комплексном анализе, теории аппроксимации, теории отображений, сохраняющих меру [7, 16], при нахождении экстремального радиуса Помпейю для совокупности множеств [1, 13], а также при изучении вопроса равенства нулю функции с нулевыми интегралами по множествам положительной коразмерности [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машаров П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022. – № 2. – С. 77–88.
2. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183-190.
3. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 2723-–2736.
4. Volchkov V. V. New results in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 417-432.
5. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
6. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
7. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
8. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185-194.
9. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
10. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
11. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
12. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
13. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.

14. Волчков В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 9–52.
15. Машаров П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 110–120.
16. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.

Поступила в редакцию 10.08.2023 г.

THE EXTREME VERSION OF POMPEIU'S PROBLEM FOR AN ISOSCELES TRIANGLE

P. A. Masharov, I. S. Vlasenko

The value of the smallest circle radius in which the given set is a Pompeiu set is found explicitly. The isosceles triangle with an angle $\pi/6$ is considered.

Keywords: the Pompeii set, the extreme version of the Pompeii problem, the local variant of Pompeyu's problem, the isosceles triangle.

Машаров Павел Анатольевич
кандидат физико-математических наук
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
pavelmasharov@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Masharov Pavlo Anatoliyovych
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Donetsk State University, Donetsk, Russia

Власенко Илона Сергеевна
магистрант ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия

Vlasenko Ilona Sergeevna
Graduate student, Donetsk State University, Donetsk, Russia

ISSN 2415–7058. Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2023. – № 2

УДК 517.988.28

НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТЬ МАТРИЦ ШЕНБЕРГА

© 2023. *Л. Л. Оридорога, А. В. Агибалова*

Для радиально положительно определённой функции класса Φ_n $(n > 2)$ доказана положительность матрицы Шенберга, порождённой вершинами любого правильного симплекса размерности $n+1$. Также для произвольного n приведён пример функции класса Φ_n и конечного набора точек в пространстве размерности $n+1$, для которых матрица Шенберга не является неотрицательной.

***Ключевые слова*:** матрица Шенберга, положительно определённая функция, радиально положительно определённая функция, симплекс.

Введение. Положительно определённые функции имеют долгую историю. Их изучением занимались многие классики, такие как Каратеодори, Херглотц, Бернштейн. Важным классом положительно определённых функций является класс радиально положительно определённых функций, которые и рассматриваются в данной работе. Эти функции являются важной частью различных областей гармонического анализа, имеют важные приложения в теории вероятностей, теории аппроксимации, где они встречаются как характеристические функции преобразований Фурье сферически симметричных вероятностных распределений.

Отметим некоторые недавние публикации (см. [1] и [2] и цитируемую в них литературу), посвящённые радиально положительно определённым функциям и их применению в спектральной теории операторов.

Определение 1. Функция $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется положительно определённой, если она непрерывна в нуле и для каждого набора точек $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ матрица $(F(x_j - x_k))_{j,k=1}^m$ неотрицательна.

Определение 2. Функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ называется радиально положительно определённой класса Φ_n, если она непрерывна в нуле и для каждого набора точек $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ матрица $(f(||x_j - x_k||_n))_{j,k=1}^m$ (называемая матрицей Шенберга, порождённой множеством X и функцией f) неотрицательна. Здесь $||\cdot||_n$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^n$.

Другими словами, функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ радиально положительно определённая класса Φ_n, если $F(x) = f(||x||_n)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, положительно определена.

Известно (см. [4], [5]) следующее описание функций класса Φ_n.

Теорема 1. *Функция $f \in \Phi_n$ в том и только том случае, если она допускает представление*

$$f(t) = \int_0^\infty \Omega_n(st)d\sigma(s), \tag{1}$$

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

где $\sigma(t)$ – неубывающая ограниченная функция, заданная на множестве $[0,+\infty)$, а

$$\Omega_n(z) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(z) =$$
$$= 1 - \frac{z^2}{2n} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot n\cdot(n+2)} - \frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n\cdot(n+2)\cdot(n+4)} \pm \ldots, \quad (2)$$

где $J_q(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка q.

Основные результаты. В частных случаях формулы (2)

$$\Omega_1(z) = \cos z, \quad \Omega_2(z) = J_0(z), \quad \Omega_3(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Очевидно, что $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$. В то же время известно, что обратное включение неверно. В частности, $\Omega_n \notin \Phi_{n+1}$. Для случая $n = 1$ это легко увидеть на следующем примере.

Пример 1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ — вершины правильного треугольника со стороной π. Тогда матрица Шенберга, порождённая множеством X и функцией Ω_1, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа равны $2,\ 2$ и -1. Соответственно эта матрица не является положительно определённой.

Для $n > 2$ подобный пример не подходит. Чтобы доказать это, потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть $m \times m$-матрица A имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \ldots & \beta & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \ldots & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \ldots & \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (3)$$

(т. е. все элементы, стоящие на главной диагонали, равны α, а все остальные равны β). Тогда $m-1$ из её собственных чисел равны $\alpha-\beta$, а m-е собственное число равно $\alpha+(m-1)\beta$.

Доказательство. Представим матрицу A в виде $A_1 + (\alpha-\beta)E$, где все элементы матрицы A_1 равны β, а E – единичная матрица. Матрица A_1 имеет ранг 1, поэтому все её собственные числа, кроме одного, равны нулю. Последнее собственное число равно следу матрицы A_1, т. е. $m\beta$. А все собственные числа матрицы $A = A_1 + (\alpha-\beta)E$ на $(\alpha-\beta)$ больше соответствующих собственных чисел матрицы A_1. □

Следствие 1. *Матрица A вида (3) неотрицательна в том и только том случае, если*

$$-\frac{\alpha}{m-1} \leqslant \beta \leqslant \alpha.$$

Покажем теперь, что при $n > 2$ набор вершин правильного симплекса не подходит для построения примера, аналогичного Примеру 1.

Теорема 2. *Пусть* $n \geqslant 3$, $f \in \Phi_n$ *и* $f \neq const$. *Пусть также* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\}$ *— множество вершин правильного симплекса со стороной* l *в пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Тогда матрица Шенберга*

$$S_X(f) = \big(f(||x_j - x_k||_{n+1})\big)_{j,k=1}^{n+2}$$

положительна.

Доказательство. Пусть $\sigma(\cdot)$ — функция, участвующая в представлении (1) функции f. Тогда $f(0) = \sigma(\infty) - \sigma(0)$, а

$$f(l) = \int_0^\infty \Omega_n(sl)d\sigma(s) \geqslant (\sigma(\infty) - \sigma(0)) \cdot \min_{t>0} \Omega_n(t).$$

Матрица $S_X(f)$ имеет вид (3), где $\alpha = \sigma(\infty) - \sigma(0) > 0$, а $\beta = f(l) > \alpha \cdot \min_{t>0} \Omega_n(t)$. Поскольку при $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $\min_{t>0} \Omega_n(t) > -\frac{1}{n+1}$, то выполнены условия Следствия 1 и, следовательно, матрица $S_X(f)$ положительна. □

Замечание 1. Заметим, что в работе [3, Теорема 3] для $n \geqslant 2$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ получена строгая положительная определённость матрицы Шенберга функции класса Φ_n и дано применение этого результата в спектральной теории оператора Лапласа с точечными взаимодействиями.

Замечание 2. В работе [1, Теорема 5.1] показано, что функция $f \in \Phi_n \backslash \Phi_{n+1}$, $n \geqslant 2$, имеет бесконечное число отрицательных квадратов. Последнее означает, что для произвольного натурального N существует конечная матрица Шенберга $S_X(f) = \big(f(||x_j - x_k||_{n+1})\big)_{j,k=1}^{m}$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, имеющая не менее N отрицательных собственных значений.

Для построения примера набора точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, для которого матрица Шенберга для функции Ω_n не является неотрицательной, потребуется следующая

Лемма 2. *Пусть* $m \times m$*-матрица* B *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \ldots & \beta & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \ldots & \beta & \beta & \gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \ldots & \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \beta & \ldots & \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \ldots & \gamma & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \tag{4}$$

(т.е. все элементы, стоящие на главной диагонали, равны α*; все остальные, кроме стоящих в последней строке и в последнем столбце, равны* β*; а элементы последнего столбца и последней строки, кроме стоящего на их пересечении, равны* γ*).*

Тогда

$$\det B = (\alpha - \beta)^{m-2} \cdot (\alpha^2 + (m-2)\alpha\beta - (m-1)\gamma^2).$$

Доказательство. Вычтя последнюю строку матрицы B, умноженную на $\frac{\gamma}{\alpha}$, из всех её остальных строк, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \ldots & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & 0 \\ \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \ldots & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \ldots & \alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & 0 \\ \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \ldots & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha} & 0 \\ \gamma & \gamma & \ldots & \gamma & \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

Т. к. определитель матрицы при этом не меняется, то

$$\det B = \det B_1 = \alpha\cdot\det B_2,$$

где

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \ldots & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} \\ \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \ldots & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \ldots & \alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} \\ \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \ldots & \beta-\frac{\gamma^2}{\alpha} & \alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Поскольку матрица B_2 имеет размер $(m-1)\times(m-1)$ и вид (3), то $(m-2)$ её собственных числа равны $\left(\alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)-\left(\beta-\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)=(\alpha-\beta)$, а оставшееся собственное число равно $\left(\alpha-\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)+(m-2)\left(\beta-\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)=\alpha+(m-2)\beta-(m-1)\frac{\gamma^2}{\alpha}$. И т. к. определитель матрицы равен произведению её собственных чисел (с учётом кратности), то $\det B=\alpha\cdot(\alpha-\beta)^{m-2}\cdot\left(\alpha+(m-2)\beta-(m-1)\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)=(\alpha-\beta)^{m-2}(\alpha^2+(m-2)\alpha\beta-(m-1)\gamma^2)$. $\square$

Теорема 3. *Пусть функция f вблизи нуля имеет вид*

$$f(t)=1+c_1t^2+c_2t^4+o(t^4), \tag{6}$$

где

$$c_2<\frac{n+1}{2n+6}c_1^2. \tag{7}$$

Пусть в множестве $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n+3}\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ точки $x_1,x_2,\ldots,x_{n+2}$ – вершины правильного симплекса со стороной ε, а точка x_{n+3} – центр этого симплекса. Тогда при достаточно малом ε, матрица Шенберга $S_X(f)$, порождённая функцией f и множеством X, не является неотрицательной. И следовательно, такая функция не принадлежит классу Φ_{n+1}.

Доказательство. Найдём сначала $\xi=||x_{n+3}-x_k||$, $k=1,2,\ldots,n+2$. Для этого заметим, что нормы всех векторов $\overrightarrow{a}_k=x_{n+3}-x_k$ равны. Также равны все углы между ними, а сумма всех этих векторов равна 0. Обозначим через φ угол между двумя различными векторами $\overrightarrow{a}_k$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\left(\overrightarrow{a}_j,\sum_{k=1}^{n+2}\overrightarrow{a}_k\right)=\sum_{k=1}^{n+2}(\overrightarrow{a}_j,\overrightarrow{a}_k)=(\overrightarrow{a}_j,\overrightarrow{a}_k)+\sum_{k=1,k\neq j}^{n+2}(\overrightarrow{a}_j,\overrightarrow{a}_k)=\xi^2+(n+1)\xi^2\cos\varphi.$$

И поскольку $\sum_{k=1}^{n+2} \overrightarrow{a}_k = 0$, то

$$\left(\overrightarrow{a}_j, \sum_{k=1}^{n+2} \overrightarrow{a}_k\right) = \xi^2 + (n+1)\xi^2 \cos\varphi = \xi^2(1 + (n+1)\cos\varphi) = 0,$$

т. е.

$$\cos\varphi = -\frac{1}{n+1}.$$

По теореме косинусов

$$\varepsilon^2 = 2\xi^2 - 2\xi^2\cos\varphi = \xi^2\left(2 + \frac{2}{n+1}\right) = \xi^2\left(2\frac{n+2}{n+1}\right),$$

т. е.

$$\xi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\frac{n+2}{n+1}}}. \tag{8}$$

Матрица Шенберга $S_X(f)$ имеет вид (4), где $\alpha = 1$, $\beta = f(\varepsilon)$, а $\gamma = f(\xi)$. Поэтому по лемме 2

$$\det S_X(f) = (1 - f(\varepsilon))^{m-2} \cdot (1 + (n+1)f(\varepsilon) - (n+2)f(\xi)^2)$$

Вследствие оценки (6) и равенства (8) имеем

$$\begin{gathered}
1 + (n+1)f(\varepsilon) - (n+2)f^2(\xi) = 1 + (n+1)\big(1 + c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)\big) - \\
-(n+2)\big(1 + c_1\xi^2 + c_2\xi^4 + o(\xi^4)\big)^2 = 1 + (n+1)(1 + c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)) - \\
-(n+2)\left(1 + 2c_1\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\frac{n+2}{n+1}}}\right)^2 + (c_1^2 + 2c_2)\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\frac{n+2}{n+1}}}\right)^4 + o(\varepsilon^4)\right) = \\
= (n+1)c_2\varepsilon^4 - (n+2)(c_1^2 + 2c_2)\frac{\varepsilon^4}{(2\frac{n+2}{n+1})^2} + o(\varepsilon^4) = \\
= \frac{n+1}{4n+8}\left((2n+6)c_2 - (n+1)c_1^2\right)\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4).
\end{gathered}$$

В силу условия (7) при достаточно малых ε последнее выражение отрицательно. И т. к. определитель матрицы Шенберга отрицателен, то она не может быть положительно определена.

Заметим теперь, что для функции $f = \Omega_n$ в силу её представления (2)

$$c_1 = -\frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot n \cdot (n+2)}$$

и для них выполняется условие (7). Таким образом, на данном множестве точек матрица Шенберга $S_X(\Omega_n)$ не является неотрицательной. □

Объединяя Теорему 3 с Теоремой 5.1 из [1], получаем

Следствие 2. *Функция вида* (6) *имеет бесконечное число отрицательных квадратов (в смысле Замечания* 2*).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Golinskii L. Schoenberg Matrices of Radial Positive Definite Functions and Riesz Sequences of Translates in $L^2(\mathbb{R}^n)$ / L. Golinskii, · M. Malamud, · L. Oridoroga // Journal of Fourier Analysis and Applications. – 2015. – V. 21, № 5. – P. 915–960.
2. Golinskii L. Radial Positive Definite Functions and Schoenberg Matrices with Negative Eigenvalues / L. Golinskii, M. Malamud, L. Oridoroga // Transactions of the American Mathematical Society. – 2018. – V. 370, № 1. – P. 1–25. http://dx.doi.org/10.1090/tran/6876
3. Goloshchapova N. Radial positive definite functions and spectral theory of the Schrödinger operators with point interactions / N. Goloshchapova, M. Malamud, V. Zastavnyi // Math. Nachr. – 2012. – V. 285, № 14–15. – P. 1839 – 1859.
4. Schoenberg I. Metric spaces and positive definite functions / I. Schoenberg // Trans. Am. Math. Soc. – 1938. – V. 44. – P. 522–536.
5. Schoenberg I. Metric spaces and completely monotone functions / I. Schoenberg // Ann. Math. – 1938. – V. 39. – P. 811-–841.

Поступила в редакцию 24.08.2023 г.

NON-NEGATIVITY OF SCHOENBERG MATRICES

L. L. Oridoroga, A. V. Agibalova

For a radially positive definite function of class Φ_n $(n > 2)$, the positivity of the Schoenberg matrix generated by the vertices of any regular simplex of dimension $n+1$ is proved. Also, for an arbitrary n, an example of a function of the class Φ_n and a finite set of points in a space of dimension $n+1$ for which the Schoenberg matrix is not non-negative is given.

Keywords: Schoenberg matrix, positive definite function, radial positive definite function, simplex.

Оридорога Леонид Леонидович
кандидат физико-математических наук
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, Россия
l.oridoroga@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Oridoroga Leonid Leonidovich
Candidate of Physico-Mathematical Science,
Donetsk State University, Donetsk, Russia

Агибалова Анна Владимировна
кандидат физико-математических наук
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, Россия
g.agibalova@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Agibalova Anna Vladimirovna
Candidate of Physico-Mathematical Science,
Donetsk State University, Donetsk, Russia

Научное издание

Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки

2023. – № 2

Технические редакторы: *М. В. Фоменко, П. А. Машаров*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
ул. Университетская, 24,
283001, г. Донецк
Тел: +7 (856) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: http://donnu.ru//vestnikA

Подписано к печати 02.10.2023 г.
Формат $60 \times 84/8$. Бумага офсетная.
Печать — цифровая. Усл. печ. л. 10,4
Тираж 100 экз. Заказ № 23окт16

Издательство ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24,
Тел: +7 (856) 302-92-27.
Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности
в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.